Dokaz 181

Dokaži ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$, tada vrijedi

$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right).$

Teorija

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Vièteove formule

Za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ vrijedi

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

▶

Množenjem faktora i uporabom Vièteovih formula dobivamo:

$$a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=a\cdot\left(x^2-x\cdot x_2-x\cdot x_1+x_1\cdot x_2\right)=a\cdot\left(x^2-\left(x_1+x_2\right)\cdot x+x_1\cdot x_2\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{bmatrix}=a\cdot\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x+\frac{c}{a}\right)=a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)=a\cdot x^2+b\cdot x+c. \;\blacksquare$$

Dokaz 182

Dokaži da za kompleksne brojeve z_1 i z_2 vrijedi $\left|z_1 \cdot z_2\right| = \left|z_1\right| \cdot \left|z_2\right|.$

Teorija

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Kvadrat imaginarne jedinice:

$$i^2 = -1 \quad , \quad -1 = i^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \ , \ a, b \geq 0.$$

▶

Neka su $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i, \ z_2 = x_2 + y_2 \cdot i.$

1.inačica

Izračunajmo $\left|z_1 \cdot z_2\right|.$

$$\left|z_1 \cdot z_2\right| = \left|(x_1 + y_1\cdot i)\cdot(x_2 + y_2\cdot i)\right| = \left|x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\cdot i + x_2\cdot y_1\cdot i + y_1\cdot y_2\cdot i^2\right| =$$

$$= \left|x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\cdot i + x_2\cdot y_1\cdot i + y_1\cdot y_2\cdot(-1)\right| = \left|x_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2\cdot i + x_2\cdot y_1\cdot i - y_1\cdot y_2\right| =$$

$$= \left|(x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2) + (x_1\cdot y_2\cdot i + x_2\cdot y_1\cdot i)\right| = \left|(x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2) + (x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1)\cdot i\right| =$$

$$= \sqrt{(x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2)^2 + (x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(x_1\cdot x_2\right)^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2+\left(y_1\cdot y_2\right)^2+\left(x_1\cdot y_2\right)^2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot x_2\cdot y_1+\left(x_2\cdot y_1\right)^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot x_2\cdot y_1+x_2^2\cdot y_1^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot x_2\cdot y_1+x_2^2\cdot y_1^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+x_2^2\cdot y_1^2}.$$

Izračunajmo $|z_1|\cdot|z_2|$.

$$|z_1|\cdot|z_2|=|x_1+y_1\cdot i|\cdot|x_2+y_2\cdot i|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\cdot\left(x_2^2+y_2^2\right)}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+y_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot y_2^2}=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+x_2^2\cdot y_1^2}.$$

Očito je da vrijedi:

$$\left.\begin{aligned}|z_1\cdot z_2|&=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+x_2^2\cdot y_1^2}\\ |z_1|\cdot|z_2|&=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+x_2^2\cdot y_1^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.\ \blacksquare$$

2.inačica

$$|z_1\cdot z_2|=\left|\left(x_1+y_1\cdot i\right)\cdot\left(x_2+y_2\cdot i\right)\right|=\left|x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i+y_1\cdot y_2\cdot i^2\right|=$$
$$=\left|x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i+y_1\cdot y_2\cdot(-1)\right|=\left|x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i-y_1\cdot y_2\right|=$$
$$=\left|\left(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2\right)+\left(x_1\cdot y_2\cdot i+x_2\cdot y_1\cdot i\right)\right|=\left|\left(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2\right)+\left(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1\right)\cdot i\right|=$$
$$=\sqrt{\left(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2\right)^2+\left(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(x_1\cdot x_2\right)^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2+\left(y_1\cdot y_2\right)^2+\left(x_1\cdot y_2\right)^2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot x_2\cdot y_1+\left(x_2\cdot y_1\right)^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot x_2\cdot y_1+x_2^2\cdot y_1^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+2\cdot x_1\cdot y_2\cdot x_2\cdot y_1+x_2^2\cdot y_1^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+x_2^2\cdot y_1^2}=\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{array}\right]=$$
$$=\sqrt{\left(x_1^2\cdot x_2^2+x_2^2\cdot y_1^2\right)+\left(y_1^2\cdot y_2^2+x_1^2\cdot y_2^2\right)}=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\cdot x_2^2+\left(y_1^2+x_1^2\right)\cdot y_2^2}=$$
$$=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\cdot x_2^2+\left(x_1^2+y_1^2\right)\cdot y_2^2}=$$
$$=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\cdot\left(x_2^2+y_2^2\right)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|z_1|\cdot|z_2|.\ \blacksquare$$

Dokaz 183

Dokaži da je ploština kruga čiji je promjer hipotenuza pravokutnog trokuta jednaka zbroju ploština krugova čiji su promjeri katete tog trokuta.

Teorija

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

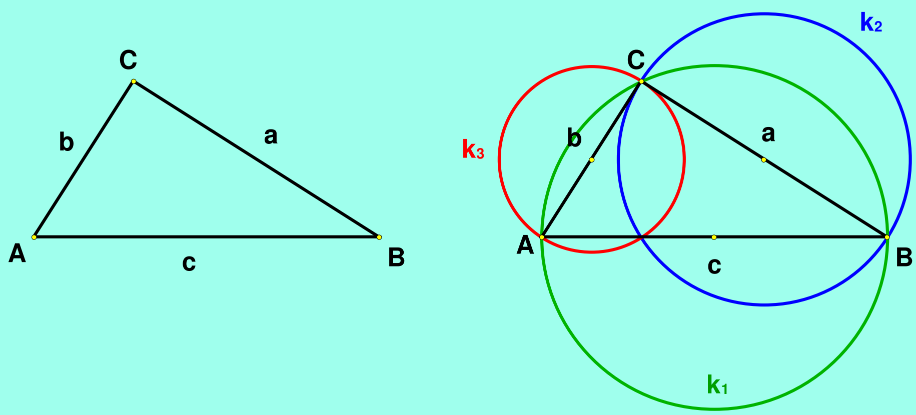
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi.$$

▶



Ploštine krugova k_1, k_2 i k_3 redom iznose:

$$P_1=\left(\frac{c}{2}\right)^2\cdot\pi \quad , \quad P_2=\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi \quad , \quad P_3=\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot\pi.$$

Uočimo pravokutan trokut ABC i uporabimo Pitagorin poučak.

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=a^2+b^2 \;/\cdot\frac{\pi}{4} \Rightarrow c^2\cdot\frac{\pi}{4}=a^2\cdot\frac{\pi}{4}+b^2\cdot\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{4}\cdot\pi=\frac{a^2}{4}\cdot\pi+\frac{b^2}{4}\cdot\pi \Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2\cdot\pi=\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi+\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot\pi \Rightarrow P_1=P_2+P_3. \;\blacksquare$$

Dokaz 184

Dokaži da su dijagonale pravokutnika međusobno jednakih duljina.

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \;,\; b = b_1 \;,\; c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

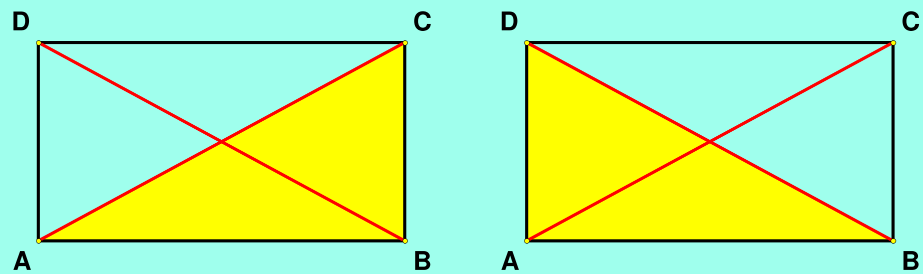
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Pretpostavimo da je ABCD pravokutnik. Pravokutni trokuti ΔABC i ΔABD međusobno su sukladni, drugi poučak o sukladnosti, S – K – S, ($\overline{AB}$ im je zajednička stranica, $|AD| = |BC|$, $\angle BAD = \angle ABC$). Odatle slijedi da je

$$|AC| = |BD| . \quad \blacksquare$$

Dokaz 185

Dokaži da je $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}.$

Teorija

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

Racionalizirat ćemo nazivnike svih razlomaka.

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}-\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}-\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2-5}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{7-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}-\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{-3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}+\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}+\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{5}\Rightarrow\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}=\sqrt{7}+\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}=\sqrt{7}+\sqrt{2} \ \Rightarrow \ 0=0.$$

Dobili smo istinitu jednakost što znači da je tvrdnja valjana. ■

Dokaz 186

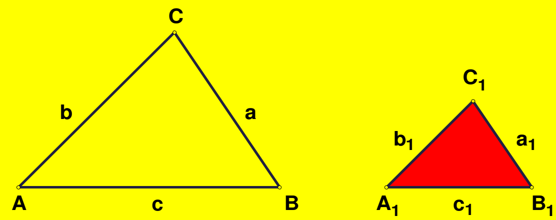
U pravokutnom je trokutu ABC točka D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu. Dokaži da je
$|AC|^2 : |AD| = |BC|^2 : |BD|$.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \;\text{ ili }\; \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:
a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad , \quad c : d = k$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

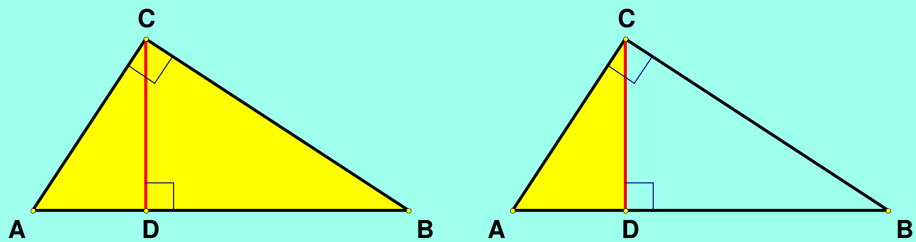
$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

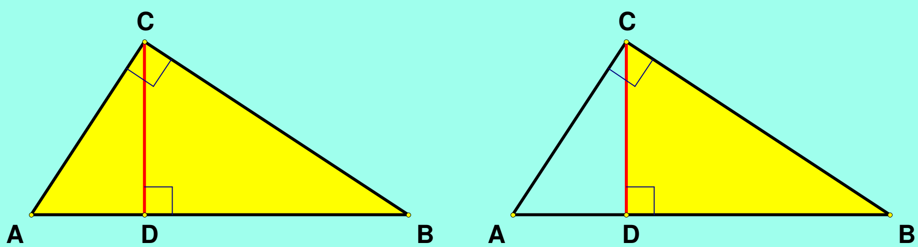
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad , \qquad a^{n+m} = a^n \cdot a^m .$$



Primijetimo da su pravokutni trokutu ΔABC i ΔADC slični (podudaraju se u dva kuta, $\angle CAB = \angle CAD$, $\angle BCA = \angle ADC$, prvi poučak sličnosti K – K) pa su im odgovarajuće stranice razmjerne.

$$|AB| : |AC| = |AC| : |AD| \Rightarrow |AB| \cdot |AD| = |AC|^2 \Rightarrow |AB| \cdot |AD| = |AC|^2 \; / \cdot \frac{1}{|AD|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{|AC|^2}{|AD|} \Rightarrow |AB| = |AC|^2 : |AD| .$$



Primijetimo da su pravokutni trokutu ΔABC i ΔDBC slični (podudaraju se u dva kuta, $\angle ABC = \angle DBC$, $\angle BCA = \angle CDB$, prvi poučak sličnosti K – K) pa su im odgovarajuće stranice razmjerne.

$$|AB| : |BC| = |BC| : |BD| \Rightarrow |AB| \cdot |BD| = |BC|^2 \Rightarrow |AB| \cdot |BD| = |BC|^2 \; / \cdot \frac{1}{|BD|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{|BC|^2}{|BD|} \Rightarrow |AB| = |BC|^2 : |BD| .$$

Sada vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = |AC|^2 : |AD| \\ |AB| = |BC|^2 : |BD| \end{array} \right\} \Rightarrow |AC|^2 : |AD| = |BC|^2 : |BD| . \; \blacksquare$$

Dokaz 187

Dokaži da vrijedi identitet $(a+b+c)\cdot(b\cdot c+c\cdot a+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=(c+a)\cdot(a+b)\cdot(b+c)$.

Teorija

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Za množenje realnih brojeva vrijedi komutativnost.

$$x\cdot y=y\cdot x \text{ za } x,\ y\in R.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

Preoblikujemo lijevu stranu identiteta.

$$(a+b+c)\cdot(b\cdot c+c\cdot a+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+c\cdot a^2+a^2\cdot b+b^2\cdot c+b\cdot c\cdot a+a\cdot b^2+b\cdot c^2+c^2\cdot a+c\cdot a\cdot b-a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2+a\cdot b\cdot c-a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=$$

$$=\left(a\cdot b\cdot c+a^2\cdot b\right)+\left(a\cdot c^2+a^2\cdot c\right)+\left(b^2\cdot c+a\cdot b^2\right)+\left(b\cdot c^2+a\cdot b\cdot c\right)=$$

$$=a\cdot b\cdot(c+a)+a\cdot c\cdot(c+a)+b^2\cdot(c+a)+b\cdot c\cdot(c+a)=(c+a)\cdot\left(a\cdot b+a\cdot c+b^2+b\cdot c\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=(c+a)\cdot\left(\left(a\cdot b+b^2\right)+(a\cdot c+b\cdot c)\right)=(c+a)\cdot\left(b\cdot(a+b)+c\cdot(a+b)\right)=$$

$$=(c+a)\cdot(a+b)\cdot(b+c).\ \blacksquare$$

2.inačica

Preoblikujemo lijevu i desnu stranu identiteta i usporedimo ih.

♥

$$(a+b+c)\cdot(b\cdot c+c\cdot a+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+c\cdot a^2+a^2\cdot b+b^2\cdot c+b\cdot c\cdot a+a\cdot b^2+b\cdot c^2+c^2\cdot a+c\cdot a\cdot b-a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2+a\cdot b\cdot c-a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2=$$

$$=a^2\cdot(b+c)+b^2\cdot(a+c)+c^2\cdot(a+b)+2\cdot a\cdot b\cdot c.$$

♥

$$(c+a)\cdot(a+b)\cdot(b+c)=\left(c\cdot a+c\cdot b+a^{2}+a\cdot b\right)\cdot(b+c)=$$

$$=c\cdot a\cdot b+c^{2}\cdot a+c\cdot b^{2}+c^{2}\cdot b+a^{2}\cdot b+a^{2}\cdot c+a\cdot b^{2}+a\cdot b\cdot c=$$

$$=a\cdot b\cdot c+a\cdot c^{2}+b^{2}\cdot c+b\cdot c^{2}+a^{2}\cdot b+a^{2}\cdot c+a\cdot b^{2}+a\cdot b\cdot c=$$

$$=a^{2}\cdot(b+c)+b^{2}\cdot(a+c)+c^{2}\cdot(a+b)+2\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}(a+b+c)\cdot(b\cdot c+c\cdot a+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=a^{2}\cdot(b+c)+b^{2}\cdot(a+c)+c^{2}\cdot(a+b)+2\cdot a\cdot b\cdot c\\(c+a)\cdot(a+b)\cdot(b+c)=a^{2}\cdot(b+c)+b^{2}\cdot(a+c)+c^{2}\cdot(a+b)+2\cdot a\cdot b\cdot c\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a+b+c)\cdot(b\cdot c+c\cdot a+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=(c+a)\cdot(a+b)\cdot(b+c).\ \blacksquare$$

Dokaz 188

Dokaži da za razmjer $a : b = c : d$ ***vrijedi svojstvo*** $(a+b) : b = (c+d) : d$.

Teorija

Svojstvo jednakosti:

$$a = b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c = b + c.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:
a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad , \quad c : d = k$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ / + 1 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} + \frac{1}{1} = \frac{c}{d} + \frac{1}{1} \ \Rightarrow \ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a+b) : b = (c+d) : d. \ ■$$

2.inačica

Svojstvo $(a+b) : b = (c+d) : d$ ekvivalentno je s jednakostima

$$(a+b) : b = (c+d) : d \ \Rightarrow \ (a+b) \cdot d = b \cdot (c+d) \ \Rightarrow \ a \cdot d + b \cdot d = b \cdot c + b \cdot d \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a \cdot d + b \cdot d = b \cdot c + b \cdot d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Jednakost $a \cdot d = b \cdot c$ je istinita zbog razmjera $a : b = c : d$ pa je istinita i jednakost

$$(a+b) : b = (c+d) : d. \ ■$$

Dokaz 189

Dokaži da za razmjer $a : b = c : d$ ***vrijedi svojstvo*** $(a-b) : b = (c-d) : d$.

Teorija

Svojstvo jednakosti:

$$a = b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c = b + c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:
a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad , \quad c : d = k$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ / - 1 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} - \frac{1}{1} = \frac{c}{d} - \frac{1}{1} \ \Rightarrow \ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a-b) : b = (c-d) : d. \ \blacksquare$$

2.inačica

Svojstvo $(a-b) : b = (c-d) : d$ ekvivalentno je s jednakostima

$$(a-b) : b = (c-d) : d \ \Rightarrow \ (a-b) \cdot d = b \cdot (c-d) \ \Rightarrow \ a \cdot d - b \cdot d = b \cdot c - b \cdot d \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a \cdot d - b \cdot d = b \cdot c - b \cdot d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Jednakost $a \cdot d = b \cdot c$ je istinita zbog razmjera $a : b = c : d$ pa je istinita i jednakost

$$(a-b) : b = (c-d) : d. \ \blacksquare$$

Dokaz 190

Dokaži da u pravokutnom trokutu vrijedi $\rho = \frac{a+b-c}{2}$, ***gdje je ρ polumjer upisane kružnice tog trokuta.***

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta dana je izrazom

$$P = \rho \cdot s,$$

gdje je ρ polumjer trokutu upisane kružnice, a s poluopseg trokuta,

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot b}{2},$$

gdje su a i b duljine kateta.

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶

$$\rho=\frac{P}{s}\Rightarrow\rho=\frac{\frac{a\cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}\Rightarrow\rho=\frac{\frac{a\cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}\Rightarrow\rho=\frac{\frac{a\cdot b}{1}}{\frac{a+b+c}{1}}\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b}{a+b+c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{proširimo}\\ \text{razlomak}\end{array}\right]\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b}{a+b+c}\cdot\frac{a+b-c}{a+b-c}\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a+b-c)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{(a+b)^{2}-c^{2}}\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}-c^{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{Pitagorin poučak}\\ a^{2}+b^{2}=c^{2}\\ a^{2}+b^{2}-c^{2}=0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}-c^{2}}\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho=\frac{a\cdot b\cdot(a+b-c)}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow\rho=\frac{a+b-c}{2}.\ \blacksquare$$

Dokaz 191

Dokaži da je $x+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Teorija

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Drugi korijen

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}. \blacksquare$$

Dokaz 192

Dokaži da je $\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}=\sqrt[12]{x^2-y}$ ***ako je*** $\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=\sqrt[4]{x^2-y}$.

Teorija

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{n}{1}=n.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Ako su a i b nenegativni realni brojevi, b ≠ 0, tada za svaki $n\in N$ vrijedi

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\quad,\quad\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad,\quad\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Ako je a pozitivan realan broj, onda vrijedi

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}\ ,\ n,\ r\in N\ ,\ m\in Z.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Drugi korijen

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a\quad,\quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

▶

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}}{1}=\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}}{1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{y}\right)\cdot\left(x-\sqrt{y}\right)}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt[3]{x^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt[3]{x^2-y}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}}=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ \sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=\sqrt[4]{x^2-y}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2-y}}{\sqrt[4]{x^2-y}}=\frac{\sqrt[12]{\left(x^2-y\right)^4}}{\sqrt[12]{\left(x^2-y\right)^3}}=\sqrt[12]{\frac{\left(x^2-y\right)^4}{\left(x^2-y\right)^3}}=\sqrt[12]{\left(x^2-y\right)^1}=\sqrt[12]{x^2-y}. \blacksquare$$

Dokaz 193

Dokaži ako je $r_1 > r_2,\ r_1,\ r_2 \in Q$ ***da je tada*** $r_1 + r > r_2 + r$ za svaki $r \in Q$.

Teorija

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a > b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skup racionalnih brojeva Q

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z,\ b \in N \right\}.$$

Uređaj na Q

Neka su

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \ , \ b,\ d > 0.$$

Kažemo da je

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d > b \cdot c.$$

▶

Neka su:

$$r_1 = \frac{a}{b} \ , \ r_2 = \frac{c}{d} \ , \ r = \frac{e}{f},\ b,\ d,\ f > 0.$$

Iz pretpostavke

$$r_1 > r_2$$

slijedi

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \ \Rightarrow \ a \cdot d > b \cdot c.$$

Nađimo zbrojeve:

♥ $r_1 + r = \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \ \Rightarrow \ r_1 + r = \frac{a \cdot f + b \cdot e}{b \cdot f}$

♥ $r_2 + r = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \ \Rightarrow \ r_2 + r = \frac{c \cdot f + d \cdot e}{d \cdot f}.$

Uporabom pravila o uspoređivanju vrijedi:

$$r_1 + r > r_2 + r \ \Rightarrow \ \frac{a \cdot f + b \cdot e}{b \cdot f} > \frac{c \cdot f + d \cdot e}{d \cdot f} \ \Rightarrow \ (a \cdot f + b \cdot e) \cdot d \cdot f > (c \cdot f + d \cdot e) \cdot b \cdot f \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a \cdot f + b \cdot e) \cdot d \cdot f > (c \cdot f + d \cdot e) \cdot b \cdot f \ \ /: f \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a\cdot f+b\cdot e)\cdot d>(c\cdot f+d\cdot e)\cdot b\ \Rightarrow\ a\cdot f\cdot d+b\cdot e\cdot d>c\cdot f\cdot b+d\cdot e\cdot b\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a\cdot f\cdot d+b\cdot e\cdot d>c\cdot f\cdot b+d\cdot e\cdot b\ \Rightarrow\ a\cdot f\cdot d>c\cdot f\cdot b\ \Rightarrow\ a\cdot f\cdot d>c\cdot f\cdot b\ /:f\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a\cdot d>b\cdot c.$$

To je istinito pa je i početna nejednakost istinita. ■

Dokaz 194

Dokaži ako je $r_1 > r_2,\ r_1, r_2 \in Q$ ***da je tada*** $r_1 \cdot r > r_2 \cdot r$ za svaki $r > 0,\ r \in Q.$

Teorija

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a > b\ ,\ c > 0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Skup racionalnih brojeva Q

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z,\ b \in N \right\}.$$

Uređaj na Q

Neka su

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q\ ,\ b, d > 0.$$

Kažemo da je

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ ako je } a \cdot d > b \cdot c.$$

▶

Neka su:

$$r_1 = \frac{a}{b}\ ,\ r_2 = \frac{c}{d}\ ,\ r = \frac{e}{f},\ b, d, f > 0.$$

Iz pretpostavke

$$r_1 > r_2$$

slijedi

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}\ \Rightarrow\ a \cdot d > b \cdot c.$$

Nađimo umnoške:

♥ $r_1 \cdot r = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\ \Rightarrow\ r_1 \cdot r = \frac{a \cdot e}{b \cdot f}$

♥ $r_2 \cdot r = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\ \Rightarrow\ r_2 \cdot r = \frac{c \cdot e}{d \cdot f}.$

Uporabom pravila o uspoređivanju vrijedi:

$$r_1 \cdot r > r_2 \cdot r\ \Rightarrow\ \frac{a \cdot e}{b \cdot f} > \frac{c \cdot e}{d \cdot f}\ \Rightarrow\ a \cdot e \cdot d \cdot f > c \cdot e \cdot b \cdot f\ \Rightarrow\ a \cdot e \cdot d \cdot f > c \cdot e \cdot b \cdot f\ /\cdot \frac{1}{e \cdot f}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a \cdot d > b \cdot c.$$

To je istinito pa je i početna nejednakost istinita. ■

Dokaz 195

Točke P i S su polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ paralelograma ABCD. Dokaži da je $|DS| = |PB|$.

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

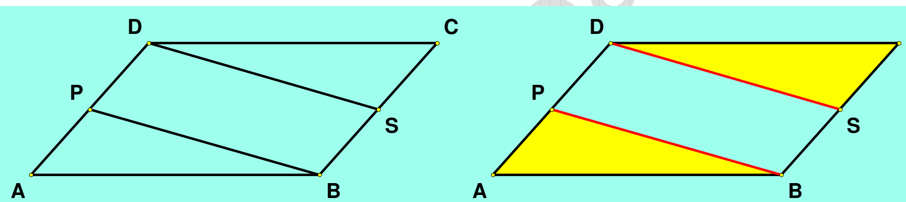
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| \ , \ |AD| = |BC| \ , \ |AP| = |PD| = |BS| = |SC| \ , \ \angle PAB = \angle SCD$$

Pretpostavimo da je ABCD paralelogram, P polovište stranice $\overline{AD}$, a S je polovište stranice $\overline{BC}$.
Uočimo da su trokuti ΔPAB i ΔSCD sukladni (jer je $|AB| = |CD|$, $|AP| = |SC|$, $\angle PAB = \angle SCD$) po drugom poučku o sukladnosti, S – K – S. Odatle slijedi da je $|DS| = |PB|$. ■

Dokaz 196

Dokaži da su vršni kutovi međusobno jednakih mjera.

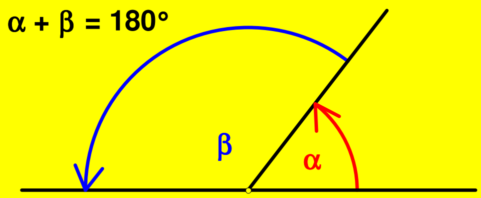
Teorija

Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima koji se sijeku. Krakovi kuta su polupravci koji omeđuju kut.

Kut je dio ravnine omeđen dvjema zrakama (kraci kuta) koje imaju zajednički početak (vrh kuta).

Vršni kutovi su takva dva kuta sa zajedničkim vrhom da su kraci jednoga kuta suprotni polupravci kracima drugoga kuta.

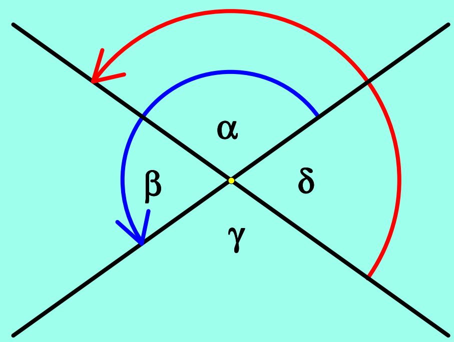
Kutovi koji imaju jedan krak zajednički, a unija drugih dvaju krakova je pravac zovu se sukuti. Njihov zbroj je 180º.



▶

Pretpostavimo da su α i γ vršni kutovi, β i δ su vršni kutovi.

♥

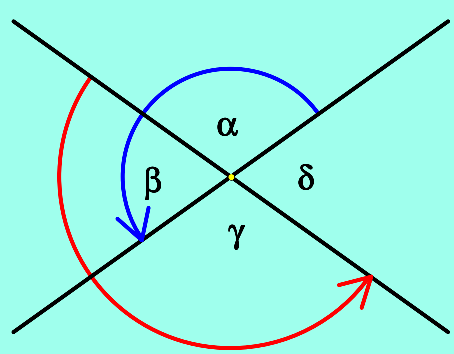


Uočimo da vršni kutovi imaju isti sukut.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ \delta+\alpha=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ \delta+\alpha=180^\circ \;\; /\cdot(-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ -\delta-\alpha=-180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \beta-\delta=0 \Rightarrow \beta=\delta.$$

♥



Uočimo da vršni kutovi imaju isti sukut.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ \beta+\gamma=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ \beta+\gamma=180^\circ \;/\cdot(-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ -\beta-\gamma=-180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha-\gamma=0 \Rightarrow \alpha=\gamma. \blacksquare$$

Dokaz 197

Dokaži da se razlomak $\frac{a}{b} < 1 \left(a,\ b \in N\right)$ ***uveća ako brojnik i nazivnik uvećamo za isti prirodni broj.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\right\}.$$

Broj oblika $\frac{a}{b},\ a \in Z,\ b \in N$ zove se racionalan broj.

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot \left(b+c\right) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot \left(b+c\right).$$

▶

Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{a}{b} < 1 \;\Rightarrow\; a < b \;\Rightarrow\; b - a > 0.$$

Neka je n bilo koji prirodan broj. Imamo redom:

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot \left(a+n\right) - a \cdot \left(b+n\right)}{\left(b+n\right) \cdot b} = \frac{b \cdot a + b \cdot n - a \cdot b - a \cdot n}{\left(b+n\right) \cdot b} = \frac{b \cdot a + b \cdot n - a \cdot b - a \cdot n}{\left(b+n\right) \cdot b} =$$

$$= \frac{b \cdot n - a \cdot n}{\left(b+n\right) \cdot b} = \frac{\left(b-a\right) \cdot n}{\left(b+n\right) \cdot b} = \left[\, b - a > 0 \,\right] = \frac{\left(b-a\right) \cdot n}{\left(b+n\right) \cdot b} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}. \;\blacksquare$$

Dokaz 198

Dokaži da za sve $x \in R$ ***vrijedi*** $f(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \geq 0.$

Teorija

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Neparni broj je cijeli broj koji nije djeljiv s 2, tj. koji pri dijeljenju s 2 ima ostatak 1. Opći je zapis za svaki neparni broj

$$2 \cdot n + 1,$$

gdje je n cijeli broj.
Ako je baza ili osnovica potencije negativan broj, a eksponent neparan broj onda je vrijednost potencije negativan broj.

$$(-a)^{2 \cdot n + 1} = -a^{2 \cdot n + 1}.$$

▶

Promotrimo tri moguća slučaja.
1. slučaj

$$x \leq 0$$

Svaki član polinoma $f(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ je nenegativan pa je i polinom f nenegativan.

$$f(x) \geq 0.$$

2. slučaj

$$0 < x < 1$$

Preoblikujemo polinom.

$$f(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \Rightarrow f(x) = x^{12} + x^4 \cdot (1 - x^5) + (1 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - x^5 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) > 0.$$

3. slučaj

$$x \geq 1$$

Preoblikujemo polinom.

$$f(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \Rightarrow f(x) = x^9 \cdot (x^3 - 1) + x \cdot (x^3 - 1) + 1 \Rightarrow \left[x^3 \geq 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0. \blacksquare$$

Dokaz 199

Dokaži da za realne brojeve $a, b > 0$ ***vrijedi*** $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}.$

Teorija

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a > b > 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ , \ a, b \ge 0.$$

▶

Najprije dokažimo nejednakost $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > a + b.$

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} + b > a + b.$$

Tvrdnja slijedi iz dokazane nejednakosti.

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > a + b \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > a + b \ / \sqrt{\ } \ \Rightarrow \ \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} > \sqrt{a+b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}. \ \blacksquare$$

Dokaz 200

Dokaži da za sve $x,\ y\in R$ ***vrijedi:*** $x^{2}+y^{2}=1\ \Rightarrow\ |x+y|\le\sqrt{2}.$

Teorija

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}=(a-b)^{2}.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\ge b\ ,\ c\in R\ \Rightarrow\ a+c\ge b+c.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}=(a+b)^{2}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x|=x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

$$\sqrt{a^{2}}=|a|.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$0<a\le b\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Tvrdnja slijedi iz očite nejednakosti.

$$(x-y)^{2}\ge 0\ \Rightarrow\ x^{2}-2\cdot x\cdot y+y^{2}\ge 0\ \Rightarrow\ x^{2}+y^{2}\ge 2\cdot x\cdot y\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^{2}+y^{2}\ge 2\cdot x\cdot y\ /+x^{2}+y^{2}\ \Rightarrow\ x^{2}+y^{2}+x^{2}+y^{2}\ge 2\cdot x\cdot y+x^{2}+y^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^{2}+2\cdot y^{2}\ge x^{2}+2\cdot x\cdot y+y^{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(x^{2}+y^{2}\right)\ge(x+y)^{2}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x^{2}+y^{2}=1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot 1\ge(x+y)^{2}\ \Rightarrow\ 2\ge(x+y)^{2}\ \Rightarrow\ (x+y)^{2}\le 2\ \Rightarrow\ (x+y)^{2}\le 2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+y)^{2}}\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ |x+y|\le\sqrt{2}.\ ■$$