Dokaz 121

Dokaži da je $12+\sqrt{2}$ ***iracionalan broj znajući da je*** $\sqrt{2}$ ***iracionalan broj.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a\in Z,\ b\in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

▶

Ako stavimo da je

$$n=12+\sqrt{2},$$

slijedi

$$n=12+\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 12+\sqrt{2}=n\ \Rightarrow\ \sqrt{2}=n-12.$$

Kada bi n bio racionalan broj, tada bi iz

$$\sqrt{2}=n-12$$

slijedilo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To je u suprotnosti s pretpostavkom da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Dakle, broj $12+\sqrt{2}$ je iracionalan. ■

Dokaz 122

Dokaži da je aritmetička sredina $\frac{r_1+r_2}{2}$ racionalnih brojeva r_1 i r_2 opet racionalan broj koji se nalazi između tih brojeva.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \qquad \text{ili} \qquad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Skup racionalnih brojeva

$$Q=\left\{\frac{a}{b} : a,\ b\in Z,\ b\neq 0\right\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a\in Z,\ b\in N$ zove se racionalan broj.

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Uređaj na Q

Neka su $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}\in Q,\ b,\ d>0.$ Kažemo da je $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ako je $a\cdot d<b\cdot c.$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a\leq b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}.$$

▶

Neka su $r_1=\frac{a}{b}$ i $r_2=\frac{c}{d}$, $a,\ c\in Z$, $b,\ d\in N.$

Nađimo njihov poluzbroj:

$$\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}\ \Rightarrow\ \frac{r_1+r_2}{2}=\frac{\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}}{2}\ \Rightarrow\ \frac{r_1+r_2}{2}=\frac{\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}}{\frac{2}{1}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{r_1+r_2}{2}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{2\cdot b\cdot d}\ \Rightarrow\ \frac{r_1+r_2}{2}\in Q.$$

To je očito opet racionalan broj. Dakle, aritmetička sredina racionalnih brojeva je racionalan broj.

Pretpostavimo da je $r_1 \le r_2$ što povlači $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d \le b \cdot c.$

Dokazat ćemo dvije nejednakosti:

$$r_1 \le \frac{r_1 + r_2}{2} \text{ i } \frac{r_1 + r_2}{2} \le r_2.$$

Uvjerimo se u njihovu istinitost.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \le \frac{r_1 + r_2}{2} \\ \frac{r_1 + r_2}{2} \le r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} r_1 = \frac{a}{b}, \ r_2 = \frac{c}{d} \\ \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2 \cdot b \cdot d} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} \le \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2 \cdot b \cdot d} \\ \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2 \cdot b \cdot d} \le \frac{c}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{prema definiciji} \\ \text{uspoređivanja} \\ \text{racionalnih brojeva} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot 2 \cdot b \cdot d \le b \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \\ d \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \le c \cdot 2 \cdot b \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot 2 \cdot b \cdot d \le b \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \ /: b \\ d \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \le c \cdot 2 \cdot b \cdot d \ /: d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a \cdot d \le a \cdot d + b \cdot c \\ a \cdot d + b \cdot c \le 2 \cdot b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a \cdot d - a \cdot d \le b \cdot c \\ a \cdot d \le 2 \cdot b \cdot c - b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot d \le b \cdot c \\ a \cdot d \le b \cdot c \end{array}\right\}.$$

Zadnje nejednakosti su istinite prema pretpostavci pa su istinite i početne, tj.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \le \frac{r_1 + r_2}{2} \\ \frac{r_1 + r_2}{2} \le r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 \le \frac{r_1 + r_2}{2} \le r_2. \ \blacksquare$$

Dokaz 123

Dokaži ako je $r_1 > r_2$, $r_1, r_2 \in Q,$ ***da je tada*** $r_1 + r > r_2 + r$ za svaki $r \in Q.$

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Skup racionalnih brojeva

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b}, a \in Z, b \in N$ zove se racionalan broj.

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Uređaj na Q

Neka su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q, b, d > 0.$ Kažemo da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $a \cdot d < b \cdot c.$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \le b \;,\; c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su $r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}, r = \frac{x}{y}$, $a, c, x \in Z$, $b, d, y \in N.$

Pretpostavimo da je $r_1 > r_2$ što povlači $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d > b \cdot c.$

Ako je $r_1 > r_2$, tj. $a \cdot d > b \cdot c,$ dokažimo da vrijedi

$$r_1 + r > r_2 + r.$$

Uvjerimo se u njezinu istinitost.

$$r_1 + r > r_2 + r \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{x}{y} > \frac{c}{d} + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a \cdot y + b \cdot x}{b \cdot y} > \frac{c \cdot y + d \cdot x}{d \cdot y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot y \cdot (a \cdot y + b \cdot x) > b \cdot y \cdot (c \cdot y + d \cdot x) \Rightarrow d \cdot y \cdot (a \cdot y + b \cdot x) > b \cdot y \cdot (c \cdot y + d \cdot x) \; /: y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot (a \cdot y + b \cdot x) > b \cdot (c \cdot y + d \cdot x) \Rightarrow d \cdot a \cdot y + d \cdot b \cdot x > b \cdot c \cdot y + b \cdot d \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot d \cdot y + b \cdot d \cdot x > b \cdot c \cdot y + b \cdot d \cdot x \Rightarrow a \cdot d \cdot y + b \cdot d \cdot x > b \cdot c \cdot y + b \cdot d \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot d \cdot y > b \cdot c \cdot y \Rightarrow a \cdot d \cdot y > b \cdot c \cdot y \; /: y \Rightarrow a \cdot d > b \cdot c.$$

Zadnja nejednakost je istinita prema pretpostavci pa je istinita i početna, tj.

$$r_1 + r > r_2 + r. \blacksquare$$

Dokaz 124

Dokaži ako je $r_1 > r_2$, $r_1, r_2 \in Q$, ***da je tada*** $r_1 \cdot r > r_2 \cdot r$ za svaki $r > 0,\ r \in Q$.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Skup racionalnih brojeva

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a,\ b \in Z,\ b \neq 0 \right\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a \in Z,\ b \in N$ zove se racionalan broj.

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Uređaj na Q

Neka su $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d} \in Q,\ b,\ d > 0.$ Kažemo da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $a \cdot d < b \cdot c.$

▶

Neka su $r_1 = \frac{a}{b},\ r_2 = \frac{c}{d},\ r = \frac{x}{y}$, $a,\ c \in Z,$, $b,\ d,\ x,\ y \in N.$

Pretpostavimo da je $r_1 > r_2$ što povlači $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d > b \cdot c.$

Ako je $r_1 > r_2$, tj. $a \cdot d > b \cdot c,$ dokažimo da vrijedi

$$r_1 \cdot r > r_2 \cdot r.$$

Uvjerimo se u njezinu istinitost.

$$r_1 \cdot r > r_2 \cdot r \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} > \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a \cdot x}{b \cdot y} > \frac{c \cdot x}{d \cdot y} \Rightarrow a \cdot x \cdot d \cdot y > b \cdot y \cdot c \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot x \cdot d \cdot y > b \cdot y \cdot c \cdot x \ /:(x \cdot y) \Rightarrow a \cdot d > b \cdot c.$$

Zadnja nejednakost je istinita prema pretpostavci pa je istinita i početna, tj.

$$r_1 \cdot r > r_2 \cdot r. \ \blacksquare$$

Dokaz 125

Dokaži ako su a i b nenegativni realni brojevi, tada vrijedi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

Teorija

Drugi korijen

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

▶

Kvadrirajmo umnožak $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right) \Rightarrow \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b \Rightarrow \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

Broj $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ pomnožen sam sa sobom daje broj a · b pa je prema definiciji drugog korijena, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ upravo drugi korijen iz a · b, tj.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}. \;\blacksquare$$

Dokaz 126

Dokaži ako su a i b pozitivni realni brojevi, tada vrijedi $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Teorija

Drugi korijen

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

▶

Kvadrirajmo količnik $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b} \;/\sqrt{} \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Broj $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pomnožen sam sa sobom daje broj $\dfrac{a}{b}$ pa je prema definiciji drugog korijena, korijen broja $\dfrac{a}{b}$ upravo jednak $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, tj.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}. \blacksquare$$

Dokaz 127

Dokaži da je umnožak iracionalnog i racionalnog broja različitog od nule iracionalan broj.

Teorija

Broj oblika $\frac{a}{b}$, $a \in Z$, $b \in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

▶

Neka je a iracionalan broj, a b racionalan broj, b ≠ 0. Njihov umnožak označimo sa x.

$$x = a \cdot b.$$

Pretpostavimo da je x racionalan broj. Iz jednadžbe dobijemo:

$$x = a \cdot b \;\Rightarrow\; a \cdot b = x \;\Rightarrow\; a \cdot b = x \;/ : b \;\Rightarrow\; a = \frac{x}{b}.$$

Količnik racionalnih brojeva x i b je racionalan broj pa slijedi da je a racionalan što je u suprotnosti s pretpostavkom da je a iracionalan. Dakle, umnožak iracionalnog i racionalnog broja različitog od nule je iracionalan broj. ■

Dokaz 128

Dokaži ako je točka P polovište dužine $\overline{AB}$, tada vrijedi:

1. $|AP| = |PB|$
2. $|AP| + |PB| = |AB|$.

Teorija

Polovište dužine je točka dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.

Polovište dužine

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Udaljenost dviju točaka u ravnini

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Korjenovanje:

$$\sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ , \ a, b \geq 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

1.

Neka su dane točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i polovište $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ dužine $\overline{AB}$.

Dokažimo da vrijedi $|AP| = |PB|$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A(x_1,\, y_1)=A(x_1,\, y_1)\\ P(x_2,\, y_2)=P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\end{array}\right\}\\ \\ \left.\begin{array}{l}P(x_1,\, y_1)=P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\\ B(x_2,\, y_2)=B(x_2,\, y_2)\end{array}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|AP|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\ \\ |PB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)^2+\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}-y_1\right)^2}\\ |PB|=\sqrt{\left(x_2-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_2-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{x_1}{1}\right)^2+\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}-\dfrac{y_1}{1}\right)^2}\\ |PB|=\sqrt{\left(\dfrac{x_2}{1}-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y_2}{1}-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{x_1+x_2-2\cdot x_1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y_1+y_2-2\cdot y_1}{2}\right)^2}\\ |PB|=\sqrt{\left(\dfrac{2\cdot x_2-(x_1+x_2)}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2\cdot y_2-(y_1+y_2)}{2}\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\\ |PB|=\sqrt{\left(\dfrac{2\cdot x_2-x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2\cdot y_2-y_1-y_2}{2}\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AP|=\sqrt{\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\\ |PB|=\sqrt{\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow |AP|=|PB|.\ \blacksquare$$

2.
Neka je

$$|AP|=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\ ,\ |PB|=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}.$$

Izračunajmo $|AP|+|PB|$.

$$|AP|+|PB|=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=2\cdot\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=\sqrt{4}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=\sqrt{4\cdot\left(\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2\right)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=\sqrt{4\cdot\left(\frac{(x_2-x_1)^2}{4}+\frac{(y_2-y_1)^2}{4}\right)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=\sqrt{4\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{4}+4\cdot\frac{(y_2-y_1)^2}{4}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=\sqrt{\cancel{4}\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{\cancel{4}}+\cancel{4}\cdot\frac{(y_2-y_1)^2}{\cancel{4}}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{po definiciji}\\ |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AP|+|PB|=|AB|.\ \blacksquare$$

Dokaz 129

Dokaži da je afina funkcija f(x) = a · x + b, s pozitivnim koeficijentom smjera a, rastuća funkcija.

Teorija

Funkcija $f : R \rightarrow R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x + b,\ a,\ b \in R,\ a \neq 0$ naziva se afina funkcija.

Rastuća funkcija

Neka je $f : D \rightarrow K$ funkcija za koju za svaka dva broja $x_1,\ x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Tada kažemo da funkcija f raste ili da je f rastuća funkcija.

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a < b\ ,\ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b\ ,\ c \in R \Rightarrow a + c < b + c.$$

▶

Iz $x_1 < x_2$ slijedi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow [\,a > 0\,] \Rightarrow x_1 < x_2 \ / \cdot a \Rightarrow a \cdot x_1 < a \cdot x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 < a \cdot x_2 \ / + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot x_1 + b < a \cdot x_2 + b \Rightarrow [\,f(x) = a \cdot x + b\,] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Dakle, f je rastuća. ■

Dokaz 130

Dokaži da je afina funkcija f(x) = a · x + b, s negativnim koeficijentom smjera a, padajuća funkcija.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x + b,\ a,\ b \in R,\ a \neq 0$ naziva se afina funkcija.

Padajuća funkcija

Neka je $f : D \to K$ funkcija za koju za svaka dva broja $x_1,\ x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

Tada kažemo da funkcija f pada ili da je f padajuća funkcija.
Množenje nejednakosti negativnim brojem:

$$a < b\ ,\ c < 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c > b \cdot c.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b\ ,\ c \in R \;\Rightarrow\; a + c < b + c.$$

▶

Iz $x_1 < x_2$ slijedi:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; [\,a < 0\,] \;\Rightarrow\; x_1 < x_2 \ \ / \cdot a \;\Rightarrow\; a \cdot x_1 > a \cdot x_2 \;\Rightarrow\; a \cdot x_1 > a \cdot x_2 \ \ / + b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a \cdot x_1 + b > a \cdot x_2 + b \;\Rightarrow\; [\,f(x) = a \cdot x + b\,] \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

Dakle, f je padajuća. ■

Dokaz 131

Dokaži ako je $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$***, onda je*** $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}.$

Teorija

Jednakost racionalnih brojeva

Dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su jednaka ako je $a \cdot d = b \cdot c.$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

Zadani uvjet $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ekvivalentan je s $b^2=a\cdot c.$ Iz $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ slijedi:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c} \ /^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{b}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2} \ /+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+1=\frac{b^2}{c^2}+1 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{1}=\frac{b^2}{c^2}+\frac{1}{1} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2} \ /\cdot\frac{b^2}{b^2+c^2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{c^2} \Rightarrow \left[b^2=a\cdot c\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a\cdot c}{c^2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a\cdot \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}. \ \blacksquare$$

2.inačica

Preoblikujemo jednakost $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c} \; / \cdot b \cdot c \Rightarrow a \cdot c = b^2 \Rightarrow b^2 = a \cdot c.$$

Sada dokazujemo tvrdnju:

$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\left[b^2 = a \cdot c \right]=\frac{a^2+a\cdot c}{a\cdot c+c^2}=\frac{a\cdot(a+c)}{c\cdot(a+c)}=\frac{a\cdot(a+c)}{c\cdot(a+c)}=\frac{a}{c}. \;\blacksquare$$

Dokaz 132

Dokaži da od svih pravokutnika danog opsega O najveću površinu ima kvadrat.

Teorija

Aritmetička sredina je veća od geometrijske sredine:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Opseg pravokutnika duljina stranica a i b je zbroj duljina svih stranica pravokutnika

$$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b.$$

Površina pravokutnika duljina stranica a i b izračunava se po formuli

$$P = a \cdot b.$$

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.

Opseg kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Kvadriranje nejednakosti:

$$a \geq b > 0 \;\Rightarrow\; a^2 \geq b^2.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \;\;,\;\; a \geq 0.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \;\;,\;\; n \neq 0 \;\;,\;\; n \neq 1.$$

▶

Neka su a i b duljine stranica pravokutnika. Tada pravokutnik ima:

♥ opseg $O = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

♥ površinu $P_1 = a \cdot b.$

Neka je a duljina stranice kvadrata. Tada kvadrat ima:

♥ opseg $O = 4 \cdot a$

♥ površinu $P_2 = a^2.$

Duljina stranice kvadrata istog opsega O je $a = \frac{O}{4}$ pa njegova površina iznosi:

$$P_2 = a^2 \;\Rightarrow\; P_2 = \left(\frac{O}{4}\right)^2.$$

Za dokaz tvrdnje potrebna je nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \;/^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a \cdot b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\cdot(a+b)}{2\cdot 2}\right)^2 \geq a\cdot b \Rightarrow \left(\frac{2\cdot a+2\cdot b}{4}\right)^2 \geq a\cdot b \Rightarrow [\,O = 2\cdot a + 2\cdot b\,] \Rightarrow \left(\frac{O}{4}\right)^2 \geq a\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_2 = \left(\frac{O}{4}\right)^2 \\ P_1 = a\cdot b \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 \geq P_1. \blacksquare$$

Dokaz 133

Dokaži ako je x > 0, y > 0 i x + y = 1, onda vrijedi $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9.$

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj:

$$a^2 \geq 0 \;,\; a \in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Množenje nejednakosti negativnim brojem:

$$a \geq b \;,\; c < 0 \;\Rightarrow\; a\cdot c \leq b\cdot c.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \geq b \;,\; c > 0 \;\Rightarrow\; a\cdot c \geq b\cdot c.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \geq b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a + c \geq b + c.$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \geq b \;,\; c > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a\cdot c}{b\cdot d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

▶

Polazimo od istinite nejednakosti:

$$(2\cdot x - 1)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 \geq 0 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -4\cdot x^2 + 4\cdot x - 1 \leq 0 \;\Rightarrow\; -4\cdot x^2 + 4\cdot x \leq 1 \;\Rightarrow\; 4\cdot x - 4\cdot x^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 4\cdot x\cdot(1-x) \leq 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x+y=1 \;\Rightarrow\; y=1-x\end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot x\cdot y\le 1 \Rightarrow 1\ge 4\cdot x\cdot y \Rightarrow 1\ge 4\cdot x\cdot y \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ge 8\cdot x\cdot y \Rightarrow 2\ge 8\cdot x\cdot y \;/+\,x\cdot y \Rightarrow 2+x\cdot y\ge 8\cdot x\cdot y+x\cdot y \Rightarrow 2+x\cdot y\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+1+x\cdot y\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x+y=1\end{array}\right] \Rightarrow x+y+1+x\cdot y\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{array}\right] \Rightarrow (x+1)+(x\cdot y+y)\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow (x+1)+y\cdot(x+1)\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot(1+y)\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow (x+1)\cdot(y+1)\ge 9\cdot x\cdot y \Rightarrow (x+1)\cdot(y+1)\ge 9\cdot x\cdot y \;/\cdot \frac{1}{x\cdot y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)\cdot(y+1)}{x\cdot y}\ge 9 \Rightarrow \frac{x+1}{x}\cdot\frac{y+1}{y}\ge 9 \Rightarrow \left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y}{y}+\frac{1}{y}\right)\ge 9 \Rightarrow \left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y}{y}+\frac{1}{y}\right)\ge 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9. \;\blacksquare$$

Dokaz 134

Točka P polovište je obiju dužina: dužine $\overline{AB}$ i dužine $\overline{CD}$. Dokaži da je $|AC| = |BD|$.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

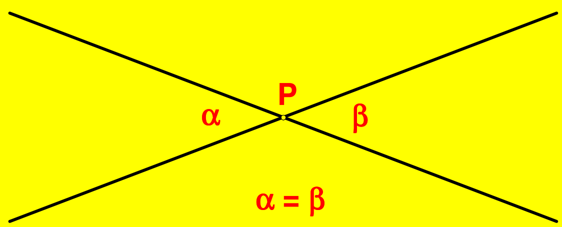
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

Polovište dužine je točka dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.

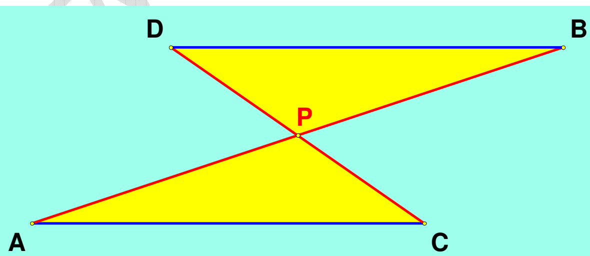
Ako je točka T polovište dužine $\overline{AB}$ vrijedi:

$$|AP| = |PB| .$$

Vršni kutovi



▶



Sa slika vidi se:

$$|AP| = |PB| \ , \ |CP| = |PD| \ , \ \angle CPA = \angle DPB$$

Uočimo da su trokuti ΔACP i ΔBDP sukladni po S – K – S poučku o sukladnosti trokuta ($|AP| = |PB|$, $|CP| = |PD|$, $\angle CPA = \angle DPB$).

Prema tome je

$$|AC| = |BD| . \ \blacksquare$$

Dokaz 135

Dokaži tvrdnju: $a^2+b^2=1\ ,\ c^2+d^2=1\ \Rightarrow\ |a\cdot c-b\cdot d|\le 1.$

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj:

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a\ge b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}\ge\frac{b}{c}.$$

Dijeljenje nejednakosti negativnim brojem:

$$a\ge b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}\le\frac{b}{c}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x,\ x\ge 0\\-x,\ x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|x|\le a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ -a\le x\le a.$$

Množenje jednakosti:

$$a=b\ ,\ c=d\ \Rightarrow\ a\cdot c=b\cdot d.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad ,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2}=|a|\ ,\ a\in R.$$

Korjenovanje nejednakosti:

$$0<a\le b\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}.$$

▶

1.inačica

Očito je:

$$\left.\begin{array}{l}(a+c)^2+(b-d)^2\ge 0\\(a-c)^2+(b+d)^2\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2+2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot d+d^2\ge 0\\a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2+2\cdot b\cdot d+d^2\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot a\cdot c-2\cdot b\cdot d\ge 0\\a^2+b^2+c^2+d^2-2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot d\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge 0\\\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{uvjeti}\\a^2+b^2=1\\c^2+d^2=1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1+1+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge 0\\1+1-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge 0\\2-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge -2\\-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge -2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge -2\ /:2\\-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\ge -2\ /:(-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\cdot c-b\cdot d\ge -1\\a\cdot c-b\cdot d\le 1\end{array}\right\}\Rightarrow -1\le a\cdot c-b\cdot d\le 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a\cdot c-b\cdot d|\le 1.\ \blacksquare$$

2.inačica
Pođimo od zadanih uvjeta:

$$\left.\begin{array}{l}a^2+b^2=1\\c^2+d^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{pomnožimo}\\\text{jednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=1\cdot 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\cdot c^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\cdot c^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a^2\cdot c^2-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+b^2\cdot d^2\right)+\left(a^2\cdot d^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+b^2\cdot c^2\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a\cdot c-b\cdot d)^2+(a\cdot d+b\cdot c)^2=1.$$

Budući da je $(a\cdot d+b\cdot c)^2\ge 0,$ slijedi da je

$$(a\cdot c-b\cdot d)^2\le 1\Rightarrow (a\cdot c-b\cdot d)^2\le 1\ /\sqrt{\ }\Rightarrow\sqrt{(a\cdot c-b\cdot d)^2}\le 1\Rightarrow |a\cdot c-b\cdot d|\le 1.\ \blacksquare$$

Dokaz 136

Prva, treća i peta znamenka šesteroznamenkastog prirodnog broja međusobno su jednake, a druga, četvrta i šesta također. Dokaži da je takav broj djeljiv sa 7.

Teorija

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Označimo sa $\overline{ababab}$ šesteroznamenkasti broj sa zadanim svojstvom kojemu je znamenka $a \neq 0$.

Vrijedi zapis:

$$\overline{ababab} = 100\,000 \cdot a + 10\,000 \cdot b + 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 101010 \cdot a + 10101 \cdot b =$$
$$= 7 \cdot (14\,430 \cdot a + 1443 \cdot b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 7. ∎

Dokaz 137

Dokaži da je šesteroznamenkasti prirodni broj, kojemu su prve tri znamenke međusobno jednake i preostale tri također međusobno jednake, djeljiv sa 111.

Teorija

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{aaabbb}$ šesteroznamenkasti broj sa zadanim svojstvom kojemu je znamenka $a \neq 0$.

Vrijedi zapis:

$$\overline{aaabbb} = 100\,000 \cdot a + 10\,000 \cdot a + 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot b + b = 111\,000 \cdot a + 111 \cdot b = 111 \cdot (1000 \cdot a + b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 111. ■

Dokaz 138

Dokaži da je četveroznamenkasti broj kojemu je prva znamenka jednaka četvrtoj, a druga trećoj nužno djeljiv sa 11.

Teorija

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{abba}$ četveroznamenkasti broj sa zadanim svojstvom kojemu je znamenka $a \neq 0$.
Vrijedi zapis:

$$\overline{abba} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot b + a = 1001 \cdot a + 110 \cdot b = 11 \cdot (91 \cdot a + 10 \cdot b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 11. ■

Dokaz 139

Zadana je kružnica k i točka T izvan nje. Iz točke T povučene su tangente na k i neka one dodiruju k u točkama D_1 i D_2. Dokaži da je $|TD_1| = |TD_2|$.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Tangenta je pravac koji dodiruje krivulju (kružnicu) u jednoj točki.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

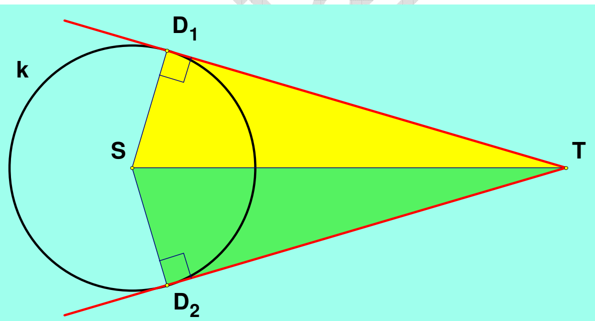
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Sa slike vidi se:

$$|SD_1| = |SD_2| \ , \ \angle SD_1T = \angle SD_2T = 90^\circ .$$

Neka su točke D_1 i D_2 dirališta kružnice i tangenata. Uočimo da su trokuti ΔSD_1T i ΔSD_2T sukladni po S – S – K poučku o sukladnosti trokuta ($|ST|$ im je zajednička stranica, $|SD_1| = |SD_2|$, $\angle SD_1T = \angle SD_2T = 90^\circ$).

Prema tome je

$$|TD_1| = |TD_2| . \ \blacksquare$$

Dokaz 140

Dokaži da za sve $a, b \in R$ ***vrijedi*** $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|.$

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \ge 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|x|^2 = x^2.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2} = |a| \ , \ a \in R.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ , \ a \ge 0.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

▶

1.inačica

$$\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{|a|^2+|b|^2+2 \cdot |a| \cdot |b|} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{\left(|a|+|b|\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le \left||a|+|b|\right| \Rightarrow \left[\, |a|+|b| \ge 0 \,\right] \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|. \ \blacksquare$$

2.inačica

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|a|^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{|b|^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot|a|+\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot|b|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1\\ \dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|.\ \blacksquare$$