Dokaz 101

Dokaži da izraz $\frac{a^2}{(a-b)\cdot(a-x)}+\frac{b^2}{(b-a)\cdot(b-x)}+\frac{x^2}{(x-a)\cdot(x-b)}$ ***u kojem su a, b i x realni brojevi ne ovisi o x.***

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Svojstvo komutativnosti:

$$a\cdot b=b\cdot a, \text{ za sve } a, b\in R.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m=a^{n-m}.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

▶

Izraz se mora moći preoblikovati u oblik koji ne sadrži x.

$$\frac{a^2}{(a-b)\cdot(a-x)}+\frac{b^2}{(b-a)\cdot(b-x)}+\frac{x^2}{(x-a)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)\cdot(a-x)}+\frac{b^2}{(-(a-b))\cdot(-(x-b))}-\frac{x^2}{(a-x)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)\cdot(a-x)}+\frac{b^2}{(a-b)\cdot(x-b)}-\frac{x^2}{(a-x)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a^2\cdot(x-b)+b^2\cdot(a-x)-x^2\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=\frac{a^2\cdot x-a^2\cdot b+b^2\cdot a-b^2\cdot x-x^2\cdot a+x^2\cdot b}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a^2\cdot x-a^2\cdot b+a\cdot b^2-b^2\cdot x-a\cdot x^2+b\cdot x^2}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a^2\cdot x-a^2\cdot b+a\cdot b^2-b^2\cdot x-a\cdot x^2+b\cdot x^2}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\\text{grupiranja}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\left(a^2\cdot x-a\cdot x^2\right)+\left(-a^2\cdot b+b\cdot x^2\right)+\left(a\cdot b^2-b^2\cdot x\right)}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a\cdot x\cdot(a-x)-b\cdot\left(a^2-x^2\right)+b^2\cdot(a-x)}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=\frac{a\cdot x\cdot(a-x)-b\cdot(a-x)\cdot(a+x)+b^2\cdot(a-x)}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{(a-x)\cdot\left(a\cdot x-b\cdot(a+x)+b^2\right)}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=\frac{(a-x)\cdot\left(a\cdot x-b\cdot(a+x)+b^2\right)}{(a-b)\cdot(a-x)\cdot(x-b)}=\frac{a\cdot x-b\cdot(a+x)+b^2}{(a-b)\cdot(x-b)}=$$

$$=\frac{a\cdot x-b\cdot a-b\cdot x+b^2}{(a-b)\cdot(x-b)}=\frac{a\cdot x-a\cdot b-b\cdot x+b^2}{(a-b)\cdot(x-b)}=\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\\text{grupiranja}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{(a\cdot x-a\cdot b)+\left(-b\cdot x+b^2\right)}{(a-b)\cdot(x-b)}=\frac{a\cdot(x-b)-b\cdot(x-b)}{(a-b)\cdot(x-b)}=\frac{(x-b)\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(x-b)}=\frac{(x-b)\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(x-b)}=1.\ \blacksquare$$

Dokaz 102

Dokaži da je za svaki cijeli broj n broj $(5\cdot n+7)^2-(1-n)^2$ ***djeljiv sa 48.***

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z=\{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n, 2\cdot n, 3\cdot n, 4\cdot n, 5\cdot n, 6\cdot n, 7\cdot n, ...$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Umnožak dva susjedna cijela broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1)\cdot n=2\cdot k \;,\; n\in Z, k\in Z \quad , \quad n\cdot(n+1)=2\cdot k \;,\; n, k\in Z.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica
Najprije preoblikujemo zadani izraz.

$$(5\cdot n+7)^2-(1-n)^2=(5\cdot n)^2+2\cdot 5\cdot n\cdot 7+7^2-\left(1-2\cdot n+n^2\right)=$$

$$=25\cdot n^2+70\cdot n+49-1+2\cdot n-n^2=24\cdot n^2+72\cdot n+48=24\cdot\left(n^2+3\cdot n+2\right)=$$

$$= 24\cdot\left(n^2+n+2\cdot n+2\right)=24\cdot\left(\left(n^2+n\right)+(2\cdot n+2)\right)=24\cdot\left(n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)\right)=$$

$$=24\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\left[\,(n+1)\cdot(n+2)=2\cdot k,\ k\in Z\,\right]=24\cdot 2\cdot k=48\cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 48. ■

2.inačica

Najprije preoblikujemo zadani izraz.

$$(5\cdot n+7)^2-(1-n)^2=\left((5\cdot n+7)-(1-n)\right)\cdot\left((5\cdot n+7)+(1-n)\right)=$$

$$=(5\cdot n+7-1+n)\cdot(5\cdot n+7+1-n)=(6\cdot n+6)\cdot(4\cdot n+8)=6\cdot(n+1)\cdot 4\cdot(n+2)=$$

$$=24\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\left[\,(n+1)\cdot(n+2)=2\cdot k,\ k\in Z\,\right]=24\cdot 2\cdot k=48\cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 48. ■

Dokaz 103

Pravac p sadrži redom točke M, N, P i Q tako da je $|MN| = |PQ|$. Dokaži da je tada i $|MP| = |NQ|$.

Teorija

Ako točka T leži na dužini $\overline{AB}$ vrijedi:

$$|AB| = |AT| + |TB| \quad , \quad |AT| + |TB| = |AB|.$$

Oduzimanje jednakosti:

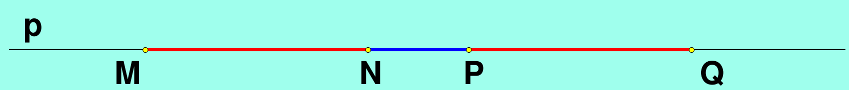
$$a = b \text{ i } c = d \;\Rightarrow\; a - c = b - d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

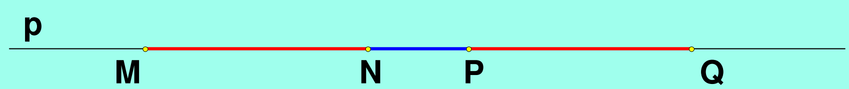
▶

1.inačica



$$|MP| = |MN| + |NP| = \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ |MN| = |PQ| \end{bmatrix} = |PQ| + |NP| = |NP| + |PQ| = |NQ|. \;\blacksquare$$

2.inačica



$$\left.\begin{array}{l} |MP| = |MN| + |NP| \\ |NQ| = |NP| + |PQ| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow |MP| - |NQ| = |MN| + |NP| - (|NP| + |PQ|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MP| - |NQ| = |MN| + |NP| - |NP| - |PQ| \Rightarrow$$

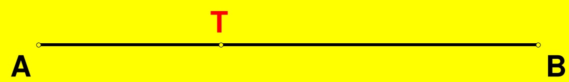
$$\Rightarrow |MP| - |NQ| = |MN| + |NP| - |NP| - |PQ| \Rightarrow |MP| - |NQ| = |MN| - |PQ| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ |MN| = |PQ| \end{bmatrix} \Rightarrow |MP| - |NQ| = 0 \Rightarrow |MP| = |NQ|. \;\blacksquare$$

Dokaz 104

Nacrtaj pravac p i točke A, B i C koje pripadaju pravcu. Odredi polovište P dužine $\overline{AB}$. Dokaži da je $|AC|+|BC|=2\cdot|PC|$.

Teorija



Ako točka T leži na dužini $\overline{AB}$ vrijedi:

$$|AB|=|AT|+|TB| \quad , \quad |AT|+|TB|=|AB|.$$

Zbrajanje jednakosti:

$$a=b \text{ i } c=d \;\Rightarrow\; a+c=b+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

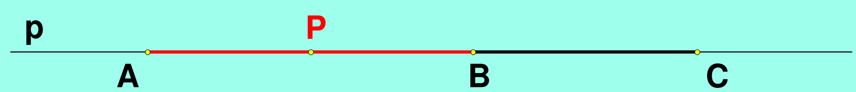
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ pa vrijedi

$$|AP|=|PB|.$$

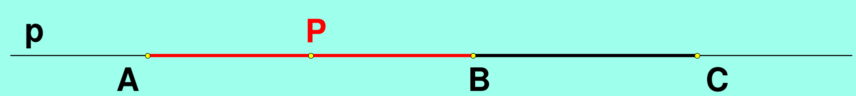


$$\left.\begin{array}{l}|AC|=|AP|+|PC|\\|BC|=|PC|-|PB|\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AC|=|PB|+|PC|\\|BC|=|PC|-|PB|\end{array}\right\}\left[\begin{array}{c}\text{zbrojimo}\\\text{jednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|+|BC|=|PB|+|PC|+|PC|-|PB| \Rightarrow |AC|+|BC|=|PB|+|PC|+|PC|-|PB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|+|BC|=2\cdot|PC|. \;\blacksquare$$

2.inačica



$$|AC|+|BC|=|AP|+|PC|+|PC|-|PB| \Rightarrow \big[\,|AP|=|PB|\,\big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|+|BC|=|PB|+|PC|+|PC|-|PB| \Rightarrow |AC|+|BC|=|PB|+|PC|+|PC|-|PB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|+|BC|=2\cdot|PC|. \;\blacksquare$$

Dokaz 105

Dokaži da za sve $x,\ y\in R$ ***vrijedi*** $x^2+y^2=1\ \Rightarrow\ |x+y|\le\sqrt{2}.$

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\ge b\ \text{i}\ c\in R\ \Rightarrow\ a+c\ge b+c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2}=|a|\ ,\ a\in R.$$

Korjenovanje nejednakosti:

$$0<a\le b\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}.$$

▶

Neka su x i y realni brojevi. Polazimo od istinite nejednakosti:

$$(x-y)^2\ge 0\ \Rightarrow\ x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\ge 0\ \Rightarrow\ x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y\ /+x^2+y^2\ \Rightarrow\ x^2+y^2+x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y+x^2+y^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2\ge x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+y)^2\le 2\cdot\left(x^2+y^2\right)\ \Rightarrow\ \left[\begin{matrix}\text{uvjet}\\ x^2+y^2=1\end{matrix}\right]\ \Rightarrow\ (x+y)^2\le 2\cdot 1\ \Rightarrow\ (x+y)^2\le 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+y)^2\le 2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ \sqrt{(x+y)^2}\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ |x+y|\le\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

Dokaz 106

Dokaži da za sve $x,\ y\in R$ ***vrijedi*** $x^2+y^2=2\ \Rightarrow\ |x+y|\le 2.$

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\ge b\ \text{i}\ c\in R\ \Rightarrow\ a+c\ge b+c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x|=x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.
Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2}=|a|\ ,\ a\in R.$$

Korjenovanje nejednakosti:

$$0<a\le b\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}.$$

▶

Neka su x i y realni brojevi. Polazimo od istinite nejednakosti:

$$(x-y)^2\ge 0\ \Rightarrow\ x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\ge 0\ \Rightarrow\ x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y\ /+x^2+y^2\ \Rightarrow\ x^2+y^2+x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y+x^2+y^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2\ge x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+y)^2\le 2\cdot\left(x^2+y^2\right)\ \Rightarrow\ \left[\begin{matrix}\text{uvjet}\\ x^2+y^2=2\end{matrix}\right]\ \Rightarrow\ (x+y)^2\le 2\cdot 2\ \Rightarrow\ (x+y)^2\le 4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+y)^2\le 4\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ \sqrt{(x+y)^2}\le\sqrt{4}\ \Rightarrow\ |x+y|\le 2.\ ■$$

Dokaz 107

Dokaži ako je a > 0, tada je – a < 0.

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a > b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a + c > b + c.$$

Zbroj suprotnih brojeva:

$$-x + x = 0 \quad , \quad x + (-x) = 0.$$

Nula je neutralni element za zbrajanje:

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

▶

Neka je realan broj a > 0.

$$a > 0 \;\Rightarrow\; a > 0 \;/ + (-a) \;\Rightarrow\; a + (-a) > 0 + (-a) \;\Rightarrow\; a - a > -a \;\Rightarrow\; a - a > -a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0 > -a \;\Rightarrow\; -a < 0. \;\blacksquare$$

Dokaz 108

Dokaži ako je a < 0, tada je – a > 0.

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a + c < b + c.$$

Zbroj suprotnih brojeva:

$$-x + x = 0 \quad , \quad x + (-x) = 0.$$

Nula je neutralni element za zbrajanje:

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

▶

Neka je realan broj a < 0.

$$a < 0 \;\Rightarrow\; a < 0 \;/ + (-a) \;\Rightarrow\; a + (-a) < 0 + (-a) \;\Rightarrow\; a - a < -a \;\Rightarrow\; a - a < -a \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 0 < -a \;\Rightarrow\; -a > 0. \;\blacksquare$$

Dokaz 109

Dokaži da za bilo koja dva realna broja a i b, a ≠ 0 i b ≠ 0, vrijedi $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3}$.

Teorija

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a > b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c > b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a > b \text{ i } c \ge d \ \Rightarrow \ a + c > b + d.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a > b \text{ i } c \in R \ \Rightarrow \ a + c > b + c.$$

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n.$$

Kub zbroja:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad , \quad a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 = (a+b)^3.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Korjenovanje nejednakosti:

$$a > b > 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Ako je a pozitivan realan broj, onda vrijedi:

$$\sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}} = \sqrt[n]{a^m} \ , \ n, \ r \in N \ , \ m \in Z.$$

▶

Neka su a i b realni brojevi, a ≠ 0, b ≠ 0. Tada vrijede nejednakosti:

$$a^2 + b^2 > 0 \quad , \quad (a-b)^2 \ge 0.$$

Odatle slijedi:

$$\left.\begin{matrix} a^2 + b^2 > 0 \\ (a-b)^2 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 + b^2 > 0 \ / \cdot 2 \\ (a-b)^2 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) > 0 \\ (a-b)^2 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 > 0 \\ (a-b)^2 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{matrix}\right] \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + (a-b)^2 > 0 \ \Rightarrow \ 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 > 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a^2-2\cdot a\cdot b+3\cdot b^2>0 \Rightarrow 3\cdot a^2+3\cdot b^2>2\cdot a\cdot b \Rightarrow 3\cdot a^2+3\cdot b^2>2\cdot a\cdot b \;/\cdot a^2\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a^4\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b^4>2\cdot a^3\cdot b^3 \Rightarrow 3\cdot a^4\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b^4>2\cdot a^3\cdot b^3 \;/+a^6+b^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a^4\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b^4+a^6+b^6>2\cdot a^3\cdot b^3+a^6+b^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^6+3\cdot a^4\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b^4+b^6>a^6+2\cdot a^3\cdot b^3+b^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2\right)^3+3\cdot\left(a^2\right)^2\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot\left(b^2\right)^2+\left(b^2\right)^3>\left(a^3\right)^2+2\cdot a^3\cdot b^3+\left(b^3\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2+b^2\right)^3>\left(a^3+b^3\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{korjenovanje}\\ \text{brojem } 6\end{array}\right] \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)^3>\left(a^3+b^3\right)^2 \;/\sqrt[6]{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{\left(a^2+b^2\right)^3}>\sqrt[6]{\left(a^3+b^3\right)^2} \Rightarrow \sqrt[6]{\left(a^2+b^2\right)^3}>\sqrt[6]{\left(a^3+b^3\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}. \blacksquare$$

Dokaz 110

Dokaži $a < b$ i $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$

Teorija

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a < b \ , \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a > b \text{ i } c \in R \Rightarrow a + c > b + c.$$

▶

Neka je zadan negativan broj c, **c < 0**. Tada je **– c > 0**.

Dalje slijedi:

$$a < b \Rightarrow a < b \ / \cdot (-c) \Rightarrow a \cdot (-c) < b \cdot (-c) \Rightarrow -a \cdot c < -b \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a \cdot c < -b \cdot c \ / + a \cdot c + b \cdot c \Rightarrow -a \cdot c + a \cdot c + b \cdot c < -b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a \cdot c + a \cdot c + b \cdot c < -b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c \Rightarrow b \cdot c < a \cdot c \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c. \ \blacksquare$$

Dokaz 111

Dokaži da za svaka tri različita pozitivna realna broja a, b i c vrijedi nejednakost
$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)>8\cdot a\cdot b\cdot c.$

Teorija

Aritmetička sredina je veća od geometrijske sredine:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}.$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a>b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c>b\cdot c.$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a>b\text{ i }c\geq d\ \Rightarrow\ a+c>b+d.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ ,\ a,b\geq 0.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a\quad,\quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Korjenovanje:

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

▶

Budući da je za svaka dva različita pozitivna realna broja njihova aritmetička sredina veća od njihove geometrijske sredine, za brojeve a, b i c vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a+b}{2}>\sqrt{a\cdot b}\\ \frac{b+c}{2}>\sqrt{b\cdot c}\\ \frac{c+a}{2}>\sqrt{c\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{a+b}{2}>\sqrt{a\cdot b}\ /\cdot 2\\ \frac{b+c}{2}>\sqrt{b\cdot c}\ /\cdot 2\\ \frac{c+a}{2}>\sqrt{c\cdot a}\ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b>2\cdot\sqrt{a\cdot b}\\ b+c>2\cdot\sqrt{b\cdot c}\\ c+a>2\cdot\sqrt{c\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)>2\cdot\sqrt{a\cdot b}\cdot 2\cdot\sqrt{b\cdot c}\cdot 2\cdot\sqrt{c\cdot a}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)>8\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c\cdot a}\ \Rightarrow\ (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)>8\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot c^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)>8\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{c^2}\ \Rightarrow\ (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)>8\cdot a\cdot b\cdot c.\ \blacksquare$$

Dokaz 112

Dokaži za svaki $a, b \in R$ ***vrijedi*** $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Apsolutna vrijednost umnoška dva broja jednaka je umnošku apsolutnih vrijednosti tih brojeva.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

▶

Promotrit ćemo četiri slučaja:

1. slučaj

Brojevi a i b su nenegativni.

$$\left.\begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot b \geq 0 \Rightarrow |a \cdot b| = a \cdot b \Rightarrow \begin{bmatrix} a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ b \geq 0 \Rightarrow |b| = b \end{bmatrix} \Rightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

2. slučaj

Brojevi a i b su negativni.

$$\left.\begin{matrix} a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot b > 0 \Rightarrow |a \cdot b| = a \cdot b \Rightarrow |a \cdot b| = (-a) \cdot (-b) \Rightarrow \begin{bmatrix} a < 0 \Rightarrow |a| = -a \\ b < 0 \Rightarrow |b| = -b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

3. slučaj

Broj a je nenegativan, broj b je negativan.

$$\left.\begin{matrix} a \geq 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow |a \cdot b| = -(a \cdot b) \Rightarrow |a \cdot b| = a \cdot (-b) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ b < 0 \Rightarrow |b| = -b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

4. slučaj

Broj a je negativan, broj b je nenegativan.

$$\left.\begin{matrix} a < 0 \\ b \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow |a \cdot b| = -(a \cdot b) \Rightarrow |a \cdot b| = (-a) \cdot b \Rightarrow \begin{bmatrix} a < 0 \Rightarrow |a| = -a \\ b \geq 0 \Rightarrow |b| = b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|. \blacksquare$$

Dokaz 113

Dokaži za svaki $a, b \in R$, $b \neq 0$ ***vrijedi*** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Apsolutna vrijednost količnika dva broja jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti tih brojeva.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

▶

Promotrit ćemo četiri slučaja:

1. slučaj

Brojevi a i b su nenegativni.

$$\left.\begin{matrix} a \geq 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ b > 0 \Rightarrow |b| = b \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

2. slučaj

Brojevi a i b su negativni.

$$\left.\begin{matrix} a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{-a}{-b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a < 0 \Rightarrow |a| = -a \\ b < 0 \Rightarrow |b| = -b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. slučaj

Broj a je nenegativan, broj b je negativan.

$$\left.\begin{matrix} a \geq 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{-b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ b < 0 \Rightarrow |b| = -b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

4. slučaj

Broj a je negativan, broj b je nenegativan.

$$\left.\begin{matrix} a < 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a < 0 \Rightarrow |a| = -a \\ b > 0 \Rightarrow |b| = b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}. \blacksquare$$

Dokaz 114

Dokaži da je dijagonala kojoj su krajnje točke vrhovi tupih kutova paralelograma kraća od dijagonale kojoj su krajnje točke vrhovi šiljastih kutova tog paralelograma.

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.

Dijagonale se raspolavljaju.

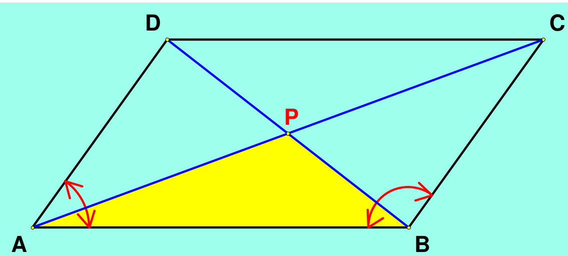
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Nasuprot manjeg kuta je kraća stranica.

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a < b \text{ i } c > 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c.$$

▶



Sa slike vidi se:

$$|AP| = |PC| \;,\; |BP| = |PD|.$$

Neka je zadan paralelogram ABCD i neka je $\angle BAD < \angle ABC.$ Dokažimo tvrdnju!

Uočimo trokut ABP. Vidimo da je

$$|BP| < |AP|$$

jer je nasuprot manjeg kuta trokuta kraća stranica. Odatle je

$$|BP| < |AP| \;\Rightarrow\; |BP| < |AP| \;/\cdot 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot |BP| < 2 \cdot |AP| \;\Rightarrow\; |BD| < |AC|. \;\blacksquare$$

Dokaz 115

Dokaži da su u sukladnim trokutima duljine simetrala sukladnih kutova jednake. (Duljina je simetrale unutarnjeg kuta trokuta udaljenost vrha tog trokuta od sjecišta simetrale kuta sa suprotnom stranicom.)

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \;,\; b = b_1 \;,\; c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

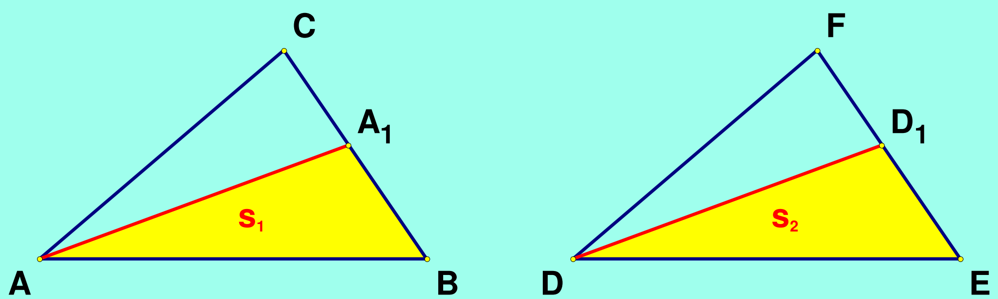
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Sa slika vidi se:

$$|AB| = |DE| \;,\; |BC| = |EF| \;,\; |CA| = |FD| \;,\; |AA_1| = s_1 \;,\; |DD_1| = s_2$$

Trokuti ΔABC i ΔDEF međusobno su sukladni. Uočimo trokute ΔABA_1 i ΔDED_1. Oni su sukladni po K – S – K poučku o sukladnosti trokuta (jer je $|AB| = |DE|$, $\angle BAA_1 = \angle EDD_1$, $\angle ABC = \angle DEF$).

Odatle slijedi da je

$$|AA_1| = |DD_1| \;\Rightarrow\; s_1 = s_2 .$$

Dokaz gotov! ■

Dokaz 116

Dokaži da za sve realne pozitivne brojeve a, b, c vrijedi $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3.$

Teorija

Aritmetička sredina je veća od geometrijske sredine:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a\geq b \text{ i } c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\geq b\cdot c.$$

▶

Neka su zadani racionalni brojevi:

$$\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}.$$

Tada je:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq \sqrt[3]{1}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq 1\ /\cdot 3\ \Rightarrow\ \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3.\ \blacksquare$$

Dokaz 117

Dokaži da se u svakom paralelogramu dijagonale međusobno raspolavljaju.

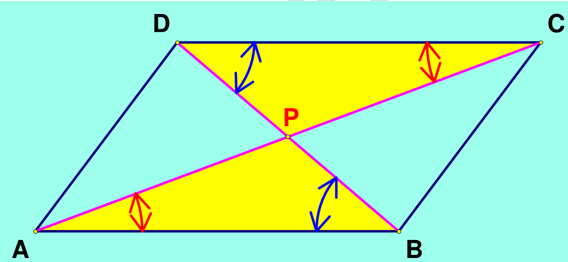
Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.
Dijagonale se raspolavljaju.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Sukladnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.
Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Neka je zadan paralelogram ABCD. Dokažimo tvrdnju!
Primijetimo da su trokuti ΔABP i ΔCDP sukladni po K – S – K poučku o sukladnosti trokuta (jer je $|AB| = |CD|$, $\angle BAP = \angle PCD$, $\angle ABP = \angle CDP$).
Odatle slijedi da je

$$|AP| = |PC| \quad , \quad |BP| = |PD| . \ \blacksquare$$

Dokaz 118

Dokaži ako su u trokutu dvije visine jednakih duljina da je tada trokut jednakokračan.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračni trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \;,\; b = b_1 \;,\; c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

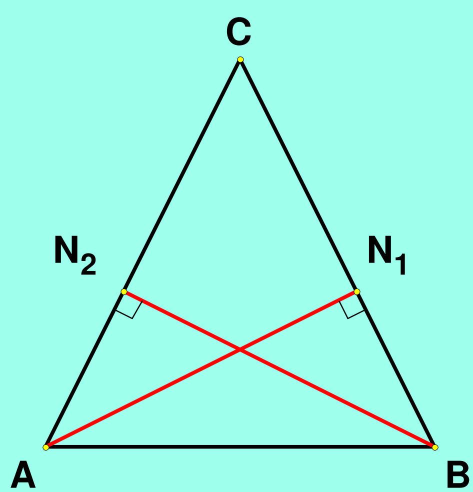
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Neka su N_1 i N_2 nožišta visina spuštenih iz vrhova A i B na suprotne stranice trokuta ABC. Prema uvjetu zadatka duljine tih visina jednake su:

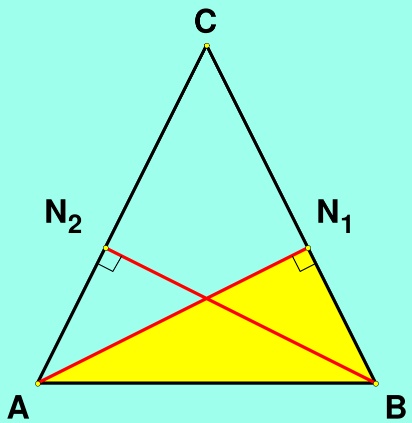
$$|AN_1| = |BN_2| .$$

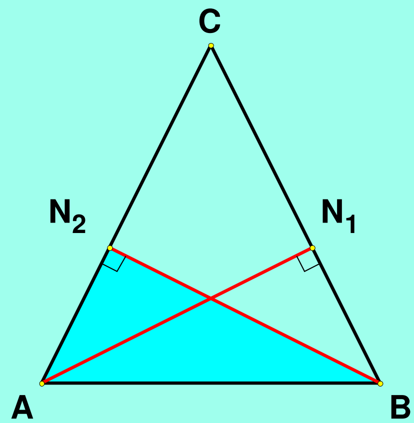
Trokuti ΔABN_1 i ΔABN_2 podudaraju se u dvije stranice, $|AB| = |AB|$, $|AN_1| = |BN_2|$ i kutu nasuprot većoj stranici

$$\angle BN_1A = \angle AN_2B = 90^\circ .$$

Dakle, trokuti ΔABN_1 i ΔABN_2 sukladni su,

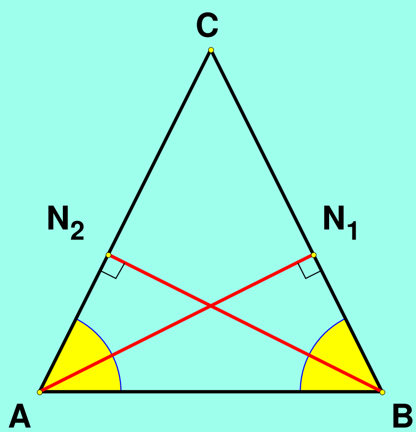
$$\Delta ABN_1 \cong \Delta ABN_2 .$$





Zato su jednaki i kutovi

$$\angle BAN_2 = \angle ABN_1.$$



Trokut ABC ima jednaka dva kuta pa su mu i dvije stranice jednake duljine, dakle, trokut ABC je jednakokračan. ■

Dokaz 119

Dokaži da za svaki x ≠ 0, $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot x}{b\cdot x}$.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\dots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \dots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\dots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \dots\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a\in Z,\ b\in N$ zove se racionalan broj.

Jednakost racionalnih brojeva:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \ \Leftrightarrow\ a\cdot d=b\cdot c.$$

Svojstvo komutativnosti za množenje:

$$a\cdot b=b\cdot a,\ \text{za sve}\ a,\ b\in R.$$

Svojstvo asocijativnosti za množenje:

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,\ \text{za sve}\ a,\ b,\ c\in R.$$

▶

Unakrsnim množenjem dobije se:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot x}{b\cdot x} \ \Rightarrow\ a\cdot(b\cdot x)=b\cdot(a\cdot x) \ \Rightarrow\ a\cdot b\cdot x=a\cdot b\cdot x.\ \blacksquare$$

Dokaz 120

Dokaži da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m=2\cdot k+1 \ , \ k\in N.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m=2\cdot k \ , \ k\in N.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Relativno prosti brojevi su prirodni brojevi koji nemaju zajedničkih djelitelja (osim jedinice). Npr. brojevi 4 i 13.

Brojevi a i b su relativno prosti ako je njihov najveći zajednički djelitelj jednak 1, tj. brojevi a i b nemaju zajedničkih faktora.

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a\in Z,\ b\in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \ , \ a\geq 0.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a>b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Skup racionalnih brojeva označavamo slovom Q.

▶

1.inačica

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj,

$$\sqrt{2}\in Q.$$

Tada možemo pisati

$$\frac{m}{n}=\sqrt{2},$$

gdje su m i n prirodni brojevi i pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ skraćen do kraja. Dakle, prirodni brojevi m i n nemaju zajedničkih faktora osim broja 1, oni su relativno prosti. Kvadriranjem i sređivanje dobije se:

$$\frac{m}{n}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{m}{n}=\sqrt{2} \ /^2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2}=2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2}=2 \ /\cdot n^2 \Rightarrow m^2=2\cdot n^2.$$

Na desnoj strani je paran broj pa bi m morao biti paran broj (jer je kvadrat neparnog broja neparan broj). Dakle,

$$m=2\cdot k \ , \ k\in N.$$

Odatle opet izlazi

$$m^2=2\cdot n^2 \Rightarrow [m=2\cdot k] \Rightarrow (2\cdot k)^2=2\cdot n^2 \Rightarrow 4\cdot k^2=2\cdot n^2 \Rightarrow 4\cdot k^2=2\cdot n^2 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot k^2=n^2.$$

Zaključujemo da bi n morao biti paran broj. Međutim, brojevi m i n po pretpostavci su relativno prosti pa nije moguće da oba budu parna (ne mogu imati zajedničke faktore). Pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj vodi do proturječja pa $\sqrt{2}$ mora biti iracionalan broj.

Dokaz gotov! ■

2.inačica

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj,

$$\sqrt{2}\in Q.$$

Tada postoji prirodan broj n tako da je

$$n\cdot\sqrt{2}\in N.$$

Neka je k najmanji prirodan broj za koji je

$$k\cdot\sqrt{2}\in N.$$

Definiramo broj L tako da je

$$L=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot k \Rightarrow L=k\cdot\sqrt{2}-k.$$

To je prirodan broj,

$$L \in N$$

jer je

$$k \cdot \sqrt{2} \in N \text{ i } k \cdot \sqrt{2} > k \ \left(\text{jer je } \sqrt{2} > 1 \text{ zbog } 2 > 1\right).$$

Sada promatramo

$$L \cdot \sqrt{2} = \left(k \cdot \sqrt{2} - k\right) \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow \ L \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot k - k \cdot \sqrt{2}.$$

To je prirodan broj,

$$L \cdot \sqrt{2} \in N$$

jer je

$$2 \cdot k \in N \text{ i } k \cdot \sqrt{2} \in N \text{ i } 2 \cdot k > k \cdot \sqrt{2} \ \left(\text{jer je } 2 > \sqrt{2} \text{ zbog } 4 > 2\right).$$

Međutim,

$$L \cdot \sqrt{2} < k \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow \ 2 \cdot k - k \cdot \sqrt{2} < k \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow \ 2 \cdot k < k \cdot \sqrt{2} + k \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow \ 2 \cdot k < 2 \cdot k \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot k < 2 \cdot k \cdot \sqrt{2} \ /:(2 \cdot k) \ \Rightarrow \ 1 < \sqrt{2}.$$

Dakle, L je manji broj od k, a to je u kontradikciji s izborom od k kao najmanjim prirodnim brojem za koji je $k \cdot \sqrt{2} \in N$. Pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj vodi do proturječja pa $\sqrt{2}$ mora biti iracionalan broj. ■