Dokaz 161

Dokaži ako je $a \in R,$ ***onda je*** $-1 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} < 1.$

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \leq b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \leq b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c \leq b + c \quad , \quad a < b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c < b + c.$$

▶

Budući da je $a^2 + 1 > 0,$ slijedi:

$$-1 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} < 1 \ \Rightarrow \ -1 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} < 1 \ / \cdot \left(a^2 + 1\right) \ \Rightarrow \ -1 \cdot \left(a^2 + 1\right) \leq a^2 - 1 < a^2 + 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -a^2 - 1 \leq a^2 - 1 < a^2 + 1 \ \Rightarrow \ -a^2 - 1 \leq a^2 - 1 < a^2 + 1 \ / + 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -a^2 - 1 + 1 \leq a^2 - 1 + 1 < a^2 + 1 + 1 \ \Rightarrow \ -a^2 - 1 + 1 \leq a^2 - 1 + 1 < a^2 + 2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -a^2 \leq a^2 < a^2 + 2.$$

Zadana nejednakost preoblikovana je u ekvivalentnu nejednakost koja je očita. ■

Dokaz 162

Trokut ABC jednakokračan je i vrijedi $|AD| = |EB|$ pri čemu su točke E i D na stranici $\overline{AB}$.
Dokaži da su trokuti ΔADC i ΔEBC sukladni.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Trokute dijelimo:

♥ prema odnosu među duljinama stranica

$$\begin{cases} \text{raznostraničan trokut} \\ \text{jednakokračan trokut} \\ \text{jednakostraničan trokut} \end{cases}$$

♥ prema kutovima

$$\begin{cases} \text{šiljastokutan trokut} \\ \text{tupokutan trokut} \\ \text{pravokutan trokut.} \end{cases}$$

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

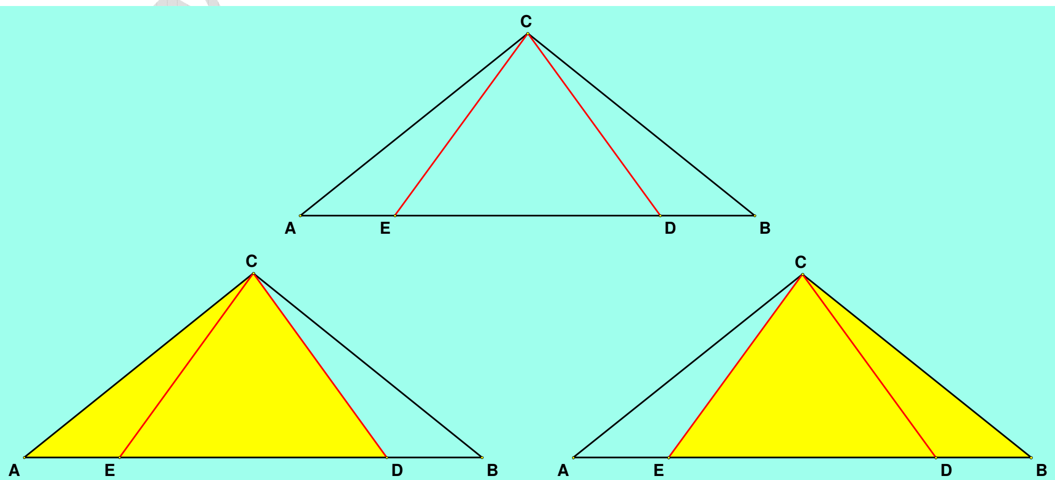
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Pretpostavili smo da je trokut ABC jednakokračan, a to znači

$$\left| AC \right| = \left| BC \right| \ , \ \angle CAB = \angle ABC.$$

Uočimo da su trokuti ΔADC i ΔEBC sukladni po S – K – S poučku o sukladnosti trokuta ($\left| AC \right| = \left| BC \right| \ , \ \left| AD \right| = \left| EB \right| \ , \ \angle CAB = \angle ABC.$). ■

Dokaz 163

Dokaži da je funkcija g definirana kao $g(x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}$, $f:\langle -a, a\rangle \to R$ ***parna funkcija.***

Teorija

Za funkciju $f: D_f \to R$ kažemo da je parna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi

$$f(-x)=f(x).$$

▶

$$g(-x)=\frac{f(-(-x))+f(-x)}{2} \Rightarrow g(-x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \Rightarrow g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(-x)=g(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 164

Dokaži da je funkcija h definirana kao $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, $f:\langle -a,\ a\rangle \to R$ ***neparna funkcija.***

Teorija

Za funkciju $f: D_f \to R$ kažemo da je neparna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi

$$f(-x)=-f(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} \Rightarrow h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2} \Rightarrow h(-x)=-\frac{f(x)-f(-x)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(-x)=-h(x). \ ■$$

Dokaz 165

Dokaži da se svaka funkcija $f : R \to R$ može prikazati kao zbroj parne i neparne funkcije.

Teorija

Za funkciju $f : D_f \to R$ kažemo da je parna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi

$$f(-x) = f(x).$$

Za funkciju $f : D_f \to R$ kažemo da je neparna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

▶

U dokazu 163 i 164 pokazali smo da je funkcija $g(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$ parna, a funkcija $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ neparna. Prikažimo proizvoljnu funkciju f na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{f(-x) + f(x) + f(x) - f(-x)}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + h(x)$ i g je parna, a h neparna funkcija. ■

Dokaz 166

Dokaži ako je P period od funkcija f i g, onda je P period i od funkcija $\alpha \cdot f + \beta \cdot g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$***,***

$(g(x) \neq 0,\ \forall x \in R)$ ***gdje su α i β bilo koji realni brojevi.***

Teorija

Periodična funkcija

Ako za funkciju $f : D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P) = f(x).$$

za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija.

Pozitivni brojevi P za koje vrijedi $f(x+P) = f(x)$ nazivaju se periodi funkcije. Ako postoji najmanji takav pozitivni broj P, tada se P naziva temeljni period.

▶

♥ $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x+P) = \alpha \cdot f(x+P) + \beta \cdot g(x+P) =$

$$= \left[\begin{array}{l} f \text{ je periodična funkcija, } f(x+P) = f(x) \\ g \text{ je periodična funkcija, } g(x+P) = g(x) \end{array} \right] = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x). \blacksquare$$

♥ $(f \cdot g)(x+P) = f(x+P) \cdot g(x+P) =$

$$= \left[\begin{array}{l} f \text{ je periodična funkcija, } f(x+P) = f(x) \\ g \text{ je periodična funkcija, } g(x+P) = g(x) \end{array} \right] = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x). \blacksquare$$

♥ $\left(\frac{f}{g}\right)(x+P) = \frac{f(x+P)}{g(x+P)} =$

$$= \left[\begin{array}{l} f \text{ je periodična funkcija, } f(x+P) = f(x) \\ g \text{ je periodična funkcija, } g(x+P) = g(x) \end{array} \right] = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x). \blacksquare$$

Dokaz 167

Dokaži ako je P period od f, tada je i n · P period od f, $n \in N$.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Periodična funkcija

Ako za funkciju $f : D_f \rightarrow R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x + P) = f(x).$$

za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija.

Pozitivni brojevi P za koje vrijedi $f(x + P) = f(x)$ nazivaju se periodi funkcije. Ako postoji najmanji takav pozitivni broj P, tada se P naziva temeljni period.

▶

Za n = 1 tvrdnja je očita.

$$f(x + P) = f(x).$$

Neka je n ≥ 2. Sada slijedi:

$$f(x + n \cdot P) = f(x + n \cdot P - P + P) = f(x + (n-1) \cdot P + P) = f((x + (n-1) \cdot P) + P) =$$

$$= [\ P \text{ je period }] = f(x + (n-1) \cdot P) = f(x + n \cdot P - P) = f(x + n \cdot P - 2 \cdot P + P) =$$

$$= f(x + (n-2) \cdot P + P) = f((x + (n-2) \cdot P) + P) = [\ P \text{ je period }] = f(x + (n-2) \cdot P) =$$

$$= f(x + n \cdot P - 2 \cdot P) = f(x + n \cdot P - 3 \cdot P + P) = f(x + (n-3) \cdot P + P) = f((x + (n-3) \cdot P) + P) =$$

$$= [\ P \text{ je period }] = f(x + (n-3) \cdot P) = \begin{bmatrix} \text{nakon konačno mnogo} \\ \text{ovakvih koraka} \end{bmatrix} =$$

$$= f(x + 2 \cdot P) = f(x + P + P) = f((x + P) + P) = [\ P \text{ je period }] = f(x + P) = f(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 168

Dokaži identitet $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$

Teorija

Zakon asocijacije za zbrajanje:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

$$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2 \cdot (a+b) \cdot c + c^2 =$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c. \ \blacksquare$$

Dokaz 169

Dokaži identitet

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot c + 2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c + 2\cdot b\cdot d + 2\cdot c\cdot d.$$

Teorija

Zakon asocijacije za zbrajanje:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

▶

$$(a+b+c+d)^2 = ((a+b)+(c+d))^2 = (a+b)^2 + 2\cdot(a+b)\cdot(c+d) + (c+d)^2 =$$
$$= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 + 2\cdot(a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d) + c^2 + 2\cdot c\cdot d + d^2 =$$
$$= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 + 2\cdot a\cdot c + 2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c + 2\cdot b\cdot d + c^2 + 2\cdot c\cdot d + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot c + 2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c + 2\cdot b\cdot d + 2\cdot c\cdot d. \blacksquare$$

Dokaz 170

Zadana je dužina $\overline{AB}$ i pravac p okomit na nju. Dokaži da je razlika kvadrata udaljenosti bilo koje točke pravca p do točaka A i B stalna.

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

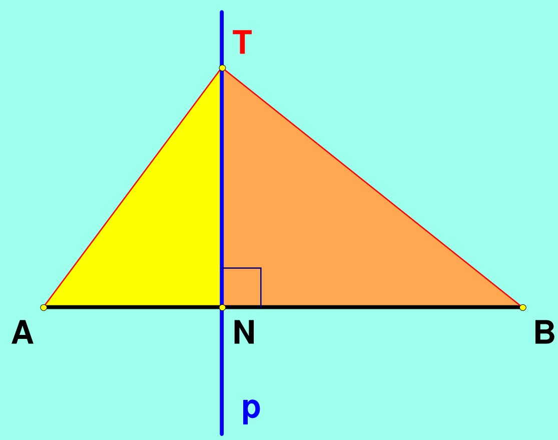
Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Oduzimanje jednakosti:

$$a=b \ , \ c=d \ \Rightarrow \ a-c=b-d.$$

▶



Uočimo pravokutne trokute ΔANT i ΔTNB i uporabimo Pitagorin poučak.

$$\left.\begin{aligned}|AT|^2&=|AN|^2+|NT|^2\\|BT|^2&=|NB|^2+|NT|^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmemo}\\\text{jednakosti}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|^2-|BT|^2=|AN|^2+|NT|^2-\left(|NB|^2+|NT|^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|^2-|BT|^2=|AN|^2+|NT|^2-|NB|^2-|NT|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|^2-|BT|^2=|AN|^2+|NT|^2-|NB|^2-|NT|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|^2-|BT|^2=|AN|^2-|NB|^2.$$

Razlika $|AN|^2-|NB|^2$ stalna je jer su dužina $\overline{AB}$ i pravac p zadani. ■

Dokaz 171

Dokaži da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b}$, $a \in Z$, $b \in N$ zove se racionalan broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

▶

Neka je:

♥ a racionalan broj

♥ b iracionalan broj.

Pretpostavimo da je njihov zbroj racionalan broj.

$$a + b = r, \; r \in Q, \; Q \text{ je skup racionalnih brojeva}.$$

Sada je:

$$a + b = r \;\Rightarrow\; b = r - a.$$

Budući da je razlika racionalnih brojeva racionalan broj, slijedi da je i r – a racionalan broj.

$$r - a \in Q.$$

Dakle, broj b bio bi racionalan, a on to nije. Naša tvrdnja je oborena. ■

Dokaz 172

Dokaži da za kvadratnu funkciju $f : R \to R,\ f(x) = a \cdot x^2$ ***vrijedi***

$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = (\alpha + \beta)^2 \cdot f(x)$.

Teorija

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1 .$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m .$$

▶

1.inačica

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot x)^2 = a \cdot \left((\alpha \cdot x)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot x \cdot \beta \cdot x + (\beta \cdot x)^2 \right) =$$

$$= a \cdot \left(\alpha^2 \cdot x^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot x^2 + \beta^2 \cdot x^2 \right) = a \cdot x^2 \cdot \left(\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2 \right) = a \cdot x^2 \cdot (\alpha + \beta)^2 =$$

$$= (\alpha + \beta)^2 \cdot a \cdot x^2 = \left[f(x) = a \cdot x^2 \right] = (\alpha + \beta)^2 \cdot f(x). \ ■$$

2.inačica

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot x)^2 = a \cdot ((\alpha + \beta) \cdot x)^2 = a \cdot (\alpha + \beta)^2 \cdot x^2 = (\alpha + \beta)^2 \cdot a \cdot x^2 =$$

$$= \left[f(x) = a \cdot x^2 \right] = (\alpha + \beta)^2 \cdot f(x). \ ■$$

Dokaz 173

Dokaži svojstvo operacije kompleksnog konjugiranja: $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}.$

Teorija

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z}=x-y\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Neka su zadani kompleksni brojevi $z=x_1+y_1\cdot i,\ w=x_2+y_2\cdot i.$

Slijedi:

$$\overline{z+w}=\overline{(x_1+y_1\cdot i)+(x_2+y_2\cdot i)}=\overline{(x_1+x_2)+(y_1\cdot i+y_2\cdot i)}=\overline{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\cdot i}=$$

$$=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\cdot i=x_1+x_2-y_1\cdot i-y_2\cdot i=(x_1-y_1\cdot i)+(x_2-y_2\cdot i)=$$

$$=\overline{x_1+y_1\cdot i}+\overline{x_2+y_2\cdot i}=\overline{z}+\overline{w}.\ \blacksquare$$

Dokaz 174

Dokaži svojstvo operacije kompleksnog konjugiranja: $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}.$

Teorija

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z}=x-y\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Neka su zadani kompleksni brojevi $z=x_1+y_1\cdot i,\ w=x_2+y_2\cdot i.$

Slijedi:

$$\overline{z-w}=\overline{(x_1+y_1\cdot i)-(x_2+y_2\cdot i)}=\overline{(x_1-x_2)+(y_1\cdot i-y_2\cdot i)}=\overline{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\cdot i}=$$

$$=(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot i=x_1-x_2-y_1\cdot i+y_2\cdot i=(x_1-y_1\cdot i)-(x_2-y_2\cdot i)=$$

$$=\overline{x_1+y_1\cdot i}-\overline{x_2+y_2\cdot i}=\overline{z}-\overline{w}.\ \blacksquare$$

Dokaz 175

Dokaži svojstvo operacije kompleksnog konjugiranja: $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}.$

Teorija

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \overline{z}=x-y\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Svojstvo potencije:

$$a^{1}=a \quad , \quad a=a^{1}.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^{n}\cdot a^{m}.$$

Kvadrat imaginarne jedinice:

$$i^{2}=-1 \quad , \quad -1=i^{2}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

▶

Neka su zadani kompleksni brojevi $z=x_1+y_1\cdot i,\ w=x_2+y_2\cdot i.$

Slijedi:

$$\overline{z\cdot w}=\overline{(x_1+y_1\cdot i)\cdot(x_2+y_2\cdot i)}=\overline{x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i+y_1\cdot y_2\cdot i^{2}}=$$

$$=\overline{x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i-y_1\cdot y_2}=\overline{(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+(x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i)}=$$

$$=\overline{(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)\cdot i}=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)-(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)\cdot i=$$

$$=x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2-x_1\cdot y_2\cdot i-x_2\cdot y_1\cdot i=x_1\cdot x_2-x_2\cdot y_1\cdot i-y_1\cdot y_2-x_1\cdot y_2\cdot i=$$

$$=x_1\cdot x_2-x_2\cdot y_1\cdot i+y_1\cdot y_2\cdot(-1)-x_1\cdot y_2\cdot i=x_1\cdot x_2-x_2\cdot y_1\cdot i+y_1\cdot y_2\cdot i^{2}-x_1\cdot y_2\cdot i=$$

$$=x_2\cdot(x_1-y_1\cdot i)-y_2\cdot i\cdot(x_1-y_1\cdot i)=(x_1-y_1\cdot i)\cdot(x_2-y_2\cdot i)=\overline{x_1+y_1\cdot i}\cdot\overline{x_2+y_2\cdot i}=\overline{z}\cdot\overline{w}.\ \blacksquare$$

Dokaz 176

Dokaži da je $f\left(2+\sqrt{3}\right)=f\left(2-\sqrt{3}\right)$, ***ako je*** $f(x)=x^{2}-4\cdot x+1.$

Teorija

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}=(a+b)^{2}.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}=(a-b)^{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a.$$

▶

$$f(x)=x^{2}-4\cdot x+1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} f\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2}-4\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+1 \\ f\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}-4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f\left(2+\sqrt{3}\right)=4+4\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^{2}-8-4\cdot\sqrt{3}+1 \\ f\left(2-\sqrt{3}\right)=4-4\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^{2}-8+4\cdot\sqrt{3}+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f\left(2+\sqrt{3}\right)=4+4\cdot\sqrt{3}+3-8-4\cdot\sqrt{3}+1 \\ f\left(2-\sqrt{3}\right)=4-4\cdot\sqrt{3}+3-8+4\cdot\sqrt{3}+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f\left(2+\sqrt{3}\right)=4+4\cdot\sqrt{3}+3-8-4\cdot\sqrt{3}+1 \\ f\left(2-\sqrt{3}\right)=4-4\cdot\sqrt{3}+3-8+4\cdot\sqrt{3}+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f\left(2+\sqrt{3}\right)=0 \\ f\left(2-\sqrt{3}\right)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f\left(2+\sqrt{3}\right)=f\left(2-\sqrt{3}\right). \blacksquare$$

Dokaz 177

Dokaži da je $(10\cdot n+5)^2=100\cdot n\cdot(n+1)+25.$

Teorija

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$(10\cdot n+5)^2=(10\cdot n)^2+2\cdot 10\cdot n\cdot 5+5^2=10^2\cdot n^2+100\cdot n+25=100\cdot n^2+100\cdot n+25=$$
$$=100\cdot n\cdot(n+1)+25. \ ■$$

Dokaz 178

Dokaži da je svaka stranica svakog trokuta manja od polovice opsega tog trokuta.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg:

$$O = a + b + c.$$

Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica.

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c < b + c.$$

▶

♥ $a < b + c \ \Rightarrow \ a < b + c \ / + a \ \Rightarrow \ a + a < a + b + c \ \Rightarrow \ 2 \cdot a < a + b + c \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot a < a + b + c \ / : 2 \ \Rightarrow \ a < \frac{a + b + c}{2}.$$

♥ $b < a + c \ \Rightarrow \ b < a + c \ / + b \ \Rightarrow \ b + b < a + b + c \ \Rightarrow \ 2 \cdot b < a + b + c \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot b < a + b + c \ / : 2 \ \Rightarrow \ b < \frac{a + b + c}{2}.$$

♥ $c < a + b \ \Rightarrow \ c < a + b \ / + c \ \Rightarrow \ c + c < a + b + c \ \Rightarrow \ 2 \cdot c < a + b + c \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot c < a + b + c \ / : 2 \ \Rightarrow \ c < \frac{a + b + c}{2}. \ ■$$

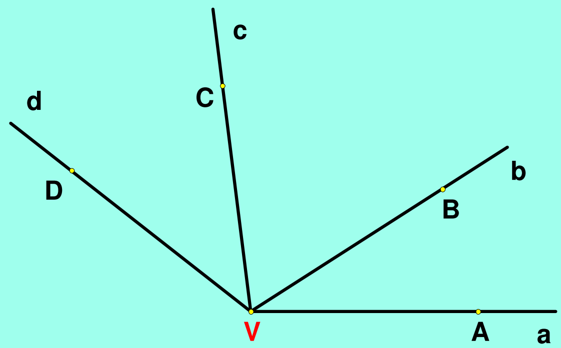
Dokaz 179

Polupravci a, b, c i d istog pramena s vrhom V određuju više kutova tako da je $\angle AVC = \angle BVD.$
Dokaži da je tad i $\angle AVB = \angle CVD.$

Teorija

Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima koji se sijeku. Krakovi kuta su polupravci koji omeđuju kut.
Kut je dio ravnine omeđen dvjema zrakama (kraci kuta) koje imaju zajednički početak (vrh kuta).

▶



$$\angle AVB = \angle AVC - \angle BVC = \left[\ \angle AVC = \angle BVD\ \right] = \angle BVD - \angle BVC = \angle CVD.\ \blacksquare$$

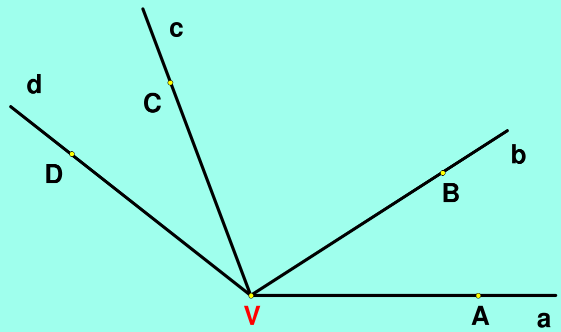
Dokaz 180

Polupravci a, b, c i d istog pramena s vrhom V određuju više kutova tako da je $\angle AVB = \angle CVD$.
Dokaži da je tad i $\angle AVC = \angle BVD$.

Teorija

Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima koji se sijeku. Krakovi kuta su polupravci koji omeđuju kut.
Kut je dio ravnine omeđen dvjema zrakama (kraci kuta) koje imaju zajednički početak (vrh kuta).

▶



$$\angle AVC = \angle AVB + \angle BVC = \left[\ \angle AVB = \angle CVD\ \right] = \angle CVD + \angle BVC = \angle BVD.\ \blacksquare$$