Dokaz 41

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj $(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-7)-(n+1)\cdot(n-1)$ ***djeljiv s 5.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q\quad \text{ili}\quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

▶

Pojednostavnimo izraz:

$$(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-7)-(n+1)\cdot(n-1)=6\cdot n^2-14\cdot n+9\cdot n-21-\left(n^2-1\right)=$$

$$=6\cdot n^2-14\cdot n+9\cdot n-21-n^2+1=5\cdot n^2-5\cdot n-20=5\cdot\left(n^2-n-4\right).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 5. ■

Dokaz 42

Dokaži da je broj $(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-2)-(3\cdot n+2)\cdot(2\cdot n-3)$ ***djeljiv s 10 za svaki prirodni broj n.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ($b\neq 0$) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q\quad \text{ili}\quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

▶

Pojednostavnimo izraz:

$$(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-2)-(3\cdot n+2)\cdot(2\cdot n-3)=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-\left(6\cdot n^2-9\cdot n+4\cdot n-6\right)=$$

$$=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-6\cdot n^2+9\cdot n-4\cdot n+6=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-6\cdot n^2+9\cdot n-4\cdot n+6=$$

$$=-4\cdot n+9\cdot n+9\cdot n-4\cdot n=10\cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 10. ■

Dokaz 43

Dokaži nejednakost $-|x| \le x \le |x|.$

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

▶

Nejednakost

$$-|x| \le x \le |x|$$

možemo zapisati pomoću dvije nejednakosti:

$$-|x| \le x \quad , \quad x \le |x|.$$

Provjerimo nejednakost

$$-|x| \le x.$$

♥ $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$

Nejednakost

$$-|x| \le x$$

postaje

$$-x \le x.$$

Ona je istinita.

♥ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Nejednakost

$$-|x| \le x$$

postaje

$$-(-x) \le x \Rightarrow x \le x.$$

Ona je istinita.

Provjerimo nejednakost

$$x \le |x|.$$

♥ $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$

Nejednakost

$$x \le |x|$$

postaje

$$x \le x.$$

Ona je istinita.

♥ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Nejednakost

$$x \le |x|$$

postaje

$$x \leq -x.$$

Ona je istinita. ■

Dokaz 44

Dokaži nejednakost $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstva apsolutne vrijednosti:

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad , \quad -a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \leq b \text{ i } c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Neka je

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad , \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Poslije zbrajanja dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b|.$$

Ako su brojevi jednakog predznaka vrijedi jednakost. ■

Dokaz 45

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$

Teorija

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\geq b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}.$$

Umnožak cijelog broja i racionalnog broja:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \ , \ a, b\geq 0.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \ , \ a\geq 0.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2\geq 0 \ , \ a\in R.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

▶

1.inačica

Pođimo od istinite tvrdnje:

$$(a-b)^2\geq 0 \ \Rightarrow \ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \ \Rightarrow \ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \ /\cdot\frac{1}{a\cdot b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a^2}{a\cdot b}-2\cdot\frac{a\cdot b}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{a^2}{a\cdot b}-2\cdot\frac{a\cdot b}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b}-2\cdot 1+\frac{b}{a}\geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. ■

2.inačica

Pođimo od istinite nejednakosti:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 -2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}-2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a}{b}-2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}-2\cdot\sqrt{1}+\frac{b}{a}\geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}-2\cdot 1+\frac{b}{a}\geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. ■

3.inačica

Pretpostavimo da je zadana nejednakost točna. Korektnim matematičkim postupcima preoblikujemo je u tvrdnju za koju smo sigurni da je valjana.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \;/\cdot a\cdot b \;\Rightarrow\; a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b \;\Rightarrow\; a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \;\Rightarrow\; (a-b)^2\geq 0.$$

Dobili smo istinitu tvrdnu. Znači vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. ■

Dokaz 46

Dokaži da za sve $x \in R$ ***vrijedi*** $x^2 + x + 1 > 0.$

Teorija

Umnožak racionalnog broja i njegova recipročnog broja:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

▶

Preoblikujemo nejednakost nadopunjavanjem na potpuni kvadrat:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Zadana nejednakost je točna jer je

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ i } \frac{3}{4} > 0. \ \blacksquare$$

Dokaz 47

Dokaži, ako je $a+b+c=0$***, onda je*** $a^3+b^3+c^3=3\cdot a\cdot b\cdot c.$

Teorija

Potencija sa negativnom bazom i neparnim eksponentom:

$$(-a)^{2\cdot n+1}=-a^{2\cdot n+1}.$$

Kub zbroja:

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$a^3+b^3+c^3=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b\end{array}\right]=a^3+b^3+(-a-b)^3=a^3+b^3+(-(a+b))^3=$$

$$=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)=$$

$$=a^3+b^3-a^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2-b^3=a^3+b^3-a^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2-b^3=$$

$$=-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2=3\cdot a\cdot b\cdot(-a-b)=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b\end{array}\right]=3\cdot a\cdot b\cdot c. \ \blacksquare$$

Dokaz 48

Dokaži: $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}.$

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a+c \le b+c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;/+1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}+1 \le \frac{c}{d}+1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}+\frac{1}{1} \le \frac{c}{d}+\frac{1}{1} \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}. \;\blacksquare$$

Dokaz 49

Dokaži: $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a-b}{b} \le \frac{c-d}{d}.$

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a-c \le b-c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;/-1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} - 1 \le \frac{c}{d} - 1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} - \frac{1}{1} \le \frac{c}{d} - \frac{1}{1} \;\Rightarrow\; \frac{a-b}{b} \le \frac{c-d}{d}. \;\blacksquare$$

Dokaz 50

Dokaži da za sve realne brojeve a i b vrijedi: $|a-b| \le |a|+|b|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|-a| = |a|.$$

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|a+b| \le |a|+|b| \text{ za svaki } a, b \in R.$$

▶

$$|a-b| = |a+(-b)| \le |a|+|-b| = |a|+|b| \Rightarrow |a-b| \le |a|+|b|. \blacksquare$$

Dokaz 51

Dokaži da za sve realne brojeve a i b vrijedi: $|a|-|b| \le |a+b|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|-a| = |a|.$$

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|a+b| \le |a| + |b| \text{ za svaki } a, b \in R.$$

▶

$$|a| = |a+b-b| = |(a+b)+(-b)| \le |a+b| + |-b| = |a+b| + |b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a| \le |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a+b|. \ \blacksquare$$

Dokaz 52

Dokaži da za sve realne brojeve a i b vrijedi: $|a|-|b| \le |a-b|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|-a| = |a|.$$

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|a+b| \le |a| + |b| \text{ za svaki } a, b \in R.$$

▶

$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a| \le |a-b| + |b| \Rightarrow |a|-|b| \le |a-b|. \blacksquare$$

Dokaz 53

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi: $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a\cdot b}$.

Napomena. Broj $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ***zove se harmonijska sredina, a broj*** $\sqrt{a\cdot b}$ ***geometrijska sredina brojeva a i b.***

Teorija

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \ , \ a\ge 0.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\ne 0 \ , \ n\ne 1.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\le b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ a\cdot c\le b\cdot c.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2\ge 0 \ , \ a\in R.$$

▶

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{a\cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{2}{\frac{b+a}{a\cdot b}}\le\sqrt{a\cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{\frac{2}{1}}{\frac{a+b}{a\cdot b}}\le\sqrt{a\cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}\le\sqrt{a\cdot b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2}{a+b}\le\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow \frac{2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2}{a+b}\le\sqrt{a\cdot b}\ /\cdot\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}} \Rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{a+b}\le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{a+b}\le 1\ /\cdot(a+b) \Rightarrow 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\le a+b \Rightarrow a+b\ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow a-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0.\ \blacksquare$$

Dokaz 54

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi: $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

Napomena. Broj $\sqrt{a \cdot b}$ ***zove se geometrijska sredina, a broj*** $\frac{a+b}{2}$ ***aritmetička sredina brojeva a i b.***

Teorija

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \le b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \le b \cdot c.$$

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ , \ a \ge 0.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

▶

$$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \ \Rightarrow \ \sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \ / \cdot 2 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \le a+b \ \Rightarrow \ a+b \ge 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} + b \ge 0 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0. \ \blacksquare$$

Dokaz 55

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Napomena. Broj $\frac{a+b}{2}$ ***zove se aritmetička sredina, a broj*** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ***kvadratna sredina brojeva a i b.***

Teorija

Kvadriranje nejednakosti pozitivnih brojeva:

$$0 < a \le b \Rightarrow a^2 \le b^2.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ , \ a \ge 0.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \ , \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

▶

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ /^2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{2^2} \le \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \ / \cdot 4 \Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \le 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \le 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 \ge a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \ge 0 \Rightarrow (a-b)^2 \ge 0. \ \blacksquare$$

Dokaz 56

Dokaži ako su a, b, c pozitivni brojevi, onda je $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$

Teorija

Za svaka dva pozitivna broja x i y vrijedi:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2.$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a\geq b \text{ i } c\geq d \;\Rightarrow\; a+c\geq b+d.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\geq b \text{ i } c\in R \;\Rightarrow\; a+c\geq b+c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Polazimo od istinitih nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2\\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2+2+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\geq 6 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)\geq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}\geq 6 \Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}\geq 6 \;/+3 \Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+3\geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{b+c}{a}+1+\frac{a+c}{b}+1+\frac{b+a}{c}\geq 9 \Rightarrow \left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+a}{c}\right)\geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1}+\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{a+c}{b}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{b+a}{c}\right)\geq 9 \Rightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{b+a+c}{b}+\frac{c+b+a}{c}\geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9 \Rightarrow (a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9. \;\blacksquare$$

Dokaz 57

Dokaži da je umnožak četiri uzastopna cijela broja uvećan za 1 potpuni kvadrat.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

▶

Neka su zadana četiri uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1, \ n+2, \ n+3.$$

Njihov umnožak uvećamo za 1:

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1 = n\cdot(n+3)\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1 = \left(n^2+3\cdot n\right)\cdot\left(n^2+2\cdot n+n+2\right)+1 =$$

$$= \left(n^2+3\cdot n\right)\cdot\left(n^2+3\cdot n+2\right)+1 = \left(n^2+3\cdot n\right)\cdot\left(\left(n^2+3\cdot n\right)+2\right)+1 =$$

$$= \left(n^2+3\cdot n\right)^2 + 2\cdot\left(n^2+3\cdot n\right)+1 = \left(n^2+3\cdot n+1\right)^2. \ ■$$

Dokaz 58

Dokaži ako su a i b pozitivni brojevi i a + b = 1, onda je $\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9.$

Teorija

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ \ ,\ \ a\geq 0.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadriranje nejednakosti pozitivnih brojeva:

$$a\geq b>0\ \Rightarrow\ a^2\geq b^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad ,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\geq b \text{ i } c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\geq b\cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ n\neq 0\ \ ,\ \ n\neq 1.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\quad ,\quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

▶

Pođimo od točne nejednakosti:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{a}\right)^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow\ a-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+b\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ a+b=1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 1\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ \Rightarrow\ 1\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ /^2\ \Rightarrow\ 1^2\geq\left(2\cdot\sqrt{a\cdot b}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1\geq 2^2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2\ \Rightarrow\ 1\geq 4\cdot a\cdot b\ \Rightarrow\ 1\geq 4\cdot a\cdot b\ /\cdot\frac{1}{a\cdot b}\ \Rightarrow\ \frac{1}{a\cdot b}\geq 4.$$

Sada je:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a\cdot b}=1+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a\cdot b}=1+\frac{a+b}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot b}=\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ a+b=1\end{bmatrix}=$$

$$=1+\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot b}=1+\frac{2}{a\cdot b}=1+2\cdot\frac{1}{a\cdot b}\geq\left[\frac{1}{a\cdot b}\geq 4\right]\geq 1+2\cdot 4=1+8=9.$$

Vrijedi:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9. \blacksquare$$

Dokaz 59

Dokaži ako je a > 0, b > 0 i c > 0 i $a^2+b^2=c^2$, ***tada je*** $a^3+b^3<c^3$.

Teorija

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a<b \text{ i } c>0 \;\Rightarrow\; a\cdot c<b\cdot c.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a<b \text{ i } c<d \;\Rightarrow\; a+c<b+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Zbog $a^2+b^2=c^2$ i $a>0,\ b>0$ vrijedi $a<c$ i $b<c$.

Tada je:

$$\left.\begin{matrix} a<c \\ b<c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a<c \;/\cdot a^2 \\ b<c \;/\cdot b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^3<a^2\cdot c \\ b^3<b^2\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednkosti} \end{bmatrix} \Rightarrow a^3+b^3<a^2\cdot c+b^2\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3+b^3<\left(a^2+b^2\right)\cdot c \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ a^2+b^2=c^2 \end{bmatrix} \Rightarrow a^3+b^3<c^2\cdot c \Rightarrow a^3+b^3<c^3. \;\blacksquare$$

Dokaz 60

Dokaži ako je $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = 1,$ ***onda je*** $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1.$

Teorija

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \geq b \text{ i } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

▶

Polazimo od istinite nejednakosti:

$$(x-y)^2 + (z-x)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 + z^2 - 2 \cdot z \cdot x + x^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot z + z^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot z \cdot x - 2 \cdot y \cdot z \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2 \cdot (x \cdot y + z \cdot x + y \cdot z) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2 \cdot (x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x) \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2 \cdot 1 \geq 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2 \geq 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 2 \ /:2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 1. \ \blacksquare$$