Dokaz 141

Dokaži da za svako $x \in R$ ***vrijedi jednakost*** $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|x|^2=x^2.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

▶

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\frac{(x+|x|)^2}{2^2}+\frac{(x-|x|)^2}{2^2}=$$

$$=\frac{x^2+2\cdot x\cdot|x|+|x|^2}{4}+\frac{x^2-2\cdot x\cdot|x|+|x|^2}{4}=$$

$$=\frac{x^2+2\cdot x\cdot|x|+|x|^2+x^2-2\cdot x\cdot|x|+|x|^2}{4}=\frac{x^2+2\cdot x\cdot|x|+|x|^2+x^2-2\cdot x\cdot|x|+|x|^2}{4}=$$

$$=\frac{x^2+|x|^2+x^2+|x|^2}{4}=\frac{2\cdot x^2+2\cdot|x|^2}{4}=\frac{2\cdot\left(x^2+|x|^2\right)}{4}=\frac{2\cdot\left(x^2+|x|^2\right)}{4}=$$

$$= \frac{x^2 + |x|^2}{2} = \left[|x|^2 = x^2 \right] = \frac{x^2 + x^2}{2} = \frac{2 \cdot x^2}{2} = \frac{2 \cdot x^2}{2} = x^2 . \blacksquare$$

Dokaz 142

Dokaži da u trokutu vrijedi $a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$, ***gdje su a, b, c duljine stranica, v_a, v_b, v_c duljine visina trokuta.***

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Svojstvo tranzitivnosti relacije "biti jednako":

$$a = b \text{ i } b = c \Rightarrow a = c.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \text{ ili } \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:
a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Ako postoji n jednostavnih omjera, takvih da je

$$a_1 : a_2 = k_1$$
$$a_2 : a_3 = k_2$$
$$a_3 : a_4 = k_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} : a_n = k_{n-1}$$

produženi omjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots : a_{n-1} : a_n.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad , \quad c : d = k$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

▶

Označimo površinu trokuta slovom P. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{a\cdot v_a}{2} \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2} \\ P=\frac{c\cdot v_c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\frac{a\cdot v_a}{2} \;/\cdot 2 \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2} \;/\cdot 2 \\ P=\frac{c\cdot v_c}{2} \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot P=a\cdot v_a \\ 2\cdot P=b\cdot v_b \\ 2\cdot P=c\cdot v_c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot v_a=2\cdot P \\ b\cdot v_b=2\cdot P \\ c\cdot v_c=2\cdot P \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot v_a=b\cdot v_b \\ b\cdot v_b=c\cdot v_c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a:b=v_b:v_a \\ b:c=v_c:v_b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a:b=\left(v_b\cdot v_c\right):\left(v_a\cdot v_c\right) \\ b:c=\left(v_c\cdot v_a\right):\left(v_b\cdot v_a\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a:b=\left(v_b\cdot v_c\right):\left(v_a\cdot v_c\right) \\ b:c=\left(v_c\cdot v_a\right):\left(v_b\cdot v_a\right) \end{array}\right\} \Rightarrow a:b:c=\left(v_b\cdot v_c\right):\left(v_a\cdot v_c\right):\left(v_b\cdot v_a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a:b:c=\left(v_b\cdot v_c\cdot\frac{1}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}\right):\left(v_a\cdot v_c\cdot\frac{1}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}\right):\left(v_b\cdot v_a\cdot\frac{1}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a:b:c=\left(v_b\cdot v_c\cdot\frac{1}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}\right):\left(v_a\cdot v_c\cdot\frac{1}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}\right):\left(v_b\cdot v_a\cdot\frac{1}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a:b:c=\frac{1}{v_a}:\frac{1}{v_b}:\frac{1}{v_c}. \blacksquare$$

Dokaz 143

Dokaži ako je $a+b+c=0,$ tada vrijedi $a\cdot(a+c)=b\cdot(b+c).$

Teorija

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Oduzimanje jednakosti:

$$a=b \text{ i } c=d \;\Rightarrow\; a-c=b-d.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

Iz a + b + c = 0 slijedi:

♥ $a+b+c=0 \;\Rightarrow\; a+c=-b$

♥ $a+b+c=0 \;\Rightarrow\; b+c=-a.$

Tada vrijedi:

$$a\cdot(a+c)=b\cdot(b+c) \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a+c=-b \\ b+c=-a \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; a\cdot(-b)=b\cdot(-a) \;\Rightarrow\; -a\cdot b=-a\cdot b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -a\cdot b=-a\cdot b \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; a\cdot b=a\cdot b. \;\blacksquare$$

2.inačica

Iz a + b + c = 0 slijedi:

♥ $a+b+c=0 \;\Rightarrow\; a+c=-b$

♥ $a+b+c=0 \;\Rightarrow\; b+c=-a.$

Sada je:

$$a\cdot(a+c)=\left[\,a+c=-b\,\right]=a\cdot(-b)=-a\cdot b=(-a)\cdot b=\left[\,b+c=-a\,\right]=(b+c)\cdot b=b\cdot(b+c). \;\blacksquare$$

3.inačica

Polazimo od uvjeta a + b + c = 0.

$$\left.\begin{matrix} a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b+c=0 \;/\cdot a \\ a+b+c=0 \;/\cdot b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2+b\cdot a+c\cdot a=0 \\ a\cdot b+b^2+c\cdot b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2+a\cdot b+a\cdot c=0 \\ a\cdot b+b^2+b\cdot c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzimamo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow\; a^2+a\cdot b+a\cdot c-\left(a\cdot b+b^2+b\cdot c\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^2+a\cdot b+a\cdot c-a\cdot b-b^2-b\cdot c=0 \;\Rightarrow\; a^2+a\cdot b+a\cdot c-a\cdot b-b^2-b\cdot c=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^2+a\cdot c-b^2-b\cdot c=0 \;\Rightarrow\; a^2+a\cdot c=b^2+b\cdot c \;\Rightarrow\; a\cdot(a+c)=b\cdot(b+c). \;\blacksquare$$

Dokaz 144

Dokaži ako je $a+b+c=1,\ a,\ b,\ c>0,$ tada vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.$

Teorija

Aritmetička sredina je veća od geometrijske sredine:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Dijeljenje n – tih korijena:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad,\quad\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Svojstvo razlomaka i njihovih recipročnih razlomaka:

$$\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}\leq\frac{d}{c}\ ,\ a,\ b,\ c,\ d>0.$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a\geq b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\geq b\cdot c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{n}{1}=n.$$

▶

Iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine za tri broja $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{c}$ slijedi:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{a\cdot b\cdot c}}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\\ \frac{3}{a+b+c}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}}\end{array}\right]\Rightarrow\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\frac{3}{a+b+c}=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b+c=1\end{array}\right]\Rightarrow\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\frac{3}{1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq 3\ \Rightarrow\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq 3\ /\cdot 3\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.\ \blacksquare$$

Dokaz 145

Dokaži da za a, b > 0 vrijedi $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$ tada vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.$

Teorija

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Dijeljenje drugih korijena:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad,\quad\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a\quad,\quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Definicija nejednakosti:

$$a\geq b\ \Rightarrow\ a-b\geq 0\quad,\quad a<b\ \Rightarrow\ a-b<0.$$

Korjenovanje nejednakosti:

$$a\geq b>0\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\geq\sqrt{b}.$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a\geq b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\geq b\cdot c.$$

▶

Zadanu nejednakost preoblikujemo u nejednakost čija je istinitost očita.

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \Rightarrow\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\ /\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ \Rightarrow\ a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}\geq\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\cdot\sqrt{a}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}\geq a\cdot\sqrt{b}+b\cdot\sqrt{a}\ \Rightarrow\ a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}-a\cdot\sqrt{b}-b\cdot\sqrt{a}\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left(a\cdot\sqrt{a}-b\cdot\sqrt{a}\right)+\left(b\cdot\sqrt{b}-a\cdot\sqrt{b}\right)\geq 0\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\cdot(a-b)-\sqrt{b}\cdot(a-b)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a-b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\geq 0.$$

Uvjerimo se u istinitost nejednakosti:

♥ ako je $a\geq b$

$$a-b\geq 0\text{ i }\sqrt{a}-\sqrt{b}\geq\ \Rightarrow\ (a-b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\geq 0$$

♥ ako je $a<b$

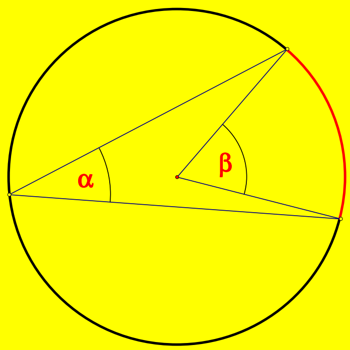
$a-b<0$ i $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0 \Rightarrow (a-b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)>0.$ ■

Dokaz 146

Dokaži da je kut između tetive i tangente kružnice, kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive, jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Teorija

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva.
Tangenta je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Svaki kut s vrhom na kružnici čiji krakovi sijeku kružnicu zovemo obodni kut.
Svi su obodni kutovi nad danim lukom kružnice sukladni.
Svaki kut s vrhom u središtu kružnice čiji krakovi sijeku kružnicu zovemo središnji kut.
Središnji kut nad proizvoljnim kružnim lukom dva je puta veći od obodnog kuta nad istim lukom.
Središnji kut β nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu α nad tim istim lukom.



$$\beta = 2 \cdot \alpha \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \beta$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Na temelju odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kraci trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Za jednakokračan trokut vrijedi:

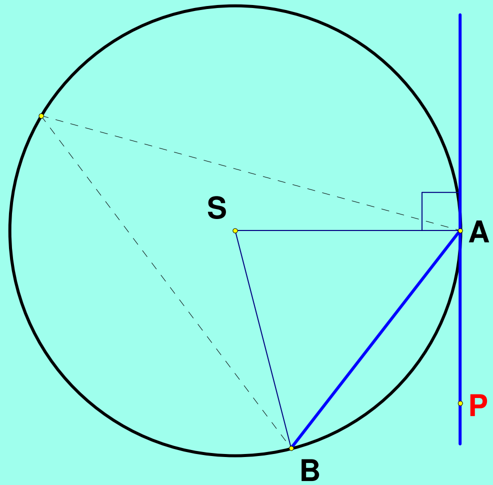
$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Na tangenti odaberemo bilo koju točku P. Tada je



$$\left.\begin{array}{l}\angle PAS = \angle PAB + \angle BAS \\ \angle PAS = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle PAB + \angle BAS = 90^\circ \Rightarrow \angle PAB = 90^\circ - \angle BAS.$$

Trokut ABS je jednakokračan $\left(|SA| = |SB|\right)$ pa za njegove kutove vrijedi:

$$2 \cdot \angle BAS + \angle ASB = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot \angle BAS = 180^\circ - \angle ASB \Rightarrow 2 \cdot \angle BAS = 180^\circ - \angle ASB \; /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BAS = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle ASB.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l}\angle PAB = 90^\circ - \angle BAS \\ \angle BAS = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle ASB\end{array}\right\} \Rightarrow \angle PAB = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle ASB\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PAB = 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle ASB \Rightarrow \angle PAB = 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle ASB \Rightarrow \angle PAB = \frac{1}{2} \cdot \angle ASB.$$

Kut $\angle PAB$ jednak je polovici središnjeg kuta $\angle ASB$, dakle, kut $\angle PAB$ jednak je obodnom kutu nad lukom $\overset{\frown}{BA}$. ■

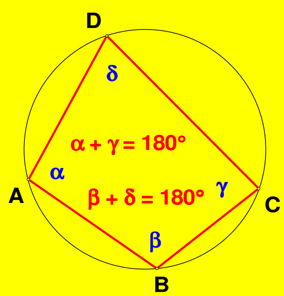
Dokaz 147

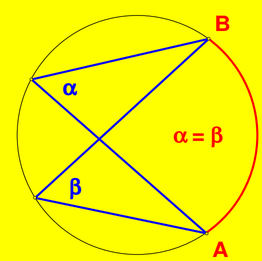
Iz točke T izvan kružnice k povučene su dvije sekante AB i CD; $A, B, C, D \in k$. ***Dokaži da vrijedi*** $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

Teorija

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Sekanta je pravac koji zadanu krivulju ili plohu siječe barem u dvjema točkama i u njima nije tangenta.
Tangenta je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Svaki kut s vrhom na kružnici čiji krakovi sijeku kružnicu zovemo obodni kut.
Svi su obodni kutovi nad danim lukom kružnice sukladni.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Tetivni četverokut je četverokut:

♥ čiji su vrhovi točke jedne kružnice,
♥ kojem se može opisati kružnica,
♥ čije su stranice tetive jedne kružnice,
♥ kojem je zbroj nasuprotnih kutova jednak 180°.





Dva su kuta suplementarna (suplementna) ako je njihov zbroj jednak 180^0 (još kažemo da su ti kutovi sukuti).
Tranzitivnost relacije ' = ':

$$a = b \text{ i } b = c \;\Rightarrow\; a = c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k   i   c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

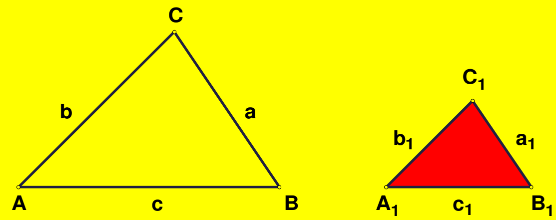
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

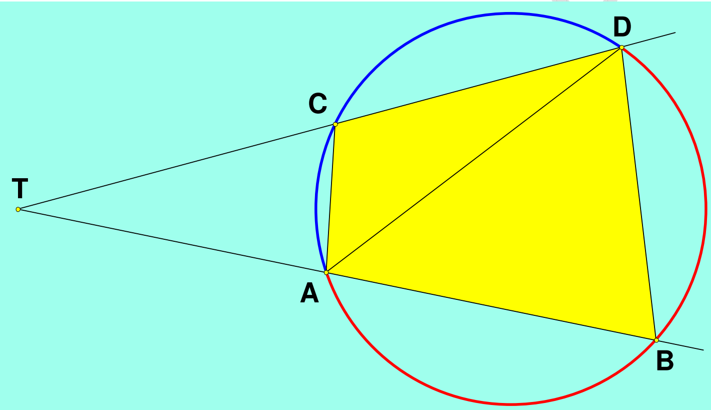
$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Primijetimo da je kut $\angle ABD$ obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{DA}$, a kut $\angle DCA$ obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{AD}$.
Budući da je četverokut ABCD tetivni, vrijedi:

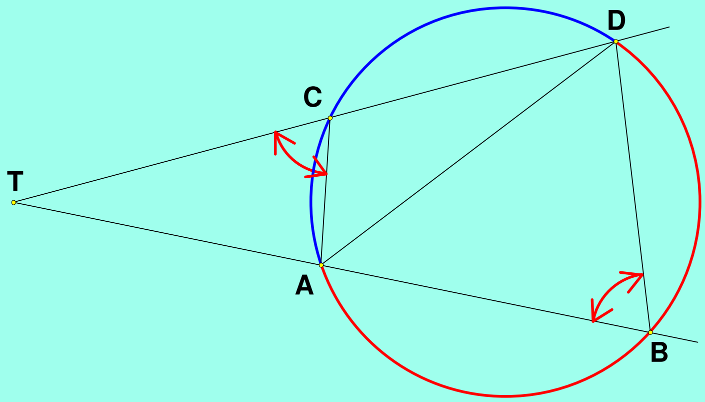
$$\angle ABD + \angle DCA = 180^\circ \Rightarrow \angle DCA = 180^\circ - \angle ABD.$$

Kut $\angle ACT$ je suplement kuta $\angle DCA$.

$$\angle ACT + \angle DCA = 180^\circ \Rightarrow \angle DCA = 180^\circ - \angle ACT.$$

Iz sustava jednakosti dobije se:

$$\left.\begin{aligned} \angle DCA &= 180^\circ - \angle ABD \\ \angle DCA &= 180^\circ - \angle ACT \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle ABD = \angle ACT.$$



Uz to je kut $\angle DTB$ zajednički za oba trokuta ΔTAC i ΔTBD pa prema prvom poučku sličnosti (K – K) trokuti su slični,

$$\Delta TAC \sim \Delta TBD.$$

Iz razmjera slijedi:

$$|TA| : |TC| = |TD| : |TB| \Rightarrow |TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|. \ \blacksquare$$

Dokaz 148

Iz točke T izvan kružnice k povučene je tangenta TD, $D \in k,$ ***na tu kružnicu i sekanta AB;*** $A, B \in k.$ ***Dokaži da je*** $|TD|^2 = |TA| \cdot |TB|.$

Teorija

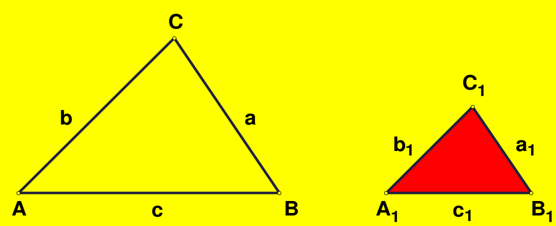
Kut između tetive i tangente kružnice, kojoj je dirałište u krajnjoj točki tetive, jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.
Sekanta je pravac koji zadanu krivulju ili plohu siječe barem u dvjema točkama i u njima nije tangenta.
Tangenta je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Svaki kut s vrhom na kružnici čiji krakovi sijeku kružnicu zovemo obodni kut.
Svi su obodni kutovi nad danim lukom kružnice sukladni.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

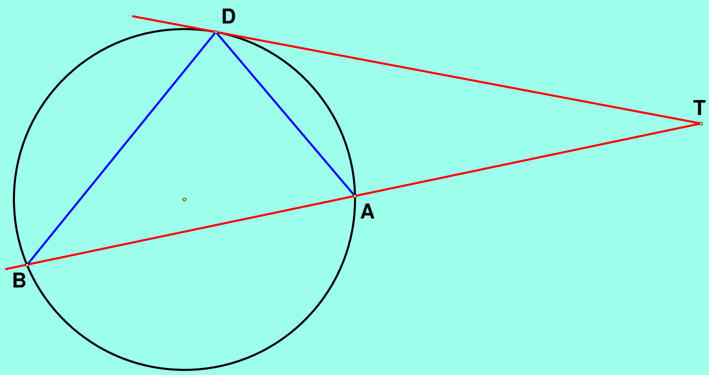
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

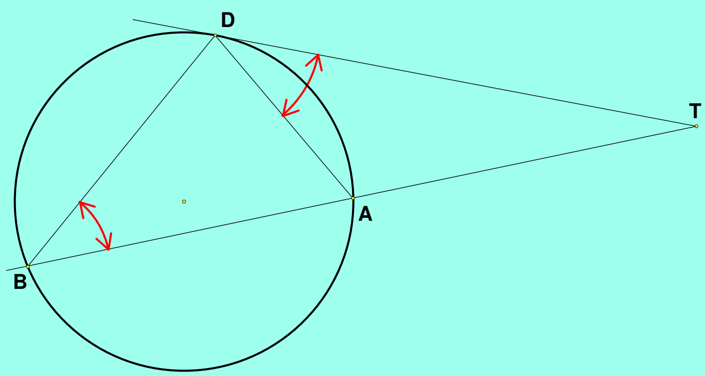
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m .$$

▶



Primijetimo da je krajnja točka D tetive $\overline{DA}$ ujedno dirałište tangente pa je kut $\angle TDA$ jednak obodnom kutu nad tetivom $\overline{DA}$.

$$\angle TDA = \angle DBA.$$



Kut $\angle BTD$ zajednički je kut za trokute ΔATD i ΔBTD pa su prema prvom poučku sličnosti (K – K) ti trokuti slični,

$$\Delta ATD \sim \Delta BTD.$$

Iz razmjera slijedi:

$$|TA| : |TD| = |TD| : |TB| \Rightarrow |TA| \cdot |TB| = |TD|^2 . \blacksquare$$

Dokaz 149

Dokaži da se oko pravokutnika može opisati kružnica.

Teorija

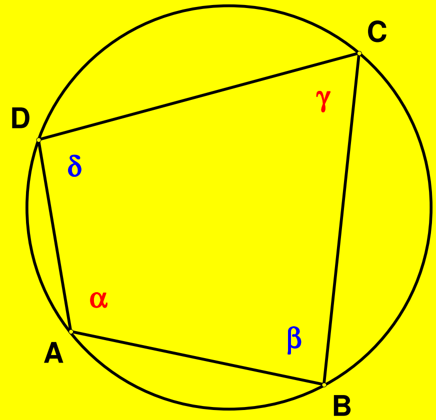
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

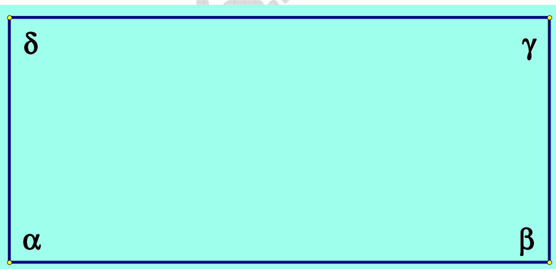
Četverokut je tetivni ako i samo ako je zbroj nasuprotnih kutova jednak 180º. U tetivnom četverokutu vrijedi:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \ , \ \beta + \delta = 180^\circ .$$



Četverokut kojem se može opisati kružnica naziva se tetivni četverokut.

▶



Budući da su kutovi pravokutnika $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$, slijedi:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \ , \ \beta + \delta = 180^\circ .$$

Pravokutnik je tetivni četverokut pa se oko njega može opisati kružnica. ■

Dokaz 150

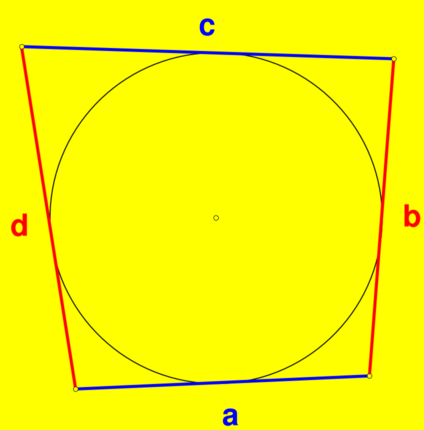
Dokaži da se rombu može upisati kružnica.

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Romb je paralelogram koji ima 2 para paralelnih stranica.

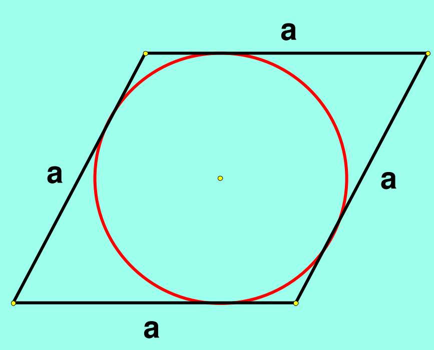
- ♥ ima dva para usporednih (paralelnih) stranica
- ♥ nasuprotne stranice su jednake duljine
- ♥ ima sve četiri stranice jednake duljine
- ♥ dijagonale se raspolavljaju
- ♥ dijagonale su međusobno okomite
- ♥ dijagonale su simetrale kutova
- ♥ suprotni kutovi su jednaki
- ♥ kutovi uz svaku stranicu suplementni su
- ♥ može se upisati kružnica

Četverokut kojemu sve četiri stranice diraju jednu kružnicu naziva se tangencijalni četverokut.
Četverokut je tangencijalni ako i samo ako su zbrojevi duljina suprotnih stranica međusobno jednaki.



$$a + c = b + d.$$

▶



Stranice romba su: a, a, a, a pa su zbrojevi duljina nasuprotnih stranica jednaki.

$$2 \cdot a = 2 \cdot a.$$

Romb je tangencijalni četverokut. ■

Dokaz 151

Ako je $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = p^2$, $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = q^2$ te $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = p \cdot q$, ***onda je*** $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n = p : q$. ***Dokaži!***

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj:

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R \quad , \quad a^2 + b^2 = 0 \ \Rightarrow \ a = b = 0.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 .$$

Zbrajanje jednakosti:

$$a = b \ , \ c = d \ \Rightarrow \ a + c = b + d.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = p^2 \\ b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = q^2 \\ a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = p \cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = p^2 \ / \cdot q^2 \\ b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = q^2 \ / \cdot p^2 \\ a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = p \cdot q \ / \cdot (-2 \cdot p \cdot q) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1^2 \cdot q^2 + a_2^2 \cdot q^2 + \ldots + a_n^2 \cdot q^2 = p^2 \cdot q^2 \\ b_1^2 \cdot p^2 + b_2^2 \cdot p^2 + \ldots + b_n^2 \cdot p^2 = q^2 \cdot p^2 \\ -2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot p \cdot q - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot p \cdot q - \ldots - 2 \cdot a_n \cdot b_n \cdot p \cdot q = -2 \cdot p^2 \cdot q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 \cdot q^2 + a_2^2 \cdot q^2 + \ldots + a_n^2 \cdot q^2 + b_1^2 \cdot p^2 + b_2^2 \cdot p^2 + \ldots + b_n^2 \cdot p^2 -$$

$$-2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot p \cdot q - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot p \cdot q - \ldots - 2 \cdot a_n \cdot b_n \cdot p \cdot q = p^2 \cdot q^2 + p^2 \cdot q^2 - 2 \cdot p^2 \cdot q^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 \cdot q^2 + a_2^2 \cdot q^2 + \ldots + a_n^2 \cdot q^2 + b_1^2 \cdot p^2 + b_2^2 \cdot p^2 + \ldots + b_n^2 \cdot p^2 -$$

$$-2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot p \cdot q - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot p \cdot q - \ldots - 2 \cdot a_n \cdot b_n \cdot p \cdot q = p^2 \cdot q^2 + p^2 \cdot q^2 - 2 \cdot p^2 \cdot q^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 \cdot q^2 + a_2^2 \cdot q^2 + \ldots + a_n^2 \cdot q^2 + b_1^2 \cdot p^2 + b_2^2 \cdot p^2 + \ldots + b_n^2 \cdot p^2 -$$

$$-2\cdot a_1\cdot b_1\cdot p\cdot q-2\cdot a_2\cdot b_2\cdot p\cdot q-\ldots-2\cdot a_n\cdot b_n\cdot p\cdot q=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a_1^2\cdot q^2-2\cdot a_1\cdot b_1\cdot p\cdot q+b_1^2\cdot p^2\right)+\left(a_2^2\cdot q^2-2\cdot a_2\cdot b_2\cdot p\cdot q+b_2^2\cdot p^2\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(a_n^2\cdot q^2-2\cdot a_n\cdot b_n\cdot p\cdot q+b_n^2\cdot p^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a_1\cdot q-b_1\cdot p\right)^2+\left(a_2\cdot q-b_2\cdot p\right)^2+\ldots+\left(a_n\cdot q-b_n\cdot p\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1\cdot q-b_1\cdot p=0 \\ a_2\cdot q-b_2\cdot p=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\cdot q-b_n\cdot p=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1\cdot q=b_1\cdot p \\ a_2\cdot q=b_2\cdot p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\cdot q=b_n\cdot p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1\cdot q=b_1\cdot p \;/\cdot\dfrac{1}{b_1\cdot q} \\ a_2\cdot q=b_2\cdot p \;/\cdot\dfrac{1}{b_2\cdot q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\cdot q=b_n\cdot p \;/\cdot\dfrac{1}{b_n\cdot q} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{p}{q} \\ \dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{p}{q} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{p}{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1:b_1=p:q \\ a_2:b_2=p:q \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n:b_n=p:q \end{array}\right\} \Rightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\ldots a_n:b_n=p:q. \;\blacksquare$$

Dokaz 152

Dokaži da je $\left|z\right|^2 = z \cdot \overline{z}.$

Teorija

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ , \ a \geq 0.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kvadrat imaginarne jedinice:

$$i^2 = -1 \quad , \quad -1 = i^2.$$

▶

Neka je $z = x + y \cdot i.$ Tada je:

♥ $\overline{z} = x - y \cdot i.$

♥ $\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Dalje slijedi:

$$\left|z\right|^2 = z \cdot \overline{z} \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - (y \cdot i)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - y^2 \cdot (-1) \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2. \ \blacksquare$$

Dokaz 153

Dokaži da $\sqrt{2}+\sqrt{17}$ nije racionalan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b}$, $a \in Z$, $b \in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

$$\sqrt{2} \notin Q.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a \geq 0.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \qquad , \qquad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

▶

Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{17}=r$ i da je $r \in Q$. Tada je:

$$\sqrt{2}+\sqrt{17}=r \Rightarrow \sqrt{17}=r-\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{kvadriramo} \\ \text{jednakost}\end{array}\right] \Rightarrow \sqrt{17}=r-\sqrt{2}\ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{17}\right)^2=\left(r-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 17=r^2-2\cdot r\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 17=r^2-2\cdot r\cdot\sqrt{2}+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot r\cdot\sqrt{2}=r^2+2-17 \Rightarrow 2\cdot r\cdot\sqrt{2}=r^2-15 \Rightarrow 2\cdot r\cdot\sqrt{2}=r^2-15\ /\cdot\frac{1}{2\cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{r^2-15}{2\cdot r}.$$

Desna strana ove jednakosti je racionalan broj, što bi značilo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To je kontradikcija jer je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Dakle, $\sqrt{2}+\sqrt{17}$ je iracionalan broj. ∎

Dokaz 154

Dokaži da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m=2\cdot k+1\ ,\ k\in N.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m=2\cdot k\ ,\ k\in N.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Relativno prosti brojevi su prirodni brojevi koji nemaju zajedničkih djelitelja (osim jedinice). Npr. brojevi 4 i 13.

Brojevi a i b su relativno prosti ako je njihov najveći zajednički djelitelj jednak 1, tj. brojevi a i b nemaju zajedničkih faktora.

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a\in Z,\ b\in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\geq 0.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Skup racionalnih brojeva označavamo slovom Q.

▶

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\sqrt{3}$ racionalan broj,

$$\sqrt{3} \in Q.$$

Tada možemo pisati

$$\frac{m}{n} = \sqrt{3},$$

gdje su m i n prirodni brojevi i pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ skraćen do kraja. Dakle, prirodni brojevi m i n nemaju zajedničkih faktora osim broja 1, oni su relativno prosti. Kvadriranjem i sređivanje dobije se:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{3} \ /^2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 3 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 3 \ / \cdot n^2 \Rightarrow m^2 = 3 \cdot n^2.$$

Na desnoj strani je broj djeljiv s 3 pa bi i m^2 bio djeljiv s 3, a onda i broj m mora biti djeljiv s 3. To znači da je m moguće napisati kao

$$m = 3 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Odatle opet izlazi

$$m^2 = 3 \cdot n^2 \Rightarrow [\, m = 3 \cdot k \,] \Rightarrow (3 \cdot k)^2 = 3 \cdot n^2 \Rightarrow 9 \cdot k^2 = 3 \cdot n^2 \Rightarrow 9 \cdot k^2 = 3 \cdot n^2 \ /: 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot k^2 = n^2.$$

Zaključujemo da bi n^2 morao biti djeljiv s 3, a onda i broj n mora biti djeljiv s 3. Međutim, brojevi m i n po pretpostavci su relativno prosti pa nije moguće da oba budu djeljiva s 3 (ne mogu imati zajedničke faktore). Pretpostavka da je $\sqrt{3}$ racionalan broj vodi do proturječja pa $\sqrt{3}$ mora biti iracionalan broj. ■

Dokaz 155

Dokaži da se broj $\frac{a+c}{b+d}$ $(a,\ b,\ c,\ d \in N)$ ***nalazi po svojoj vrijednosti između brojeva*** $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$.

Teorija

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Ako je broj a veći od broja b, tada vrijedi:

$$a>b \;\Rightarrow\; a-b>0.$$

▶

Pretpostavimo li da je $\frac{a+c}{b+d}$ između brojeva $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ razlike:

♥ $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}$

♥ $\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}$

moraju biti suprotnih predznaka. Provjerimo!

♥ $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{a\cdot(b+d)-b\cdot(a+c)}{b\cdot(b+d)}=\frac{a\cdot b+a\cdot d-b\cdot a-b\cdot c}{b\cdot(b+d)}=\frac{a\cdot b+a\cdot d-b\cdot a-b\cdot c}{b\cdot(b+d)}=$

$$=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot(b+d)}$$

♥ $\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{c\cdot(b+d)-d\cdot(a+c)}{d\cdot(b+d)}=\frac{c\cdot b+c\cdot d-d\cdot a-d\cdot c}{d\cdot(b+d)}=\frac{b\cdot c+c\cdot d-a\cdot d-d\cdot c}{d\cdot(b+d)}=$

$$=\frac{b\cdot c-a\cdot d}{d\cdot(b+d)}=\frac{-(a\cdot d-b\cdot c)}{d\cdot(b+d)}=-\frac{a\cdot d-b\cdot c}{d\cdot(b+d)}.\ ■$$

Dokaz 156

Dokaži da je $\log_2 3$ ***iracionalan broj.***

Teorija

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$
Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1\ ,\ k \in N.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k\ ,\ k \in N.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**
Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.
Relativno prosti brojevi su prirodni brojevi koji nemaju zajedničkih djelitelja (osim jedinice). Npr. brojevi 4 i 13.
Brojevi a i b su relativno prosti ako je njihov najveći zajednički djelitelj jednak 1, tj. brojevi a i b nemaju zajedničkih faktora.

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a \in Z,\ b \in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n.$$

Potenciranje jednakosti:

$$a = b \;\Rightarrow\; a^n = b^n.$$

▶

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\log_2 3$ racionalan broj,

$$\log_2 3 \in Q.$$

Tada možemo pisati

$$\frac{m}{n} = \log_2 3,$$

gdje su m i n prirodni brojevi i pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ skraćen do kraja. Dakle, prirodni brojevi m i n nemaju zajedničkih faktora osim broja 1, oni su relativno prosti. Dalje slijedi:

$$\log_2 3 = \frac{m}{n} \Rightarrow 2^{\frac{m}{n}} = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{potenciramo} \\ \text{brojem } n \end{bmatrix} \Rightarrow 2^{\frac{m}{n}} = 3 \;/^{n} \Rightarrow \left(2^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = 3^{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{m} = 3^{n}.$$

To nije istina. Broj 2^m je paran broj, a broj 3^n je neparan. Dakle, $\log_2 3$ nije racionalan, već iracionalan broj. ■

Dokaz 157

Dokaži da je broj bridova svake piramide paran.

Teorija

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze.
Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

▶

Piramida kojoj je osnovka (baza) n – terokut (mnogokut) ima na osnovki n bridova, a još n bočnih bridova povezuje njezin vrh s vrhovima baze. Piramida ima ukupno

$$n + n = 2 \cdot n$$

bridova. ■

Dokaz 158

Dokaži da je broj bridova bilo koje prizme djeljiv sa 3.

Teorija

Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim poligonima (mnogokutima) i paralelogramima. Osnovke (baze) prizme su poligoni, a paralelogrami čine pobočje. Ako je osnovka pravilan poligon i ako je prizma uspravna, ona je pravilna. Prizma kojoj je pobočni brid okomit na osnovku zove se uspravna. Duljina visine prizme jednaka je udaljenosti između ravnina u kojima leže osnovke.

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

▶

Prizma kojoj je osnovka (baza) n – terokut (mnogokut) ima na svakoj osnovki n bridova. a još n bočnih bridova povezuje vrhove donje i gornje osnovke. Prizma ima ukupno

$$n + n + n = 3 \cdot n$$

bridova. ■

Dokaz 159

Dokaži da su dijagonale pravokutnika međusobno jednakih duljina.

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \;,\; b = b_1 \;,\; c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

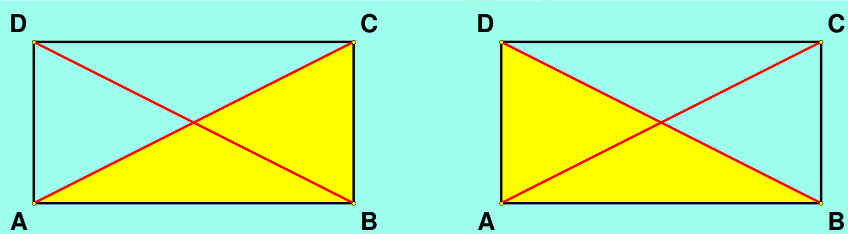
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Uočimo da su trokuti ΔABC i ΔABD sukladni po S – K – S poučku o sukladnosti trokuta ($\overline{AB}$ im je zajednička stranica, $|BC| = |AD|$, $\angle ABC = \angle DAB = 90^\circ$).

Prema tome je

$$|AC| = |BD| . \;\blacksquare$$

Dokaz 160

Dokaži da je visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta geometrijska sredina odsječaka p i q što ih njezino nožište određuje na hipotenuzi, tj. da je $v = \sqrt{p \cdot q}$.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

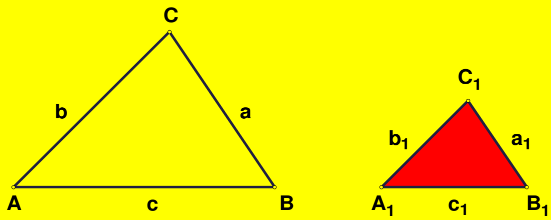
Geometrijska sredina
Geometrijska sredina je statistički pojam koji za neki skup označava n – ti korijen umnoška svih članova skupa. Za a > 0 i b > 0 geometrijska sredina iznosi:

$$G_2 = \sqrt{a \cdot b}.$$

Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \; , \; \beta = \beta_1 \; , \; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1 .$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m .$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad , \quad c : d = k$$

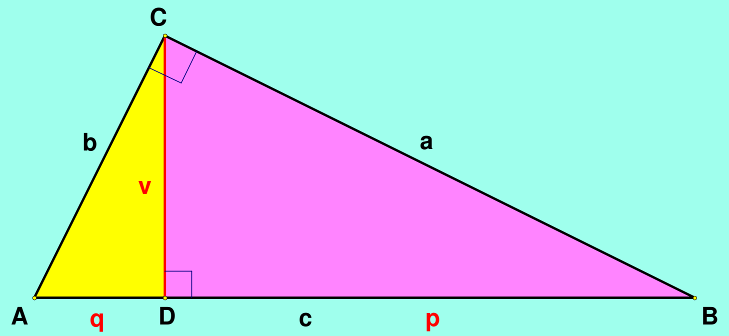
tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |DC| = v \;,\; |AD| = q \;,\; |DB| = p$$

$$|AD| + |DB| = |AB| \;,\; q + p = c$$

1.inačica

Neka je trokut ABC pravokutan i neka nožište D visine spuštene iz vrha C dijeli hipotenuzu na dijelove duljina p i q. Tada iz pravokutnih trokuta ΔCDB i ΔADC pomoću Pitagorina poučka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} |BC|^2 = |DB|^2 + |DC|^2 \\ |AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = p^2 + v^2 \\ b^2 = q^2 + v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = p^2 + v^2 + q^2 + v^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{trokut ABC je pravokutan} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = p^2 + q^2 + 2 \cdot v^2 \Rightarrow c^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 - 2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot v^2 \Rightarrow$$

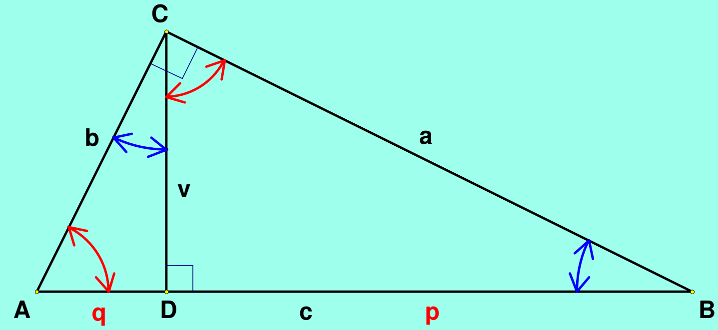
$$\Rightarrow c^2 = \left(p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2\right) - 2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot v^2 \Rightarrow c^2 = (p+q)^2 - 2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\, p + q = c \,] \Rightarrow c^2 = c^2 - 2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot v^2 \Rightarrow c^2 = c^2 - 2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -2 \cdot p \cdot q + 2 \cdot v^2 \Rightarrow -2 \cdot v^2 = -2 \cdot p \cdot q \Rightarrow -2 \cdot v^2 = -2 \cdot p \cdot q \;/ : (-2) \Rightarrow v^2 = p \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = p \cdot q \;/ \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{p \cdot q}. \;\blacksquare$$

2.inačica



Trokuti ΔADC i ΔDBC su slični po K – K poučku o sličnosti trokuta ($\angle CAD = \angle BCD$, ($\angle DCA = \angle DBC$) pa vrijedi razmjer

$$|DC| : |AD| = |DB| : |DC| \Rightarrow v : q = p : v \Rightarrow v^2 = p \cdot q \Rightarrow v^2 = p \cdot q \; / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{p \cdot q}. \; \blacksquare$$