Dokaz 1

Dokaži da je razlika dvoznamenkastog broja i broja zapisanog jednakim znamenkama, ali obrnutim poretkom, djeljiva sa 9.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj kojem je znamenka desetica a, a ≠ 0, znamenka jedinica b.
Vrijedi zapis:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

Treba dokazati da je razlika

$$\overline{ab} - \overline{ba}$$

višekratnik broja 9.

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10 \cdot a + b - (10 \cdot b + a) = 10 \cdot a + b - 10 \cdot b - a = 9 \cdot a - 9 \cdot b = 9 \cdot (a - b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 9. ■

Dokaz 2

Dokaži da je zbroj dvoznamenkastog broja i broja zapisanog jednakim znamenkama, ali obrnutim poretkom, djeljiv sa 11.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj kojem je znamenka desetica a, a ≠ 0, znamenka jedinica b. Vrijedi zapis:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

Treba dokazati da je zbroj

$$\overline{ab} + \overline{ba}$$

višekratnik broja 11.

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a = 11 \cdot a + 11 \cdot b = 11 \cdot (a + b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 11. ■

Dokaz 3

Dokaži da je zbroj bilo kojih dvaju neparnih cijelih brojeva paran broj.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Da je proizvoljni cijeli broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in Z.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, \ 2 \cdot n, \ 3 \cdot n, \ 4 \cdot n, \ 5 \cdot n, \ 6 \cdot n, \ 7 \cdot n, \ ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su dana dva neparna cijela broja:

$$2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot m + 1.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot n + 2 \cdot m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1).$$

Budući da je $n + m + 1$ cijeli broj, broj koji smo dobili višekratnik je broja 2. Zbroj je očigledno paran broj. ■

Dokaz 4

Dokaži da je razlika bilo kojih dvaju neparnih cijelih brojeva paran broj.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Da je proizvoljni cijeli broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in Z.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, \ 2 \cdot n, \ 3 \cdot n, \ 4 \cdot n, \ 5 \cdot n, \ 6 \cdot n, \ 7 \cdot n, \ ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su dana dva neparna cijela broja:

$$2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot m + 1.$$

Oduzmimo ih:

$$2 \cdot n + 1 - (2 \cdot m + 1) = 2 \cdot n + 1 - 2 \cdot m - 1 = 2 \cdot n + 1 - 2 \cdot m - 1 = 2 \cdot n - 2 \cdot m = 2 \cdot (n - m).$$

Budući da je $n - m$ cijeli broj, broj koji smo dobili višekratnik je broja 2. Zbroj je očigledno paran broj. ■

Dokaz 5

Dokaži da je zbroj svakih triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa 3.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n,\ n+1,\ n+2.$$

Zbrojimo ih:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3 \cdot n + 3 = 3 \cdot (n + 1).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

2.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n-1,\ n,\ n+1.$$

Zbrojimo ih:

$$n - 1 + n + n + 1 = n - 1 + n + n + 1 = 3 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

Dokaz 6

Dokaži da je zbroj triju uzastopnih parnih cijelih brojeva djeljiv sa 6.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \;,\; k \in Z.$$

Parni brojevi povećavaju se za 2.

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna cijela broja:

$$2 \cdot n, \; 2 \cdot n + 2, \; 2 \cdot n + 4.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 + 2 \cdot n + 4 = 6 \cdot n + 6 = 6 \cdot (n + 1).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 6. ■

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna cijela broja:

$$2 \cdot n - 2, \; 2 \cdot n, \; 2n + 2.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n - 2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot n - 2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 = 6 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 6. ■

Dokaz 7

Dokaži da je razlika troznamenkastog broja i broja zapisanog jednakim znamenkama, ali obrnutim poretkom, djeljiva i sa 9 i sa 11.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{abc}$ troznamenkasti broj kojem je znamenka stotica a, $a \neq 0$, znamenka desetica b, a znamenka jedinica c. Vrijedi zapis:

$$\overline{abc} = 10a \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Treba dokazati da je razlika

$$\overline{abc} - \overline{cba}$$

višekratnik i broja 9 i broja 11.

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a =$$
$$= 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a = 100 \cdot a + c - 100 \cdot c - a = 99 \cdot a - 99 \cdot c =$$
$$= 99 \cdot (a - c) = 9 \cdot 11 \cdot (a - c).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je i broja 9 i broja 11. ■

Dokaz 8

Dokaži da je razlika bilo kojeg troznamenkastog broja i zbroja njegovih znamenaka djeljiva sa 9.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{abc}$ troznamenkasti broj kojem je znamenka stotica a, $a \neq 0$, znamenka desetica b, a znamenka jedinica c. Vrijedi zapis:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Treba dokazati da je razlika

$$\overline{abc} - (a + b + c)$$

višekratnik broja 9.

$$\overline{abc} - (a + b + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 100 \cdot a + 10 \cdot b - a - b =$$

$$= 99 \cdot a + 9 \cdot b = 9 \cdot (11 \cdot a + b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 9. ■

Dokaz 9

Dokaži da je umnožak dvaju cijelih brojeva, od kojih je svaki zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva, također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Neka su x i y dva cijela broja od kojih je svaki zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva:

$$x=a^2+b^2 \quad , \quad y=c^2+d^2.$$

Njihov umnožak iznosi:

$$x\cdot y=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=a^2\cdot c^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2=$$

$$=a^2\cdot c^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d=$$

$$=\left(a^2\cdot c^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+b^2\cdot d^2\right)+\left(a^2\cdot d^2-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+b^2\cdot c^2\right)=$$

$$=(a\cdot c+b\cdot d)^2+(a\cdot d-b\cdot c)^2.$$

Dobili smo zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva. ■

Dokaz 10

Dokaži da je zbroj dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva djeljiv sa 4.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m=2\cdot k+1\ ,\ k\in N.$$

Neparni brojevi povećavaju se za 2.
Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \dots$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna neparna prirodna broja:

$$2\cdot n+1,\ 2\cdot n+3.$$

Zbrojimo ih:

$$2\cdot n+1+2\cdot n+3=4\cdot n+4=4\cdot(n+1).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 4. ■

2.inačica
Neka su zadana dva uzastopna neparna prirodna broja:

$$2\cdot n-1,\ 2\cdot n+1.$$

Zbrojimo ih:

$$2\cdot n-1+2\cdot n+1=2\cdot n-1+2\cdot n+1=4\cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 4. ■

Dokaz 11

Dokaži da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Neka su a i b cijeli brojevi. Tada kvadrat zbroja kvadrata od a i b glasi:

$$\left(a^2+b^2\right)^2 = \left(a^2\right)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + \left(b^2\right)^2 = a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 =$$

$$= a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 = \left(a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4\right) + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 + (2 \cdot a \cdot b)^2.$$

Dobili smo zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva. ■

Dokaz 12

Dokaži da je poluzbroj kvadrata dvaju neparnih prirodnih brojeva opet neparan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m=2\cdot k+1\ ,\ k\in N.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

Dva neparna prirodna broja možemo zapisati kao $2\cdot a+1$ i $2\cdot b+1$, $a,\ b\in N\cup\{0\}$.
Poluzbroj njihovih kvadrata iznosi:

$$\frac{(2\cdot a+1)^2+(2\cdot b+1)^2}{2}=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a+1+4\cdot b^2+4\cdot b+1}{2}=\frac{4\cdot a^2+4\cdot b^2+4\cdot a+4\cdot b+2}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot a+2\cdot b+1\right)}{2}=\frac{2\cdot\left(2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot a+2\cdot b+1\right)}{2}=$$

$$=2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot a+2\cdot b+1=2\cdot\left(\underbrace{a^2+b^2+a+b}_{k}\right)+1=2\cdot k+1,\ k\in N.$$

Broj a^2+b^2+a+b prirodan je broj. Označimo ga, na primjer, sa k.
Dobili smo neparan broj. ■

Dokaz 13

Dokaži da kvadrat neparnog prirodnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.

Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1) \cdot n = 2 \cdot k \ , \ n \in N \setminus \{1\}, k \in N \quad , \quad n \cdot (n+1) = 2 \cdot k \ , \ n, k \in N.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b, \ q \ \text{ je količnik}, \ r \ \text{ je ostatak}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Neparan prirodan broj, odabran po volji, možemo zapisati kao $2 \cdot k + 1, k \in N \cup \{0\}$.

Kvadriramo ga:

$$(2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 = 4 \cdot k \cdot (k+1) + 1 = 4 \cdot \underbrace{k \cdot (k+1)}_{2 \cdot n} + 1 = 4 \cdot 2 \cdot n + 1 = 8 \cdot n + 1.$$

Umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, $k \cdot (k+1)$, prirodan je broj djeljiv sa 2 pa možemo zapisati $k \cdot (k+1) = 2 \cdot n, n \in N$. Time smo dokazali da kvadrat neparnog prirodnog broja pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 1. ■

Dokaz 14

Dokaži da zbroj kvadrata dvaju uzastopnih prirodnih brojeva pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.

Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1) \cdot n = 2 \cdot k \ , \ n, k \in N \quad , \quad n \cdot (n+1) = 2 \cdot k \ , \ n, k \in N.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b, \ q \ \text{je količnik}, \ r \ \text{je ostatak}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

▶

Neka su zadana dva uzastopna prirodna broja n i n + 1. Zbroj njihovih kvadrata iznosi:

$$n^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot n \cdot (n+1) + 1 =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{n \cdot (n+1)}_{2 \cdot k} + 1 = 2 \cdot 2 \cdot k + 1 = 4 \cdot k + 1.$$

Umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, $n \cdot (n+1)$, prirodan je broj djeljiv sa 2 pa možemo zapisati $n \cdot (n+1) = 2 \cdot k, \ k \in N$. Time smo dokazali tvrdnju. ■

Dokaz 15

Dokaži da je za sve $n \in N \setminus \{1\}$ ***broj*** $n^4 + 1$ ***uvijek složen.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Preoblikujemo zadani izraz:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4 \cdot n^2 - 4 \cdot n^2 = \left(n^4 + 4 \cdot n^2 + 4\right) - 4 \cdot n^2 = \left(n^2 + 2\right)^2 - (2 \cdot n)^2 =$$

$$= \left(n^2 + 2 - 2 \cdot n\right) \cdot \left(n^2 + 2 + 2 \cdot n\right) = \left(n^2 - 2 \cdot n + 2\right) \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 2\right).$$

Budući da je n ≠ 1, oba izraza u zagradama veća su od 1. Dakle, zadani broj je uvijek složen. ■

Dokaz 16

Dokaži da je zbroj četiriju uzastopnih neparnih cijelih brojeva djeljiv i sa 4 i sa 8.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Neparni brojevi povećavaju se za 2.

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, \ 2 \cdot n, \ 3 \cdot n, \ 4 \cdot n, \ 5 \cdot n, \ 6 \cdot n, \ 7 \cdot n, \ ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica

Neka su dana četiri uzastopna neparna cijela broja:

$$2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot n + 3 \ , \ 2 \cdot n + 5 \ , \ 2 \cdot n + 7.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 + 2 \cdot n + 5 + 2 \cdot n + 7 = 8 \cdot n + 16 = 4 \cdot (2 \cdot n + 4) = 8 \cdot (n + 2).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 4 i broja 8. ■

2.inačica

Neka su dana četiri uzastopna neparna cijela broja:

$$2 \cdot n - 3 \ , \ 2 \cdot n - 1 \ , \ 2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot n + 3.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n - 3 + 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 2 \cdot n - 3 + 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 8 \cdot n = 4 \cdot (2 \cdot n).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 8 i broja 4. ■

Dokaz 17

Dokaži ako realni brojevi a, b, c ≠ 0 zadovoljavaju uvjet $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ ***onda je zbroj dvaju od njih jednak nuli.***

Teorija

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Jednakost razlomaka:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff a\cdot d=b\cdot c.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \iff a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

▶

Preoblikujemo zadani uvjet.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b}{a\cdot b\cdot c}=\frac{1}{a+b+c} \Rightarrow (a+b+c)\cdot(b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b)=a\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\cdot(b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=0 \Rightarrow$$

(množimo i pogodno grupiramo članove)

$$\Rightarrow a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2+a\cdot b\cdot c-a\cdot b\cdot c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2+a\cdot b\cdot c-a\cdot b\cdot c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c\right)+\left(a^2\cdot c+a\cdot b\cdot c\right)+\left(a^2\cdot b+a\cdot b^2\right)+\left(b\cdot c^2+a\cdot c^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot c\cdot(a+b)+a\cdot c\cdot(a+b)+a\cdot b\cdot(a+b)+c^2\cdot(a+b)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)\cdot\left(b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b+c^2\right)=0 \Rightarrow (a+b)\cdot\left(\left(b\cdot c+c^2\right)+(a\cdot c+a\cdot b)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)\cdot\left(c\cdot(b+c)+a\cdot(b+c)\right)=0 \Rightarrow (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)=0.$$

Umnožak je jednak nuli ako je a + b = 0 ili b + c = 0 ili c + a = 0. Odavde slijedi tvrdnja. ■

Dokaz 18

Dokaži zbroj pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiv je s 5.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, ...$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka je zadano pet uzastopnih cijelih brojeva:

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4.$$

Zbrojimo ih:

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5 \cdot n + 10 = 5 \cdot (n + 2).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 5. ■

2.inačica

Neka je zadano pet uzastopnih cijelih brojeva:

$$n-2, n-1, n, n+1, n+2.$$

Zbrojimo ih:

$$n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 5 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 5. ■

Dokaz 19

Dokaži da je zbroj svake tri uzastopne potencije broja 3 djeljiv s 39.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \dots$

▶

1.inačica
Neka su dane tri uzastopne potencije broja 3:

$$3^n,\ 3^{n+1},\ 3^{n+2}.$$

Zbrojimo ih:

$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}=3^n+3^n\cdot3^1+3^n\cdot3^2=3^n\cdot\left(1+3^1+3^2\right)=3^n\cdot(1+3+9)=13\cdot3^n=$$

$$=13\cdot3^{1+n-1}=13\cdot3^1\cdot3^{n-1}=13\cdot3\cdot3^{n-1}=39\cdot3^{n-1}.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 39. ■

2.inačica
Neka su dane tri uzastopne potencije broja 3:

$$3^n,\ 3^{n+1},\ 3^{n+2}.$$

Zbrojimo ih:

$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}=3^{n-1+1}+3^{n-1+2}+3^{n-1+3}=3^{n-1}\cdot3^1+3^{n-1}\cdot3^2+3^{n-1}\cdot3^3=$$

$$=3^{n-1}\cdot\left(3^1+3^2+3^3\right)=3^{n-1}\cdot(3+9+27)=39\cdot3^{n-1}.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 39. ■

Dokaz 20

Dokaži da je broj n^4+n^2+1 ***složen za n > 1.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Preoblikujemo zadani izraz:

$$n^4+n^2+1=n^4+2\cdot n^2+1-n^2=\left(n^4+2\cdot n^2+1\right)-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=$$

$$=\left(n^2+1-n\right)\cdot\left(n^2+1+n\right)=\left(n^2-n+1\right)\cdot\left(n^2+n+1\right).$$

Budući da je n > 1, oba izraza u zagradama veća su od 1. Dakle, zadani broj je uvijek složen. ■