Dokaz 21

Dokaži da je kompozicija dviju linearnih funkcija f i g komutativna, tj. da vrijedi $f \circ g = g \circ f$ za svake dvije linearne funkcije f i g.

Teorija

Funkcija $f : R \rightarrow R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C$.

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C$, odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa $g \circ f$. Dakle,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ za sve } a \in A.$$

▶

Neka su zadane dvije linearne funkcije:

$$f(x) = a \cdot x \quad , \quad g(x) = b \cdot x.$$

Tada vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a \cdot g(x) = a \cdot b \cdot x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = b \cdot f(x) = b \cdot a \cdot x = a \cdot b \cdot x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \circ g = g \circ f. \ \blacksquare$$

Dokaz 22

Dokaži da za kompoziciju afinih funkcija općenito ne vrijedi zakon komutativnosti.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x + b,\ a,\ b \in R,\ a \neq 0$ naziva se afina funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C$.

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C$, odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa g ∘ f. Dakle,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ za sve } a \in A.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su zadane dvije afine funkcije:

$$f(x) = a \cdot x + b \quad , \quad g(x) = c \cdot x + d.$$

Tada je:

$$\left.\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a \cdot g(x) + b = a \cdot (c \cdot x + d) + b = a \cdot c \cdot x + a \cdot d + b \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = c \cdot f(x) + d = c \cdot (a \cdot x + b) + d = c \cdot a \cdot x + c \cdot b + d = a \cdot c \cdot x + b \cdot c + d \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f \circ g \neq g \circ f. \ ■$$

Dokaz 23

Dokaži da za svaku linearnu funkciju $f(x)=a\cdot x$ ***vrijedi*** $f(c\cdot x)=c\cdot f(x)$, ***pri čemu je c proizvoljni realni broj.***

Teorija

Funkcija $f: R\to R$ dana pravilom $f(x)=a\cdot x,\ a\in R\setminus\{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Svojstvo komutativnosti:

$$a\cdot b=b\cdot a,\ \text{za sve}\ a,\ b\in R.$$

Svojstvo asocijativnosti:

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,\ \text{za sve}\ a,\ b,\ c\in R.$$

▶

Neka je zadana linearna funkcija:

$$f(x)=a\cdot x.$$

Tada vrijedi:

$$f(c\cdot x)=a\cdot(c\cdot x)=(a\cdot c)\cdot x=(c\cdot a)\cdot x=c\cdot(a\cdot x)=c\cdot f(x).\ \blacksquare$$

Dokaz 24

Dokaži da za linearnu funkciju $f(x) = a \cdot x$ ***općenito vrijedi*** $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka je zadana linearna funkcija:

$$f(x) = a \cdot x.$$

Tada vrijedi:

$$f(x_1 + x_2) = a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2 = f(x_1) + f(x_2). \ \blacksquare$$

Dokaz 25

Dokaži identitet: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a\cdot b.$

Teorija

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Oduzimanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

▶

1.inačica

Slijeve strane obavimo naznačeno kvadriranje pa zatim oduzimanje.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}-\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}-\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{4}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{4}=\frac{4\cdot a\cdot b}{4}=\frac{4\cdot a\cdot b}{4}=a\cdot b. \ \blacksquare$$

2.inačica

Uočimo da je izraz na lijevoj strani razlika kvadrata.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)=\frac{a+b-(a-b)}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=$$

$$=\frac{a+b-a+b}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{a+b-a+b}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{2\cdot b}{2}\cdot\frac{2\cdot a}{2}=\frac{2\cdot b}{2}\cdot\frac{2\cdot a}{2}=b\cdot a=a\cdot b.\ \blacksquare$$

Dokaz 26

Dokaži identitet: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$

Teorija

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

▶

Slijeve strane obavimo naznačeno kvadriranje pa zatim zbrajanje.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}+\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}+\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{2\cdot a^2+2\cdot b^2}{4}=\frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)}{4}=\frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}. \blacksquare$$

Dokaz 27

Dokaži identitet: $\left(k\cdot x+k\cdot y\right)^2=k^2\cdot\left(x+y\right)^2$.

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=\left(a\cdot b\right)^n \quad , \quad \left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=\left(a+b\right)^2.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

▶

1.inačica

$$\left(k\cdot x+k\cdot y\right)^2=\left(k\cdot x\right)^2+2\cdot k\cdot x\cdot k\cdot y+\left(k\cdot y\right)^2=$$

$$=k^2\cdot x^2+2\cdot k^2\cdot x\cdot y+k^2\cdot y^2=k^2\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\right)=k^2\cdot\left(x+y\right)^2. \ \blacksquare$$

2.inačica

$$\left(k\cdot x+k\cdot y\right)^2=\left(k\cdot\left(x+y\right)\right)^2=k^2\cdot\left(x+y\right)^2. \ \blacksquare$$

Dokaz 28

Dokaži da je razlika kvadrata dvaju uzastopnih cijelih brojeva neparan broj.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

▶

1.inačica

Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1.$$

Njihova razlika kvadrata iznosi:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = 2 \cdot n + 1. \ \blacksquare$$

2.inačica

Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1.$$

Njihova razlika kvadrata iznosi:

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n) \cdot (n+1+n) = (n+1-n) \cdot (n+1+n) = 1 \cdot (2 \cdot n + 1) = 2 \cdot n + 1. \ \blacksquare$$

Dokaz 29

Dokaži ako umnošku dvaju uzastopnih cijelih brojeva dodamo veći od njih, dobit ćemo kvadrat većeg broja.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1.$$

Njihovu umnošku dodamo veći od njih:

$$n \cdot (n+1) + (n+1) = (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2. \ ■$$

2.inačica
Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n-1, \ n.$$

Njihovu umnošku dodamo veći od njih:

$$(n-1) \cdot n + n = n \cdot (n-1+1) = n \cdot (n-1+1) = n \cdot n = n^2. \ ■$$

Dokaz 30

Dokaži da zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Za cijeli broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r \ \text{ i } \ 0\le r<b,\ q \ \text{je količnik},\ r \ \text{je ostatak}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n,\ n+1,\ n+2.$$

Zbrojimo njihove kvadrate:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=n^2+n^2+2\cdot n+1+n^2+4\cdot n+4=3\cdot n^2+6\cdot n+5=$$

$$=3\cdot n^2+6\cdot n+3+2=3\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)+2=3\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)+2. \ \blacksquare$$

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n-1,\ n,\ n+1.$$

Zbrojimo njihove kvadrate:

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=n^2-2\cdot n+1+n^2+n^2+2\cdot n+1=n^2-2\cdot n+1+n^2+n^2+2\cdot n+1=$$

$$=3\cdot n^2+2=3\cdot n^2+2. \ \blacksquare$$

Dokaz 31

Dokaži da kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b,\ q \ \text{ je količnik},\ r \ \text{ je ostatak}.$$

Svaki se cijeli broj a za proizvoljni prirodni broj b može prikazati u jednom od oblika:

$$\begin{aligned} &a = b \cdot q, \\ &a = b \cdot q + 1, \\ &a = b \cdot q + 2, \\ &\ldots \\ &a = b \cdot q + (b-1). \end{aligned}$$

Na primjer, ako je b = 3, onda svaki broj a dopušta prikaz u jednom od ova tri oblika:

$$\begin{aligned} &a = 3 \cdot q, \\ &a = 3 \cdot q + 1, \\ &a = 3 \cdot q + 2. \end{aligned}$$

Ili ovako:

$$\begin{aligned} &a = 3 \cdot q - 1, \\ &a = 3 \cdot q, \\ &a = 3 \cdot q + 1. \end{aligned}$$

▶

1.inačica

Prvi način dokazivanja tvrdnje.

Kvadrirajmo brojeve:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\cdot q \\ a=3\cdot q+1 \\ a=3\cdot q+2 \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{ kvadriranje }] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=(3\cdot q)^2 \\ a^2=(3\cdot q+1)^2 \\ a^2=(3\cdot q+2)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=9\cdot q^2 \\ a^2=(3\cdot q)^2+2\cdot 3\cdot q\cdot 1+1 \\ a^2=(3\cdot q)^2+2\cdot 3\cdot q\cdot 2+2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot 3\cdot q^2 \\ a^2=9\cdot q^2+6\cdot q+1 \\ a^2=9\cdot q^2+12\cdot q+4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right) \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \\ a^2=9\cdot q^2+12\cdot q+3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+4\cdot q+1\right)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+4\cdot q+1\right)+1 \end{array}\right\}. \blacksquare$$

2.inačica

Drugi način dokazivanja tvrdnje.
Kvadrirajmo brojeve:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\cdot q-1 \\ a=3\cdot q \\ a=3\cdot q+1 \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{ kvadriranje }] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=(3\cdot q-1)^2 \\ a^2=(3\cdot q)^2 \\ a^2=(3\cdot q+1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=(3\cdot q)^2-2\cdot 3\cdot q\cdot 1+1 \\ a^2=9\cdot q^2 \\ a^2=(3\cdot q)^2+2\cdot 3\cdot q\cdot 1+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=9\cdot q^2-6\cdot q+1 \\ a^2=3\cdot 3\cdot q^2 \\ a^2=9\cdot q^2+6\cdot q+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2-2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right) \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2-2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2-2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \end{array}\right\}. \blacksquare$$

Dokaz 32

Dokaži iz jednakosti $a^2+b^2+c^2=a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c \; (a,\, b,\, c\in R)$, ***slijedi*** $a=b=c$.

Teorija

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\geq 0 \;\; , \;\; a\in R.$$

▶

Preoblikujemo jednakost:

$$a^2+b^2+c^2=a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c \;\Rightarrow\; a^2+b^2+c^2=a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c \;/\cdot 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2=2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot a\cdot c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2-2\cdot a\cdot b-2\cdot b\cdot c-2\cdot a\cdot c=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{grupiramo}\\ \text{članove}\end{array}\right]\Rightarrow\; a^2-2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot c+c^2=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)+\left(a^2-2\cdot a\cdot c+c^2\right)+\left(b^2-2\cdot b\cdot c+c^2\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Izrazi

$$(a-b)^2,\; (a-c)^2,\; (b-c)^2$$

nenegativni su, a njihov zbroj jednak je 0.
Zato mora biti

$$a-b=0 \;\; , \;\; a-c=0 \;\; , \;\; b-c=0$$

odnosno

$$a=b \;\; , \;\; a=c \;\; , \;\; b=c,$$

tj.

$$a=b=c. \; \blacksquare$$

Dokaz 33

Dokaži ako je proizvoljni cijeli broj oblika $2\cdot a^2+b^2,\ a,\ b\in Z,$ ***onda je i njegov kvadrat tog oblika.***

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \qquad \text{ili} \qquad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

▶

Neka je cijeli broj n oblika:

$$n=2\cdot a^2+b^2.$$

Kvadriramo ga:

$$n=2\cdot a^2+b^2 \Rightarrow n=2\cdot a^2+b^2\ /^2 \Rightarrow n^2=\left(2\cdot a^2+b^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=\left(2\cdot a^2\right)^2+2\cdot 2\cdot a^2\cdot b^2+\left(b^2\right)^2 \Rightarrow n^2=4\cdot a^4+4\cdot a^2\cdot b^2+b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=4\cdot a^4-4\cdot a^2\cdot b^2+b^4+8\cdot a^2\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=\left(4\cdot a^4-4\cdot a^2\cdot b^2+b^4\right)+2\cdot\left(4\cdot a^2\cdot b^2\right) \Rightarrow n^2=\left(2\cdot a^2-b^2\right)^2+2\cdot(2\cdot a\cdot b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=2\cdot(2\cdot a\cdot b)^2+\left(2\cdot a^2-b^2\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ 2\cdot a\cdot b=c\in Z\\ 2\cdot a^2-b^2=d\in Z\end{array}\right] \Rightarrow n^2=2\cdot c^2+d^2.\ ■$$

Dokaz 34

Dokaži da je svaka stranica trokuta manja od polovice njegova opsega.

Teorija

Opseg trokuta računa se po formuli

$$O = a + b + c,$$

gdje su a, b i c duljine njegovih stranica.

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b \;\; , \;\; c \in R \;\; \Rightarrow \;\; a + c < b + c.$$

Znak nejednakosti mijenja se ako obje njezine strane pomnožimo (ili podijelimo) istim negativnim realnim brojem.

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ a \ge b \\ a < b \\ a \le b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[c < 0 \right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot c < b \cdot c \\ a \cdot c \le b \cdot c \\ a \cdot c > b \cdot c \\ a \cdot c \ge b \cdot c \end{matrix}\right\}.$$

Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

(duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica)

▶

Dokažimo tvrdnju!

$$\left.\begin{matrix} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < b + c \;/ + a \\ b < a + c \;/ + b \\ c < a + b \;/ + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a + a < b + c + a \\ b + b < a + c + b \\ c + c < a + b + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a < a + b + c \\ 2 \cdot b < a + b + c \\ 2 \cdot c < a + b + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a < a + b + c \;/ : 2 \\ 2 \cdot b < a + b + c \;/ : 2 \\ 2 \cdot c < a + b + c \;/ : 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < \dfrac{a + b + c}{2} \\ b < \dfrac{a + b + c}{2} \\ c < \dfrac{a + b + c}{2} \end{matrix}\right\}. \;\blacksquare$$

Dokaz 35

Dokaži umnožak dvaju uzastopnih parnih prirodnih brojeva djeljiv je s 8.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m=2\cdot k \ , \ k\in N.$$

Parni brojevi rastu za 2.
Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1)\cdot n=2\cdot k \ , \ n\in N\setminus\{1\},\ k\in N \quad , \quad n\cdot(n+1)=2\cdot k \ , \ n,\ k\in N.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \dots$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna parna prirodna broja:

$$2\cdot n,\ 2\cdot n+2.$$

Pomnožimo ih:

$$2\cdot n\cdot(2\cdot n+2)=2\cdot n\cdot 2\cdot(n+1)=4\cdot n\cdot(n+1)=\begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ n\cdot(n+1)=2\cdot k\in N\end{bmatrix}=4\cdot 2\cdot k=8\cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 8. ■

2.inačica
Od dva uzastopna parna prirodna broja jedan je djeljiv sa 4. Zato je umnožak sigurno djeljiv s 8. ■

Dokaz 36

Dokaži za svaki $n \in N$ ***broj*** $n^3 - n$ ***djeljiv je sa 6.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \dots$

Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 6. Barem jedan od faktora je paran (djeljiv s 2), a jedan je djeljiv sa 3. Zato je njihov umnožak djeljiv sa 6.

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N \quad , \quad (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N.$$

▶

Preoblikujemo zadani broj:

$$n^3 - n = n \cdot \left(n^2 - 1\right) = n \cdot (n-1) \cdot (n+1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N \end{array}\right] = 6 \cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 6. ■

Dokaz 37

Dokaži zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 3.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Kub zbroja:

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3.$$

Kub razlike:

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3=(a-b)^3.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

▶

1.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n,\ n+1,\ n+2.$$

Zbrojimo njihove kubove:

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=$$
$$=n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1+n^3+3\cdot n^2\cdot 2+3\cdot n\cdot 2^2+2^3=$$
$$=n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1+n^3+6\cdot n^2+12\cdot n+8=3\cdot n^3+9\cdot n^2+15\cdot n+9=$$
$$=3\cdot\left(n^3+3\cdot n^2+5\cdot n+3\right).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

2.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n-1,\ n,\ n+1.$$

Zbrojimo njihove kubove:

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3\cdot n^2+3\cdot n-1+n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=$$
$$=n^3-3\cdot n^2+3\cdot n-1+n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=3\cdot n^3+6\cdot n=3\cdot\left(n^3+2\cdot n\right).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

Dokaz 38

Dokaži ako za realne brojeve a, b, x i y vrijedi $a^2+b^2=1$ i $x^2+y^2=1$, ***onda je*** $a\cdot x+b\cdot y\le 1$.

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R.$$

Svojstvo nejednakosti (zbrajanje):

$$a\ge b \text{ i } c\ge d\ \Rightarrow\ a+c\ge b+d.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Znak nejednakosti mijenja se ako obje njezine strane podijelimo (ili pomnožimo) istim negativnim realnim brojem.

$$\left.\begin{array}{l} a>b\\ a\ge b\\ a<b\\ a\le b\end{array}\right\}\Rightarrow\ [\,c<0\,]\ \Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\\ \frac{a}{c}\le\frac{b}{c}\\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\\ \frac{a}{c}\ge\frac{b}{c}\end{array}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Za realne brojeve a, b, x i y sljedeće su nejednakosti uvijek istinite:

$$(a-x)^2\ge 0\ ,\ (b-y)^2\ge 0.$$

Zbrojimo ih:

$$(a-x)^2+(b-y)^2\ge 0\ \Rightarrow\ a^2-2\cdot a\cdot x+x^2+b^2-2\cdot b\cdot y+y^2\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{array}\right]\Rightarrow\ \left(a^2+b^2\right)+\left(x^2+y^2\right)-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(a^2+b^2\right)+\left(x^2+y^2\right)-2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge 0\ \Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{uvjeti}\\ a^2+b^2=1\\ x^2+y^2=1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+1-2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge 0\ \Rightarrow\ 2-2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge 0\ \Rightarrow\ -2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge -2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge -2\ /:(-2)\ \Rightarrow\ a\cdot x+b\cdot y\le 1.\ \blacksquare$$

Dokaz 39

Dokaži da je umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva koji su djeljivi s 3 djeljiv sa 162.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 6. Barem jedan od faktora je paran (djeljiv s 2), a jedan je djeljiv sa 3. Zato je njihov umnožak djeljiv sa 6.

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=6\cdot k\ ,\ k\in N \quad , \quad (n-1)\cdot n\cdot(n+1)=6\cdot k\ ,\ k\in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja koji su djeljivi s 3:

$$3\cdot n,\ 3\cdot n+3,\ 3\cdot n+6.$$

Pomnožimo ih:

$$3\cdot n\cdot(3\cdot n+3)\cdot(3\cdot n+6)=3\cdot n\cdot 3\cdot(n+1)\cdot 3\cdot(n+2)=27\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=6\cdot k\ ,\ k\in N\end{array}\right]=27\cdot 6\cdot k=162\cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 162. ■

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja koji su djeljivi s 3:

$$3\cdot n-3,\ 3\cdot n,\ 3\cdot n+3.$$

Pomnožimo ih:

$$(3\cdot n-3)\cdot 3\cdot n\cdot(3\cdot n+3)=3\cdot(n-1)\cdot 3\cdot n\cdot 3\cdot(n+1)=27\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ (n-1)\cdot n\cdot(n+1)=6\cdot k\ ,\ k\in N\end{array}\right]=27\cdot 6\cdot k=162\cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 162. ■

3.inačica

Od tri uzastopna prirodna broja djeljiva s 3 jedan je djeljiv sa 6, a jedan s 9. Stoga je umnožak djeljiv s $3\cdot 6\cdot 9=162$. ■

Dokaz 40

Dokaži ako umnošku tri uzastopna cijela broja dodamo srednji broj dobit ćemo kub srednjeg broja.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\dots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \left\{ \dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots \right\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \left\{ 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \dots \right\}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

▶

1.inačica
Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n,\ n+1,\ n+2.$$

Pomnožimo ih i dodajmo srednji broj:

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1) = (n+1) \cdot (n \cdot (n+2) + 1) = (n+1) \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 1\right) =$$

$$= (n+1) \cdot (n+1)^2 = (n+1)^3. \ \blacksquare$$

2.inačica
Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n-1,\ n,\ n+1.$$

Pomnožimo ih i dodajmo srednji broj:

$$(n-1) \cdot n \cdot (n+1) + n = n \cdot ((n-1) \cdot (n+1) + 1) = n \cdot \left(n^2 - 1 + 1\right) = n \cdot \left(n^2 - 1 + 1\right) = n \cdot n^2 = n^3. \ \blacksquare$$