Dokaz 241

Dokaži $a^4+b^4=\left(a^2-a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right)\cdot\left(a^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right)$.

Teorija

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \ , \ a,\ b\ge 0.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

▶

$$a^4+b^4=a^4+2\cdot a^2\cdot b^2+b^4-2\cdot a^2\cdot b^2=\left(a^2\right)^2+2\cdot a^2\cdot b^2+\left(b^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=\left(a^2+b^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot b^2=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a\cdot b\cdot\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=\left(a^2+b^2-a\cdot b\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(a^2+b^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2}\right)=\left(a^2-a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right)\cdot\left(a^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right).\ \blacksquare$$

Dokaz 242

Dokažite Stewartov poučak. Neka je $D \in \overline{AB}$ ***po volji odabrana točka trokuta ABC. Označimo*** $t = |CD|$, $u = |AD|$, $v = |BD|$. ***Onda vrijedi*** $a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot c + u \cdot v \cdot c.$

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

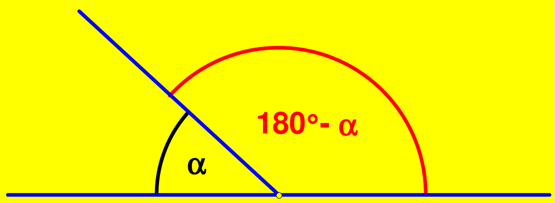
Zbrajanje jednakosti:

$$a = b \text{ i } c = d \;\Rightarrow\; a + c = b + d.$$

Formula redukcije za kosinus:

$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

Suplementarni kutovi, kutovi čiji zbroj iznosi 180°.



Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

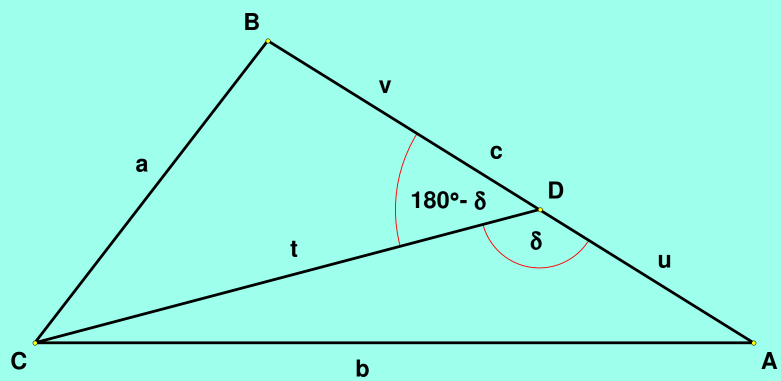
Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

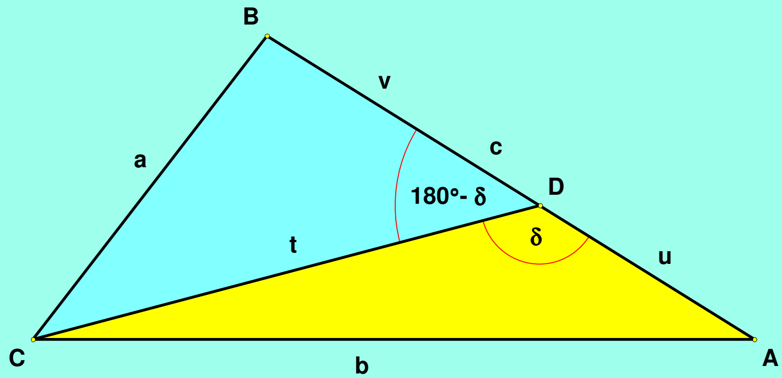
▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |CD| = t \;,\; |AD| = u \;,\; |BD| = v \;,\; c = u + v$$

$$\angle ADC = \delta \;\;,\;\; \angle CDB = 180^\circ - \delta$$



Uočimo trokute ΔCAD i ΔCDB. Prema poučku o kosinusu slijedi

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = t^2 + u^2 - 2 \cdot t \cdot u \cdot \cos\delta \\ a^2 = t^2 + v^2 - 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos\left(180^\circ - \delta\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 = t^2 + u^2 - 2 \cdot t \cdot u \cdot \cos\delta \\ a^2 = t^2 + v^2 + 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos\delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 = t^2 + u^2 - 2 \cdot t \cdot u \cdot \cos\delta \;\; / \cdot v \\ a^2 = t^2 + v^2 + 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos\delta \;\; / \cdot u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 \cdot v = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v - 2 \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \cos\delta \\ a^2 \cdot u = t^2 \cdot u + v^2 \cdot u + 2 \cdot t \cdot v \cdot u \cdot \cos\delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot v + a^2 \cdot u = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v - 2 \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \cos\delta + t^2 \cdot u + v^2 \cdot u + 2 \cdot t \cdot v \cdot u \cdot \cos\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot v + a^2 \cdot u = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v - 2 \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \cos\delta + t^2 \cdot u + v^2 \cdot u + 2 \cdot t \cdot v \cdot u \cdot \cos\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot v + a^2 \cdot u = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v + t^2 \cdot u + v^2 \cdot u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot v + t^2 \cdot u + u^2 \cdot v + v^2 \cdot u \Rightarrow a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot (v + u) + u \cdot v \cdot (u + v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\, u + v = c \,\right] \Rightarrow a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot c + u \cdot v \cdot c. \;\blacksquare$$

Dokaz 243

Dokažite četverokut koji je istodobno tetivni i tangencijalni ima površinu $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$.

Teorija

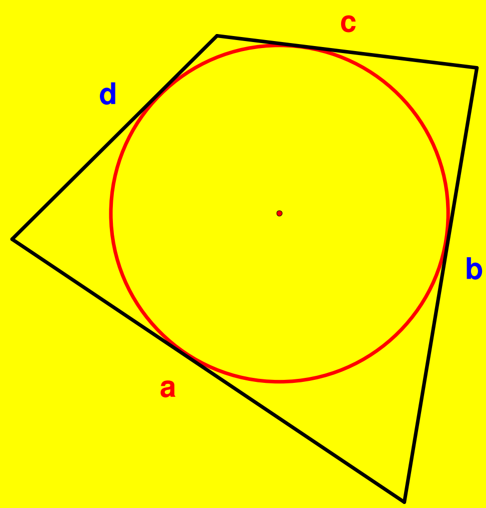
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Tetivni četverokut je četverokut oko kojeg se može opisati kružnica. Njegove stranice su tetive jedne kružnice, tj. vrhovi mu leže na jednoj te istoj kružnici
Heronova formula za površinu tetivnog četverokuta

$$P = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)},$$

gdje su a, b, c, d duljine stanica, s poluopseg četverokuta

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Tangencijalni četverokut je konveksni četverokut kojemu se može upisati kružnica. U tangencijalnom je četverokutu zbroj duljina jednog para nasuprotnih stranica jednak zbroju duljina drugog para nasuprotnih stranica.



$$a + c = b + d.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

▶

Budući da je četverokut tangencijalni vrijedi:

$$a + c = b + d.$$

Sada je:

$$\heartsuit \quad s-a=\frac{a+b+c+d}{2}-a=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{a}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot a}{2}=\frac{b+c+d-a}{2}=$$

$$=\frac{b+d+c-a}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{a+c+c-a}{2}=\frac{a+c+c-a}{2}=\frac{2\cdot c}{2}=\frac{2\cdot c}{2}=c$$

$$\heartsuit \quad s-b=\frac{a+b+c+d}{2}-b=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{b}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot b}{2}=\frac{a+c+d-b}{2}=$$

$$=\frac{a+c+d-b}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{b+d+d-b}{2}=\frac{b+d+d-b}{2}=\frac{2\cdot d}{2}=\frac{2\cdot d}{2}=d$$

$$\heartsuit \quad s-c=\frac{a+b+c+d}{2}-c=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{c}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot c}{2}=\frac{a+b+d-c}{2}=$$

$$=\frac{b+d+a-c}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{a+c+a-c}{2}=\frac{a+c+a-c}{2}=\frac{2\cdot a}{2}=\frac{2\cdot a}{2}=a$$

$$\heartsuit \quad s-d=\frac{a+b+c+d}{2}-d=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{d}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot d}{2}=\frac{a+b+c-d}{2}=$$

$$=\frac{a+c+b-d}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{b+d+b-d}{2}=\frac{b+d+b-d}{2}=\frac{2\cdot b}{2}=\frac{2\cdot b}{2}=b.$$

Tvrdnja slijedi uporabom Heronove formule.

$$P=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} s-a=c \\ s-b=d \\ s-c=a \\ s-d=b \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; P=\sqrt{c\cdot d\cdot a\cdot b} \;\Rightarrow\; P=\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d}. \;\blacksquare$$

Dokaz 244

Dokažite da za površinu bilo kojeg trokuta vrijedi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \ , \ P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \ , \ P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta .$$

Teorija

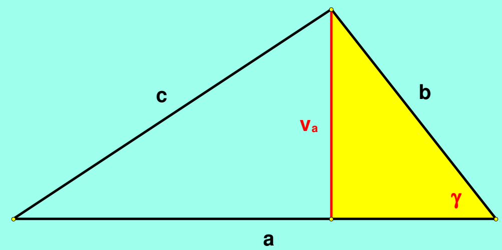
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c .$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

▶

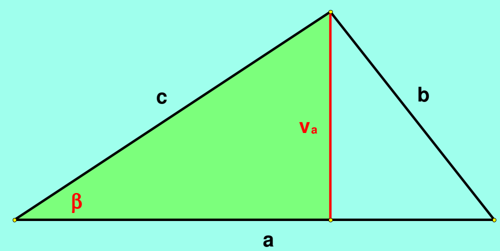
♥



$$\sin \gamma = \frac{v_a}{b} \Rightarrow \frac{v_a}{b} = \sin \gamma \Rightarrow \frac{v_a}{b} = \sin \gamma \ / \cdot b \Rightarrow v_a = b \cdot \sin \gamma \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma .$$

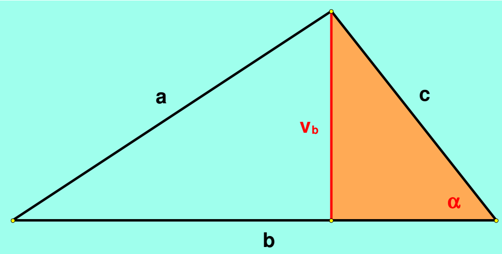
♥



$$\sin \beta = \frac{v_a}{c} \Rightarrow \frac{v_a}{c} = \sin \beta \Rightarrow \frac{v_a}{c} = \sin \beta \ / \cdot c \Rightarrow v_a = c \cdot \sin \beta \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta .$$

♥



$$\sin\alpha = \frac{v_b}{c} \Rightarrow \frac{v_b}{c} = \sin\alpha \Rightarrow \frac{v_b}{c} = \sin\alpha \; / \cdot c \Rightarrow v_b = c \cdot \sin\alpha \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha. \blacksquare$$

Dokaz 245

Dokažite da je broj log 5 iracionalan.

Teorija

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija log10 označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

Racionalni broj je broj koji nastaje dijeljenjem dva cijela broja. To su svi negativni razlomci, nula i pozitivni razlomci. Svaki razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{a}{b}$, gdje je a cijeli broj, a b prirodni broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

Pretpostavimo da vrijedi suprotno da je broj log 5 racionalan broj, tj. da se može zapisati u obliku

$$\log 5 = \frac{m}{n},$$

gdje su m i n prirodni brojevi. Onda je

$$\log 5 = \frac{m}{n} \Rightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 5 \Rightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 5 \ / ^n \Rightarrow \left(10^{\frac{m}{n}}\right)^n = 5^n \Rightarrow 10^m = 5^n.$$

Ova jednakost nije valjana ni za koji prirodan broj m i n. Stoga je pretpostavka iz koje je dobivena jednakost proistekla pogrešna, što znači da log 5 nije racionalan broj. ■

Dokaz 246

Dokažite da je $x+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Teorija

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad a=\left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

▶

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.\ \blacksquare$$

Nastavit će se!