Dokaz 61

Dokaži duljina bilo koje težišnice trokuta manja je od polovine opsega trokuta.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg:

$$O = a + b + c.$$

Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica.
Zbrajanje nejednakosti:

$$a < b \text{ i } c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

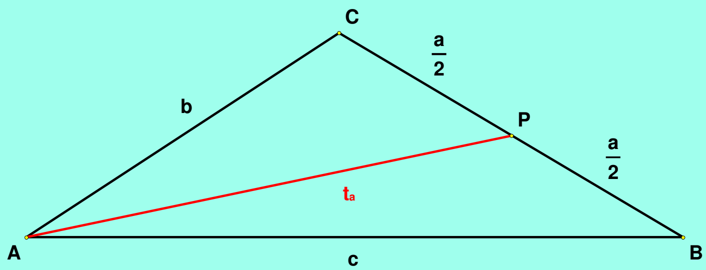
Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \le b \text{ i } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}.$$

▶



Uočimo trokute ΔABP i ΔAPC i na njih primijenimo nejednakost koja vrijedi za stranice trokuta.

$$\left.\begin{array}{l} t_a < \frac{a}{2} + c \\ t_a < \frac{a}{2} + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow t_a + t_a < \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} + b \Rightarrow 2 \cdot t_a < a + b + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t_a < a + b + c \ /: 2 \Rightarrow t_a < \frac{a+b+c}{2}.$$

Analogno je:

$$t_b < \frac{a+b+c}{2} \quad , \quad t_c < \frac{a+b+c}{2}. \ \blacksquare$$

Dokaz 62

Dokaži jedini prosti broj p za koji je $8 \cdot p^2 + 1$ ***prosti je broj p = 3.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Svaki se cijeli broj a za proizvoljni prirodni broj b može prikazati u jednom od oblika:

$$a = b \cdot q,$$
$$a = b \cdot q + 1,$$
$$a = b \cdot q + 2,$$
$$\ldots$$
$$a = b \cdot q + (b-1).$$

Na primjer, ako je b = 3, onda svaki broj a dopušta prikaz u jednom od ova tri oblika:

$$a = 3 \cdot q,$$
$$a = 3 \cdot q + 1,$$
$$a = 3 \cdot q + 2.$$

Ili ovako:

$$a = 3 \cdot q - 1,$$
$$a = 3 \cdot q,$$
$$a = 3 \cdot q + 1.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Provjerimo je li za p = 3 broj $8 \cdot p^2 + 1$ prost.

$$8 \cdot p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 8 \cdot 9 + 1 = 72 + 1 = 73.$$

Broj 73 je prost.

Budući da je p = 3 jedini prosti broj djeljiv s 3, ostaje provjeriti sve brojeve oblika

$$\left.\begin{matrix} p = 3 \cdot k - 1 \\ p = 3 \cdot k + 1 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} p = 3 \cdot k + 1 \\ p = 3 \cdot k + 2 \end{matrix}\right\},\ k \in N.$$

Provjerit ćemo prvi slučaj. Analogno se ispituje i za drugi slučaj.

♥ Za $p=3\cdot k-1$ dobije se:

$$8\cdot p^2+1=8\cdot(3\cdot k-1)^2+1=8\cdot\left(9\cdot k^2-6\cdot k+1\right)+1=72\cdot k^2-48\cdot k+8+1=$$

$$=72\cdot k^2-48\cdot k+9=3\cdot\left(24\cdot k^2-16\cdot k+3\right).$$

Broj je složen.

♥ Za $p=3\cdot k+1$ dobije se:

$$8\cdot p^2+1=8\cdot(3\cdot k+1)^2+1=8\cdot\left(9\cdot k^2+6\cdot k+1\right)+1=72\cdot k^2+48\cdot k+8+1=$$

$$=72\cdot k^2+48\cdot k+9=3\cdot\left(24\cdot k^2+16\cdot k+3\right).$$

Broj je složen. ■

Dokaz 63

Dokaži da za realne brojeve $A \geq 0$, $B \geq 0$, $A^2 \geq B$ vrijedi:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Teorija

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\geq 0.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad ,\quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ ,\ a,b\geq 0.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\quad ,\quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad ,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Dijeljenje drugih korijena:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad ,\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{kvadriramo}\\ \text{jednakost}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\ /^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2+2\cdot\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\cdot\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}+A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{A^2-\left(\sqrt{A^2-B}\right)^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}+A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{A^2-\left(A^2-B\right)}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=\frac{2\cdot A}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{A^2-A^2+B}{4}} \Rightarrow A+\sqrt{B}=\frac{2\cdot A}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{A^2-A^2+B}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=A+2\cdot\sqrt{\frac{B}{4}} \Rightarrow A+\sqrt{B}=A+2\cdot\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{4}} \Rightarrow A+\sqrt{B}=A+2\cdot\frac{\sqrt{B}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+\sqrt{B}=A+2\cdot\frac{\sqrt{B}}{2} \Rightarrow A+\sqrt{B}=A+\sqrt{B}. \blacksquare$$

Dokaz 64

Dokaži da za realne brojeve A ≥ 0, B ≥ 0, $A^2 \geq B$ vrijedi:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Teorija

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ \ ,\ \ a\geq 0.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad ,\quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ \ ,\ \ a,b\geq 0.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\quad ,\quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad ,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Dijeljenje drugih korijena:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad ,\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ n\neq 0\ \ ,\ \ n\neq 1.$$

▶

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{kvadriramo}\\ \text{jednakost}\end{array}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\ \ /^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2-2\cdot\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\cdot\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}+A-\sqrt{A^2-B}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{A^2-\left(\sqrt{A^2-B}\right)^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}+A-\sqrt{A^2-B}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{A^2-\left(A^2-B\right)}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=\frac{2\cdot A}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{A^2-A^2+B}{4}} \Rightarrow A-\sqrt{B}=\frac{2\cdot A}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{A^2-A^2+B}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=A-2\cdot\sqrt{\frac{B}{4}} \Rightarrow A-\sqrt{B}=A-2\cdot\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{4}} \Rightarrow A-\sqrt{B}=A-2\cdot\frac{\sqrt{B}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\sqrt{B}=A-2\cdot\frac{\sqrt{B}}{2} \Rightarrow A-\sqrt{B}=A-\sqrt{B}. \blacksquare$$

Dokaz 65

Dokaži graf neparne funkcije $f : R \to R$ uvijek prolazi ishodištem.

Teorija

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo neparnom,
ako je f(– x) = – f(x).
U Kartezijevom koordinatnom sustavu ishodište ima koordinate O(0, 0).

▶

Neka je f neparna funkcija. Tada je:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow [x = 0] \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot f(0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot f(0) = 0 \;/ : 2 \Rightarrow f(0) = 0. \;\blacksquare$$

Dokaz 66

Dokaži da je kompozicija neparnih funkcija neparna.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C$.

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C$, odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa g ∘ f. Dakle,

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za sve $a \in A$.

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

▶

Neka su f i g neparne funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{array}\right\} \quad (g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f)(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 67

Dokaži da je kompozicija parnih funkcija parna.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C$.

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C$, odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa $g \circ f$. Dakle,
$(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za sve $a \in A$.

Funkciju $y = f(x)$ definiranu u simetričnom području $-a \le x \le a$ nazivamo parnom,
ako je $f(-x) = f(x)$.

▶

Neka su f i g parne funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = g(x) \end{array}\right\} \quad (g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x). \ ■$$

Dokaz 68

Dokaži, ako je $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, onda je $\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z\right)^2$.

Teorija

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

▶

Neka je:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}=k\\ \frac{y}{b}=k\\ \frac{z}{c}=k\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}=k \;/\cdot a\\ \frac{y}{b}=k \;/\cdot b\\ \frac{z}{c}=k \;/\cdot c\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l}x=k\cdot a\\ y=k\cdot b\\ z=k\cdot c\end{array}\right\}.$$

Tada je:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left((k\cdot a)^2+(k\cdot b)^2+(k\cdot c)^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=\left(k^2\cdot a^2+k^2\cdot b^2+k^2\cdot c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=k^2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=k^2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\left(k\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)^2=\left(k\cdot a^2+k\cdot b^2+k\cdot c^2\right)^2=$$

$$=\left(a\cdot k\cdot a+b\cdot k\cdot b+c\cdot k\cdot c\right)^2=\left[\begin{array}{l}k\cdot a=x\\ k\cdot b=y\\ k\cdot c=z\end{array}\right]=\left(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z\right)^2. \;■$$

Dokaz 69

Dokaži da vrijedi formula $A^4+B^4=\left(A^2+A\cdot B\cdot\sqrt{2}+B^2\right)\cdot\left(A^2-A\cdot B\cdot\sqrt{2}+B^2\right).$

Teorija

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\geq 0.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

▶

$$A^4+B^4=A^4+2\cdot A^2\cdot B^2+B^4-2\cdot A^2\cdot B^2=\left(A^4+2\cdot A^2\cdot B^2+B^4\right)-2\cdot A^2\cdot B^2=$$

$$=\left(\left(A^2\right)^2+2\cdot A^2\cdot B^2+\left(B^2\right)^2\right)-\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot A^2\cdot B^2=\left(A^2+B^2\right)^2-\left(\sqrt{2}\cdot A\cdot B\right)^2=$$

$$=\left(A^2+B^2+\sqrt{2}\cdot A\cdot B\right)\cdot\left(A^2+B^2-\sqrt{2}\cdot A\cdot B\right)=$$

$$=\left(A^2+A\cdot B\cdot\sqrt{2}+B^2\right)\cdot\left(A^2-A\cdot B\cdot\sqrt{2}+B^2\right).\ \blacksquare$$

Dokaz 70

Dokaži da vrijedi formula $A^4 - B^4 = (A - B) \cdot (A + B) \cdot \left(A^2 + B^2\right)$.

Teorija

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2 .$$

▶

$$A^4 - B^4 = \left(A^2\right)^2 - \left(B^2\right)^2 = \left(A^2 - B^2\right) \cdot \left(A^2 + B^2\right) = (A - B) \cdot (A + B) \cdot \left(A^2 + B^2\right). \ \blacksquare$$

Dokaz 71

Dokaži identitet $(a-b)^2=(b-a)^2$.

Teorija

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Svojstvo komutativnosti za zbrajanje:

$$a+b=b+a, \text{ za sve } a, b\in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Potencija sa negativnom bazom i parnim eksponentom:

$$(-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n}.$$

Svojstvo komutativnosti za množenje:

$$a\cdot b=b\cdot a, \text{ za sve } a, b\in R.$$

▶

1.inačica

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=b^2-2\cdot b\cdot a+a^2=(b-a)^2. \ ■$$

2.inačica

$$(a-b)^2=(-(-a+b))^2=(-(b-a))^2=(b-a)^2. \ ■$$

Dokaz 72

Dokaži identitet $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

Teorija

Potencija sa negativnom bazom i parnim eksponentom:

$$(-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

1.inačica

$$(-a-b)^2=((-a)+(-b))^2=(-a)^2+2\cdot(-a)\cdot(-b)+(-b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2. \blacksquare$$

2.inačica

$$(-a-b)^2=(-(a+b))^2=(a+b)^2. \blacksquare$$

Dokaz 73

Dokaži da su polovišta stranica četverokuta vrhovi paralelograma.

Teorija

Ako je P(x, y) polovište dužine $\overline{AB}$, gdje je A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), onda je

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Koordinate polovišta aritmetičke su sredine koordinata krajnjih točaka.
Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Dvojni razlomak:

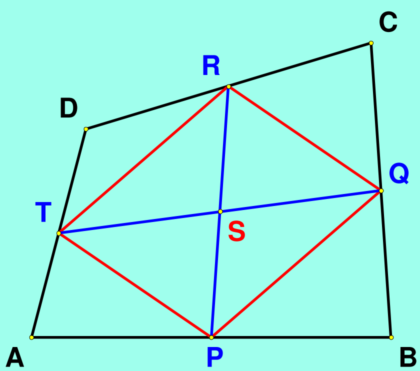
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Svojstvo komutativnosti za zbrajanje:

$$a + b = b + a, \text{ za sve } a, b \in R.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.
Dijagonale se raspolavljaju.

▶



Neka je zadan četverokut ABCD čiji vrhovi imaju koordinate:

$$A(x_1, y_1) \ , \ B(x_2, y_2) \ , \ C(x_3, y_3) \ , \ D(x_4, y_4).$$

Neka je:

♥ P polovište dužine $\overline{AB}$

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

♥ Q polovište dužine $\overline{BC}$

$$Q\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

♥ R polovište dužine $\overline{CD}$

$$R\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right)$$

♥ T polovište dužine $\overline{DA}$

$$T\left(\frac{x_4+x_1}{2}, \frac{y_4+y_1}{2}\right).$$

Dužine $\overline{PR}$ i $\overline{QT}$ dijagonale su četverokuta PQRT. Provjerimo da je polovište S dužine $\overline{PR}$ ujedno i polovište dužine $\overline{QT}$ pa je četverokut paralelogram.

♥ Točka S je polovište dužine $\overline{PR}$.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ R\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow S\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}, \frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}}{2}\right) =$$

$$= S\left(\frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}}{\frac{2}{1}}, \frac{\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}}{\frac{2}{1}}\right) = S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right).$$

♥ Točka S je polovište dužine $\overline{QT}$.

$$\left.\begin{array}{l} Q\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right) \\ T\left(\frac{x_4+x_1}{2}, \frac{y_4+y_1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow S\left(\frac{\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_4+x_1}{2}}{2}, \frac{\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_4+y_1}{2}}{2}\right) =$$

$$= S\left(\frac{\frac{x_2+x_3+x_4+x_1}{2}}{\frac{2}{1}}, \frac{\frac{y_2+y_3+y_4+y_1}{2}}{\frac{2}{1}}\right) = S\left(\frac{x_2+x_3+x_4+x_1}{4}, \frac{y_2+y_3+y_4+y_1}{4}\right) =$$

$$= S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right). \blacksquare$$

Dokaz 74

Dokaži identitet $(10 \cdot n + 5)^2 = 100 \cdot n \cdot (n+1) + 25.$

Teorija

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n .$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1 .$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m} .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c) .$$

▶

$$(10 \cdot n + 5)^2 = (10 \cdot n)^2 + 2 \cdot 10 \cdot n \cdot 5 + 5^2 = 100 \cdot n^2 + 100 \cdot n + 25 = 100 \cdot n \cdot (n+1) + 25. \ ■$$

Dokaz 75

Dokaži pravac koji spaja polovišta dviju stranica trokuta usporedan je s trećom stranicom.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Ako je P(x, y) polovište dužine $\overline{AB}$, gdje je A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), onda je

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Koordinate polovišta aritmetičke su sredine koordinata krajnjih točaka.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Kraćenje dvojnog razlomka:

$$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

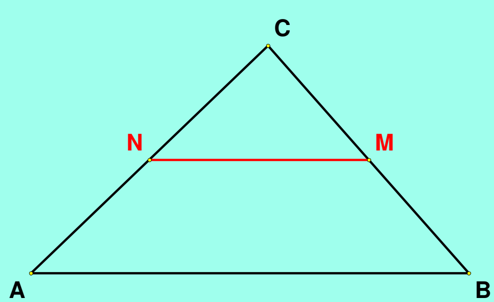
Oduzimanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n} \quad , \quad \frac{a - b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

▶

Neka je zadan trokut ABC čiji vrhovi imaju koordinate:

$$A(x_1, y_1) \ , \ B(x_2, y_2) \ , \ C(x_3, y_3).$$



Neka je:

♥ M polovište dužine $\overline{BC}$

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

♥ N polovište dužine $\overline{CA}$

$$N\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right).$$

Pokažimo da pravci AB i NM imaju jednake koeficijente smjerova, tj. da su usporedni:

♥ koeficijent smjera pravca AB

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) = B(x_2, y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right] \Rightarrow k_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

♥ koeficijent smjera pravca NM

$$\left.\begin{array}{l} N(x_1, y_1) = N\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right) \\ M(x_2, y_2) = M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right] \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{y_2+y_3}{2} - \frac{y_3+y_1}{2}}{\frac{x_2+x_3}{2} - \frac{x_3+x_1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{\frac{y_2+y_3-(y_3+y_1)}{2}}{\frac{x_2+x_3-(x_3+x_1)}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{y_2+y_3-y_3-y_1}{2}}{\frac{x_2+x_3-x_3-x_1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{y_2+y_3-y_3-y_1}{2}}{\frac{x_2+x_3-x_3-x_1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{\frac{y_2-y_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{y_2-y_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \blacksquare$$

Dokaz 76

Dan je trokut ABC i točka $D \in \overline{AB}$. ***Dokaži da je*** $|CD| < \frac{1}{2} \cdot \left(|AB| + |BC| + |CA|\right)$.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

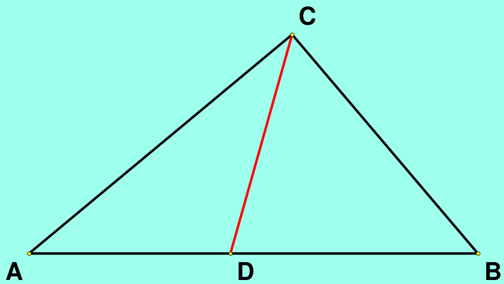
Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica.
Zbrajanje nejednakosti:

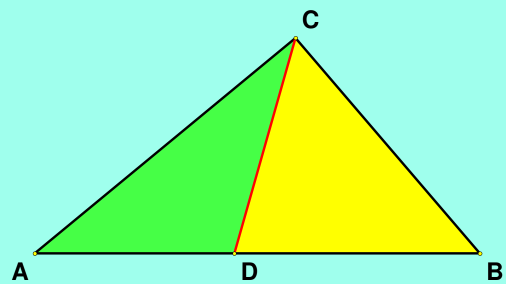
$$a < b \text{ i } c < d \;\Rightarrow\; a + c < b + d.$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a < b \text{ i } c > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

▶





Sa slike vidi se:

$$|AD| + |DB| = |AB|.$$

Uočimo trokute ΔADC i ΔDBC i na njima primijenimo nejednakosti koje vrijede za stranice trokuta.

$$\left.\begin{array}{l} |CD| < |AD| + |CA| \\ |CD| < |DB| + |BC| \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow |CD| + |CD| < |AD| + |CA| + |DB| + |BC| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |CD| < \left(|AD| + |DB|\right) + |CA| + |BC| \Rightarrow 2 \cdot |CD| < |AB| + |CA| + |BC| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |CD| < |AB| + |BC| + |CA| \Rightarrow 2 \cdot |CD| < |AB| + |BC| + |CA| \; / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |CD| < \frac{1}{2} \cdot \left(|AB| + |BC| + |CA|\right). \; \blacksquare$$

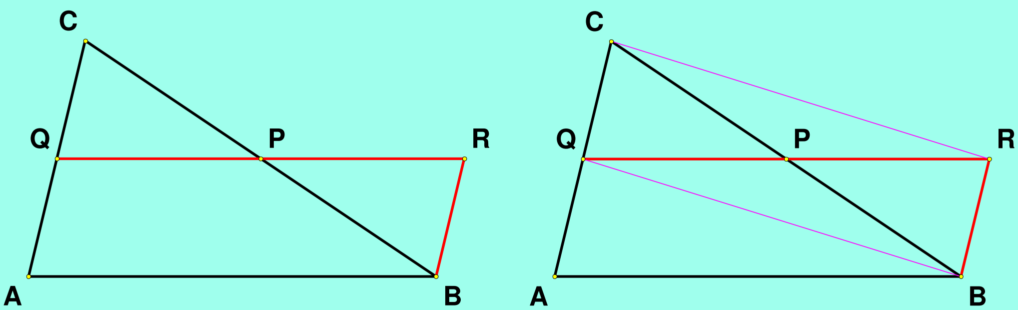
Dokaz 77

Dokaži srednjica trokuta usporedna je trećoj stranici i od nje je upola kraća.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Dužina koja spaja polovišta dviju stranica u trokutu naziva se srednjica trokuta.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.
Svojstva paralelograma: ima dva para usporednih (paralelnih) stranica, nasuprotne stranice jednake su duljine, dijagonale se raspolavljaju, suprotni kutovi jednaki su, kutovi uz svaku stranicu suplementni su.

▶



Neka su točke Q i P polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC.

Ako produljimo QP tako da je $|QP|=|PR|$, dobit ćemo četverokut QBRC koji je paralelogram jer mu se dijagonale $\overline{QR}$ i $\overline{BC}$ raspolavljaju u točki P. Zato je BR | | AC te je

$$|BR|=|QC|=|AQ|.$$

Dalje slijedi da je četverokut ABRQ paralelogram pa je

$$|QR|=|AB|.$$

Onda je

$$|QP|=\frac{1}{2}\cdot|QR| \Rightarrow |QP|=\frac{1}{2}\cdot|AB|. \blacksquare$$

Dokaz 78

Dokaži, ako su a i c duljine osnovica trapeza, duljina srednjice iznosi $s = \frac{a+c}{2}.$

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).
Dužina koja spaja polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Dužina koja spaja polovišta dviju stranica u trokutu naziva se srednjica trokuta.
Srednjica s trokuta usporedna je trećoj stranici i od nje je upola kraća.

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \quad , \quad s = \frac{1}{2} \cdot b \quad , \quad s = \frac{1}{2} \cdot c.$$

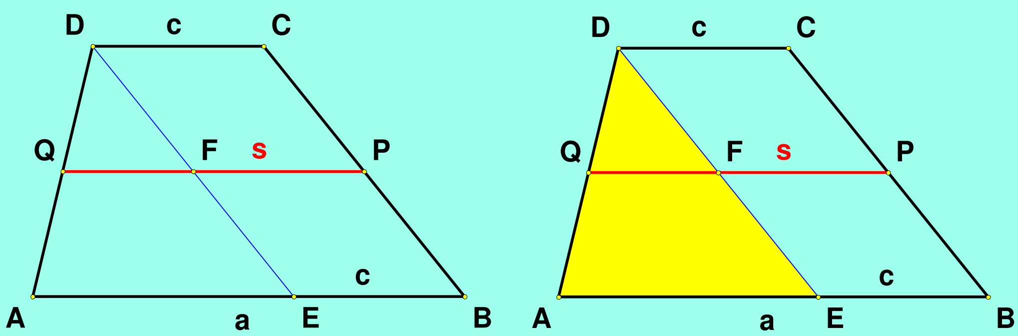
Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = a \;,\; |DC| = |FP| = |EB| = c \;,\; |QP| = s.$$

Konstruiramo paralelu sa BC kroz točku D. Dobijemo trokut AED s osnovicom AE.

$$|AE| = |AB| - |EB| \;\Rightarrow\; |AE| = a - c.$$

U trokutu AED duljina srednjice iznosi:

$$|QF| = \frac{1}{2} \cdot |AE| \;\Rightarrow\; |QF| = \frac{a-c}{2}.$$

Duljina srednjice trapeza ABCD je:

$$s = |QP| \;\Rightarrow\; s = |QF| + |FP| \;\Rightarrow\; s = \frac{a-c}{2} + c \;\Rightarrow\; s = \frac{a-c}{2} + \frac{c}{1} \;\Rightarrow\; s = \frac{a-c+2 \cdot c}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; s = \frac{a+c}{2}. \;\blacksquare$$

Dokaz 79

Dokaži identitet: $\sin^2 x \cdot \sin^2 y + \sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x = 1.$

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Temeljni identitet

Za svaki realni broj x vrijedi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

▶

$$\sin^2 x \cdot \sin^2 y + \sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x = \sin^2 x \cdot \left(\sin^2 y + \cos^2 y\right) + \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot 1 + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \ \blacksquare$$

Dokaz 80

Dokaži da je zbroj svake tri uzastopne potencije broja 5 djeljiv sa 155.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \dots$

▶

1.inačica
Neka su dane tri uzastopne potencije broja 5:

$$5^n,\ 5^{n+1},\ 5^{n+2}.$$

Zbrojimo ih:

$$5^n+5^{n+1}+5^{n+2}=5^n+5^n\cdot5^1+5^n\cdot5^2=5^n\cdot\left(1+5^1+5^2\right)=5^n\cdot(1+5+25)=31\cdot5^n=$$
$$=31\cdot5^{1+n-1}=31\cdot5^1\cdot5^{n-1}=31\cdot5\cdot5^{n-1}=155\cdot5^{n-1}.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 155. ∎

2.inačica
Neka su dane tri uzastopne potencije broja 5:

$$5^n,\ 5^{n+1},\ 5^{n+2}.$$

Zbrojimo ih:

$$5^n+5^{n+1}+5^{n+2}=5^{n-1+1}+5^{n-1+2}+5^{n-1+3}=5^{n-1}\cdot5^1+5^{n-1}\cdot5^2+5^{n-1}\cdot5^3=$$
$$=5^{n-1}\cdot\left(5^1+5^2+5^3\right)=5^{n-1}\cdot(5+25+125)=155\cdot5^{n-1}.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 155. ∎