Dokaz 81

Funkcije f i g su periodične sa zajedničkom periodom P. Dokaži da su i funkcije f(x) + g(x) i f(x) · g(x) periodične s istom periodom P.

Teorija

Funkcija f je periodična s periodom P (P ≠ 0), ako za svaki x vrijedi:
Ako je funkcija f definirana u jednoj od točaka x, x + P, onda je definirana u obje te točke i vrijedi

$$f(x+P)=f(x).$$

Broj P zove se perioda funkcije f. Najmanja pozitivna perioda funkcije f (ako postoji) zove se temeljna perioda funkcije f.

▶

Neka su f i g periodične funkcije sa zajedničkom periodom P.

$$f(x+P)=f(x) \quad , \quad g(x+P)=g(x).$$

Tada za funkcije

$$h(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad k(x)=f(x)\cdot g(x)$$

vrijedi:

♥ $h(x+P)=f(x+P)+g(x+P)=f(x)+g(x)=h(x)$

♥ $k(x+P)=f(x+P)\cdot g(x+P)=f(x)\cdot g(x)=k(x).$ ∎

Dokaz 82

Dokaži da ne postoji trokut kojem su zbrojevi svakih dvaju kutova manji od 120º.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}.$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a<b \text{ i } c<d \;\Rightarrow\; a+c<b+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a<b \;,\; c>0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

▶

Ako pretpostavimo da takav trokut postoji, onda slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta<120^{\circ}\\ \beta+\gamma<120^{\circ}\\ \gamma+\alpha<120^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow \alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\alpha<120^{\circ}+120^{\circ}+120^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\alpha+2\cdot\beta+2\cdot\gamma<360^{\circ}\Rightarrow 2\cdot(\alpha+\beta+\gamma)<360^{\circ}\Rightarrow 2\cdot(\alpha+\beta+\gamma)<360^{\circ}\;/:2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma<180^{\circ}.$$

Znamo da je zbroj kutova u trokutu 180^0. Dakle, takav trokut ne postoji. ■

Dokaz 83

Dokaži da za svaki realni broj a vrijedi nejednakost $a^4-3\cdot a^2-4\cdot a+8>0.$

Teorija

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj:

$$a^2\geq 0 \ , \ a\in R.$$

▶

$$a^4-3\cdot a^2-4\cdot a+8=a^4-4\cdot a^2+4+a^2-4\cdot a+4=\left(a^4-4\cdot a^2+4\right)+\left(a^2-4\cdot a+4\right)=$$

$$=\left(\left(a^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot 2+2^2\right)+\left(a^2-4\cdot a+4\right)=\left(a^2-2\right)^2+(a-2)^2>0.$$

Budući da a^2-2 i $a-2$ ne mogu istodobno biti jednaki nuli, vrijedi stroga nejednakost. ■

Dokaz 84

Dokaži da za svaki realni broj x vrijedi nejednakost $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)+1.001>0.$

Teorija

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj:

$$a^2\geq 0 \ , \ a\in R.$$

▶

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)+1.001=((x-1)\cdot(x-4))\cdot((x-2)\cdot(x-3))+1.001=$$

$$=\left(x^2-4\cdot x-x+4\right)\cdot\left(x^2-3\cdot x-2\cdot x+6\right)+1.001=\left(x^2-5\cdot x+4\right)\cdot\left(x^2-5\cdot x+6\right)+1.001=$$

$$=\left(x^2-5\cdot x+5-1\right)\cdot\left(x^2-5\cdot x+5+1\right)+1.001=\left(\left(x^2-5\cdot x+5\right)-1\right)\cdot\left(\left(x^2-5\cdot x+5\right)+1\right)+1.001=$$

$$=\left(x^2-5\cdot x+5\right)^2-1^2+1.001=\left(x^2-5\cdot x+5\right)^2-1+1.001=\left(x^2-5\cdot x+5\right)^2+0.001>0. \ \blacksquare$$

Dokaz 85

Dokaži da je $\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)} \ge \sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d}$, ***gdje su a, b, c, d pozitivni brojevi.***

Teorija

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a \ge 0.$$

Kvadriranje nejednakosti:

$$a \ge b > 0 \;\Rightarrow\; a^2 \ge b^2.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \;,\; a, b \ge 0.$$

Svojstvo komutativnosti za množenje:

$$a\cdot b = b\cdot a, \text{ za sve } a, b \in R.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \ge b \text{ i } c > \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}.$$

Aritmetička sredina je veća od geometrijske sredine:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a\cdot b}.$$

Neka su a, b, c , d pozitivni brojevi.
Kvadriramo nejednakost i preoblikujemo na točnu tvrdnju:

$$\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)} \ge \sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d} \;\Rightarrow\; \sqrt{(a+c)\cdot(b+d)} \ge \sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d} \;/^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)}\right)^2 \ge \left(\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d}\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+c)\cdot(b+d) \ge \left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{c\cdot d} + \left(\sqrt{c\cdot d}\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b + a\cdot d + c\cdot b + c\cdot d \ge a\cdot b + 2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d} + c\cdot d \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b + a\cdot d + b\cdot c + c\cdot d \ge a\cdot b + 2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d} + c\cdot d \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b + a\cdot d + b\cdot c + c\cdot d \ge a\cdot b + 2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d} + c\cdot d \;\Rightarrow\; a\cdot d + b\cdot c \ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot d + b\cdot c \ge 2\cdot\sqrt{a\cdot d\cdot b\cdot c} \;\Rightarrow\; a\cdot d + b\cdot c \ge 2\cdot\sqrt{a\cdot d\cdot b\cdot c} \;/:2 \;\Rightarrow\; \frac{a\cdot d + b\cdot c}{2} \ge \sqrt{a\cdot d\cdot b\cdot c}.$$

Aritmetička sredina brojeva a · d i b · c veća je od njihove geometrijske sredine. ■

Dokaz 86

Dokaži ako je zbroj dvaju vanjskih kutova nekog trokuta jednak 270º taj trokut je pravokutan.

Teorija

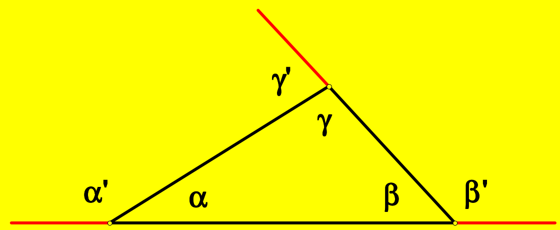
Zbrajanje jednakosti:

$$a = b \text{ i } c = d \;\Rightarrow\; a + c = b + d.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

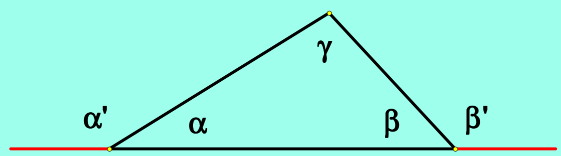
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Poučak o vanjskom kutu trokuta:
Vanjski kut trokuta jednak je zbroju onih dvaju unutarnjih koji mu nisu susjedni.



$$\alpha' = \beta + \gamma \quad , \quad \beta' = \alpha + \gamma \quad , \quad \gamma' = \alpha + \beta.$$

▶



$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \beta + \gamma \\ \beta' &= \alpha + \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{matrix}\right] \Rightarrow \alpha' + \beta' = \beta + \gamma + \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha' + \beta' = \alpha + \beta + \gamma + \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha' + \beta' = (\alpha + \beta + \gamma) + \gamma \Rightarrow \alpha' + \beta' = 180^\circ + \gamma \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{uvjet} \\ \alpha' + \beta' = 270^\circ \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 270^\circ = 180^\circ + \gamma \Rightarrow 180^\circ + \gamma = 270^\circ \Rightarrow \gamma = 270^\circ - 180^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ. \;\blacksquare$$

Dokaz 87

Dokaži da je peterokut jedini poligon koji ima onoliko dijagonala koliko i stranica.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Mnogokut, poligon ili n – terokut je dio ravnine omeđen dužinama. Ukupan broj dijagonala n – terokuta je

$$D(n)=\frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

Dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

▶

Provjerimo ima li jednadžba

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=n$$

rješenja u skupu prirodnih brojeva.

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=n \Rightarrow \frac{n\cdot(n-3)}{2}=n \;/\cdot 2 \Rightarrow n\cdot(n-3)=2\cdot n \Rightarrow n\cdot(n-3)-2\cdot n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot(n-3-2)=0 \Rightarrow n\cdot(n-5)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=0 \text{ nema smisla jer je n broj stranica} \\ n-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

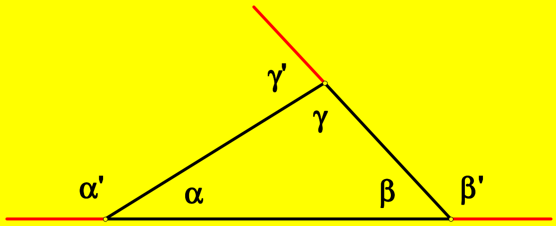
$$\Rightarrow n-5=0 \Rightarrow n=5. \blacksquare$$

Dokaz 88

Dokaži da je kut što ga zatvara simetrala vanjskog kuta α' trokuta ABC i pravac kojem pripada stranica a jednak polovici razlike kutova γ i β.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.
Poučak o vanjskom kutu trokuta:
Vanjski kut trokuta jednak je zbroju onih dvaju unutarnjih koji mu nisu susjedni.



$$\alpha' = \beta + \gamma \quad , \quad \beta' = \alpha + \gamma \quad , \quad \gamma' = \alpha + \beta .$$

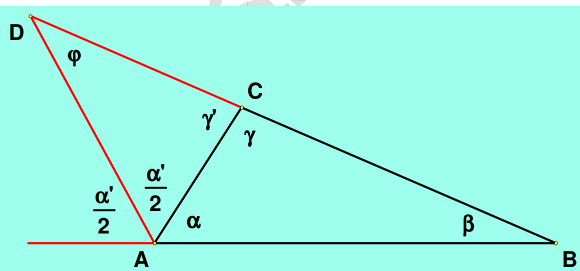
Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n .$$

Oduzimanje razlomaka:

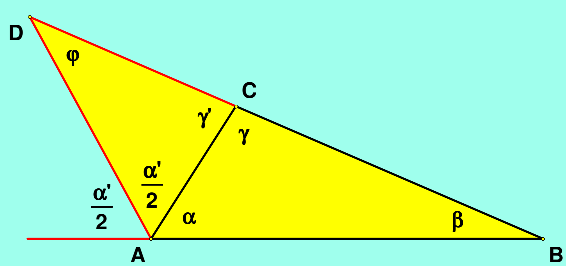
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} .$$

▶



Pretpostavimo da je

$$\gamma > \beta .$$

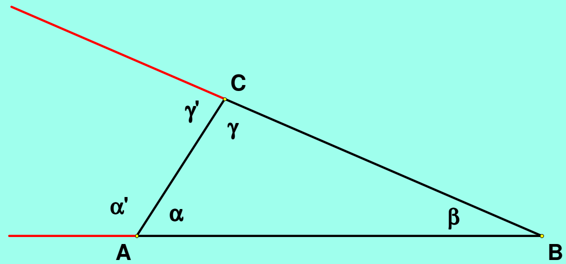


Neka je φ kut koji tražimo. Uočimo trokut ABD i primijetimo da je $\frac{\alpha'}{2}$ njegov vanjski kut pa zbog toga vrijedi

$$\frac{\alpha'}{2} = \beta + \varphi \;\Rightarrow\; \beta + \varphi = \frac{\alpha'}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\alpha'}{2} - \beta .$$

Kut α' je vanjski kut trokuta ABC.

$$\alpha' = \beta + \gamma.$$



Dalje slijedi:

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \beta + \gamma \\ \varphi &= \frac{\alpha'}{2} - \beta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\beta + \gamma}{2} - \beta \Rightarrow \varphi = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta}{1} \Rightarrow \varphi = \frac{\beta + \gamma - 2 \cdot \beta}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\gamma - \beta}{2}. \blacksquare$$

Dokaz 89

Dokaži da za svaku linearnu funkciju f(x) = a · x, realne konstante c_1 i c_2 i bilo koja dva realna broja x_1 i x_2 vrijedi $\dfrac{c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2)}{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2} = a.$

Teorija

Funkcija $f : R \rightarrow R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

▶

$$\frac{c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2)}{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2} = \frac{c_1 \cdot a \cdot x_1 + c_2 \cdot a \cdot x_2}{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2} = \frac{a \cdot (c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2)}{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2} = \frac{a \cdot (c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2)}{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2} = a. \ \blacksquare$$

Dokaz 90

Dokaži ako su dani racionalni brojevi a i b te ako je a < b, tada vrijedi $a < \frac{a+b}{2} < b.$

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b \;,\; c \in R \;\Rightarrow\; a + c < b + c.$$

Znak nejednakosti ne mijenja se ako obje njezine strane pomnožimo (ili podijelimo) istim pozitivnim realnim brojem.

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ a \ge b \\ a < b \\ a \le b \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, c > 0 \,] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \\ \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c} \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \\ \frac{a}{c} \le \frac{b}{c} \end{matrix}\right\}.$$

Ako je a < b i b < c, kraće zapisujemo a < b < c.

$$a < b < c \;\Rightarrow\; a < b \text{ i } b < c.$$

▶

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ a < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < b \;\; / + a \\ a < b \;\; / + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a + a < b + a \\ a + b < b + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a < a + b \\ a + b < 2 \cdot b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a < a + b \;\; / : 2 \\ a + b < 2 \cdot b \;\; / : 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a < \frac{a+b}{2} \\ \frac{a+b}{2} < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b. \;\blacksquare$$

Dokaz 91

Dokaži da je zbroj parnog i neparnog broja neparan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

Da je proizvoljni prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Zbroj dva prirodna broja je prirodan brroj.

$$a \in N \text{ i } b \in N \Rightarrow a + b \in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su zadani brojevi a i b:

$$a = 2 \cdot n \ , \ n \in N \quad , \quad b = 2 \cdot m + 1 \ , \ m \in N.$$

Broj a je paran, broj b je neparan broj.

Zbrojimo ih:

$$a + b = 2 \cdot n + 2 \cdot m + 1 \Rightarrow a + b = 2 \cdot (n + m) + 1 \Rightarrow [\, n + m = k \ , \ k \in N \,] \Rightarrow a + b = 2 \cdot k + 1. \ \blacksquare$$

Dokaz 92

Dokaži da simetrale šiljastih kutova pravokutnog trokuta zatvaraju kut od 135º.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

Oduzimanje jednakosti:

$$a=b \text{ i } c=d \;\Rightarrow\; a-c=b-d.$$

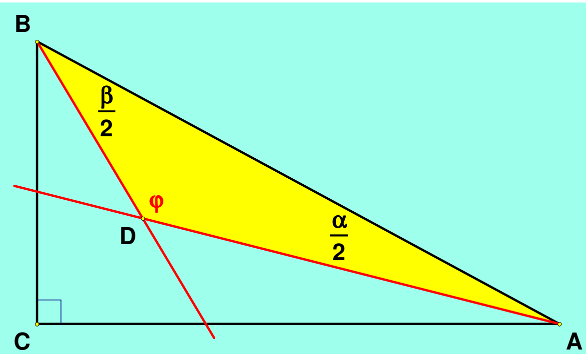
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶



Neka je D sjecište simetrala kutova α i β, a φ traženi kut.
Primijetimo da u trokutu ABD vrijedi:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\varphi=180^\circ.$$

Za pravokutni trokut ABC je

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

Iz sustava dobije se:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\varphi=180^\circ\\ \alpha+\beta=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\varphi=180^\circ \;\; /\cdot 2\\ \alpha+\beta=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+2\cdot\varphi=360^\circ\\ \alpha+\beta=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{oduzmemo}\\ \text{jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+2\cdot\varphi-(\alpha+\beta)=360^\circ-90^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+2\cdot\varphi-\alpha-\beta=270^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+2\cdot\varphi-\alpha-\beta=270^\circ \Rightarrow 2\cdot\varphi=270^\circ \Rightarrow 2\cdot\varphi=270^\circ \;/:2 \Rightarrow \varphi=135^\circ. \;\blacksquare$$

Dokaz 93

Dokaži ako je zadan kut γ trokuta ABC i kut φ što ga zatvaraju simetrale ostalih dvaju kutova trokuta, tada vrijedi $\varphi = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.
Oduzimanje jednakosti:

$$a = b \text{ i } c = d \;\Rightarrow\; a - c = b - d.$$

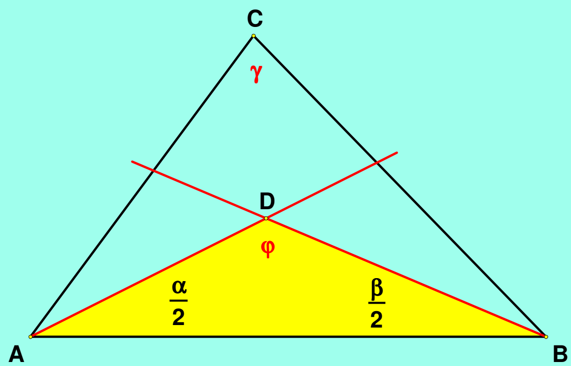
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶



Neka je točka D sjecište simetrala kutova α i β. Za kutove vrijedi:

♥ u trokutu ABD

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ$$

♥ u trokutu ABC

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Iz sustava dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180^\circ \;\; / \cdot 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + 2 \cdot \varphi = 360^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha + \beta + 2 \cdot \varphi - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ - 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + 2 \cdot \varphi - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + 2 \cdot \varphi - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot \varphi - \gamma = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \varphi = 180^\circ + \gamma \Rightarrow 2 \cdot \varphi = 180^\circ + \gamma \;\; / : 2 \Rightarrow \varphi = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}. \;\blacksquare$$

Dokaz 94

Dokaži da simetrala kuta i visina iz istog vrha trokuta zatvaraju kut koji je jednak polovini razlike ostalih kutova.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

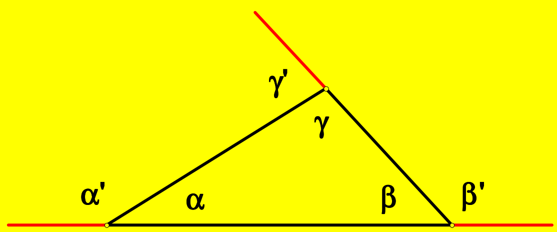
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Poučak o vanjskom kutu trokuta:
Vanjski kut trokuta jednak je zbroju onih dvaju unutarnjih koji mu nisu susjedni.



$$\alpha'=\beta+\gamma \quad , \quad \beta'=\alpha+\gamma \quad , \quad \gamma'=\alpha+\beta.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

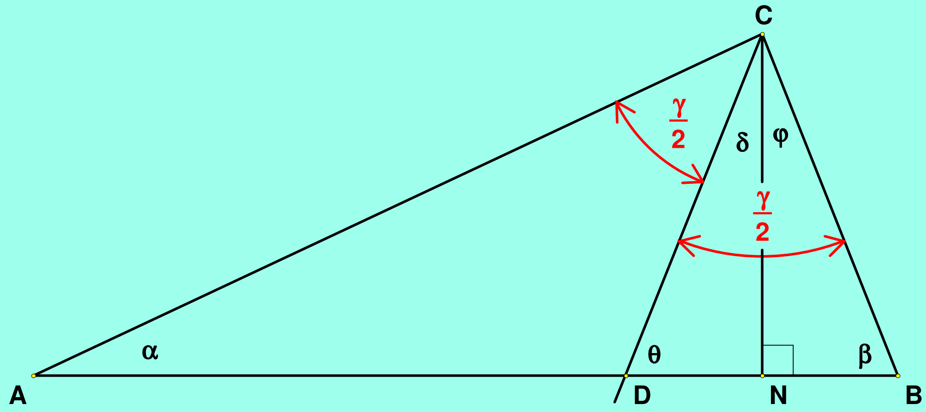
Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

▶



1.inačica
U pravokutnom trokutu NBC je

$$\beta+\varphi=90^\circ.$$

U trokutu DBC je

$$\delta+\varphi=\frac{\gamma}{2}.$$

Iz sustava dobije se tvrdnja.

$$\left.\begin{array}{l}\beta+\varphi=90^\circ\\ \delta+\varphi=\dfrac{\gamma}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\varphi=90^\circ-\beta\\ \delta+\varphi=\dfrac{\gamma}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right]\Rightarrow\delta+90^\circ-\beta=\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\delta=\frac{\gamma}{2}-90^\circ+\beta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\\ \gamma=180^\circ-\alpha-\beta\end{array}\right]\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}-90^\circ+\beta\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}-\frac{90^\circ}{1}+\frac{\beta}{1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-\alpha-\beta-180^\circ+2\cdot\beta}{2}\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-\alpha-\beta-180^\circ+2\cdot\beta}{2}\Rightarrow\delta=\frac{\beta-\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

2.inačica
U pravokutnom trokutu ANC je

$$\alpha+\left(\frac{\gamma}{2}+\delta\right)=90^\circ\Rightarrow\alpha+\frac{\gamma}{2}+\delta=90^\circ\Rightarrow\delta=90^\circ-\alpha-\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\\ \gamma=180^\circ-\alpha-\beta\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta=90^\circ-\alpha-\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}\Rightarrow\delta=\frac{90^\circ}{1}-\frac{\alpha}{1}-\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-2\cdot\alpha-\left(180^\circ-\alpha-\beta\right)}{2}\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-2\cdot\alpha-180^\circ+\alpha+\beta}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta=\frac{180^\circ-2\cdot\alpha-180^\circ+\alpha+\beta}{2}\Rightarrow\delta=\frac{\beta-\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

3.inačica
Uočimo trokut ADC. Tada je θ njegov vanjski kut pa vrijedi:

$$\theta=\alpha+\frac{\gamma}{2}.$$

U pravokutnom trokutu DNC je

$$\theta+\delta=90^\circ.$$

Iz sustava dobije se:

$$\left.\begin{array}{l}\theta=\alpha+\frac{\gamma}{2}\\ \theta+\delta=90^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right]\Rightarrow \alpha+\frac{\gamma}{2}+\delta=90^{\circ}\Rightarrow \delta=90^{\circ}-\alpha-\frac{\gamma}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}\\ \gamma=180^{\circ}-\alpha-\beta\end{array}\right]\Rightarrow \delta=90^{\circ}-\alpha-\frac{180^{\circ}-\alpha-\beta}{2}\Rightarrow \delta=\frac{90^{\circ}}{1}-\frac{\alpha}{1}-\frac{180^{\circ}-\alpha-\beta}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta=\frac{180^{\circ}-2\cdot\alpha-\left(180^{\circ}-\alpha-\beta\right)}{2}\Rightarrow \delta=\frac{180^{\circ}-2\cdot\alpha-180^{\circ}+\alpha+\beta}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta=\frac{180^{\circ}-2\cdot\alpha-180^{\circ}+\alpha+\beta}{2}\Rightarrow \delta=\frac{\beta-\alpha}{2}.\ \blacksquare$$

Dokaz 95

Dokaži ako za realne brojeve a, b, c, x, y i z koji su različiti od nule vrijedi da je $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$,

$a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2=1,$ ***onda je*** $x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=0.$

Teorija

Kvadrat trinoma:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Neka je

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{a}{x}=k\\ \frac{b}{y}=k\\ \frac{c}{z}=k\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{a}{x}=k \ /\cdot x\\ \frac{b}{y}=k \ /\cdot y\\ \frac{c}{z}=k \ /\cdot z\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=k\cdot x\\ b=k\cdot y\\ c=k\cdot z\end{array}\right\}.$$

Uporabom formule za kvadrat trinoma dobijemo:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjeti}\\ a+b+c=1\\ a^2+b^2+c^2=1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^2=1+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c) \Rightarrow 1=1+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c) \Rightarrow 1=1+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c) \Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=0.$$

Uvrstimo li u tu jednadžbu

$$a=k\cdot x \ , \ b=k\cdot y \ , \ c=k\cdot z,$$

slijedi tvrdnja.

$$a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=k\cdot x\\ b=k\cdot y\\ c=k\cdot z\end{array}\right] \Rightarrow k\cdot x\cdot k\cdot y+k\cdot x\cdot k\cdot z+k\cdot y\cdot k\cdot z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ k^2 \cdot x \cdot y + k^2 \cdot x \cdot z + k^2 \cdot y \cdot z = 0\ \Rightarrow\ k^2 \cdot (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z) = 0\ \Rightarrow\ [\,k \neq 0\,]\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = 0.\ \blacksquare$$

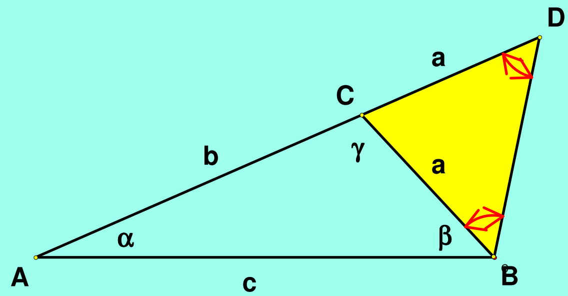
Dokaz 96

Dokaži da je u svakom trokutu duljina svake stranice manja od zbroja duljina ostalih dviju njegovih stranica.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \ . \ |BC| = |CD| = a \ , \ |AC| = b$$

Produžimo stranicu b preko C do točke D tako da bude slijedi:

$$|BC| = |CD| = a.$$

Trokut BDC je jednakokračan pa vrijedi

$$\angle CBD = \angle BDC.$$

Očigledno je u trokutu ABD

$$|AB| < |AD| \ \Rightarrow \ |AB| < |AC| + |CD| \ \Rightarrow \ c < b + a.$$

Analogno se dokazuje i za ostale nejednakosti:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c. \ ■$$

Dokaz 97

Dokaži da su svaka dva jednakokračna trokuta sukladna ako se podudaraju u jednom kraku i kutu nasuprot osnovice.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \;,\; b = b_1 \;,\; c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶

Ako se dva jednakokračna trokuta podudaraju u jednom kraku znači da se podudaraju u oba kraka pa su oni sukladni po S – K – S poučku o sukladnosti trokuta. ■

Dokaz 98

Dokaži da su u svakom jednakokračnom trokutu visine na krakove tog trokuta jednake duljine.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1\quad ,\quad a=a_1\ ,\ b=b_1\ ,\ c=c_1.$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

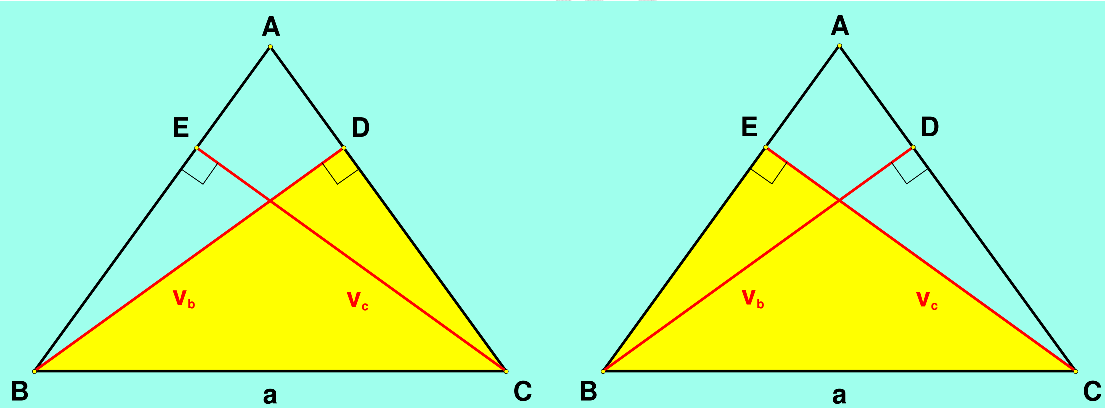
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Sa slika vidi se:

$$|BD|=v_b\ .\ |CE|=v_c\ ,\ |BC|=a\ ,\ \angle CDB=\angle CEB=90^\circ$$

Neka su točke D i E redom nožišta visina v_b i v_c. Uočimo da su trokuti ΔBCD i ΔBCE sukladni po K – S – K poučku o sukladnosti trokuta (a im je zajednička stranica, $\angle BCD=\angle CBE$, $\angle BDC=\angle BEC=90^\circ$, $\angle CBD=\angle BCE$).

Prema tome je

$$|BD|=|CE|\ \Rightarrow\ v_b=v_c.\ ■$$

Dokaz 99

Dokaži da je svaki trokut kojemu su dvije visine jednakih duljina jednakokračan trokut.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

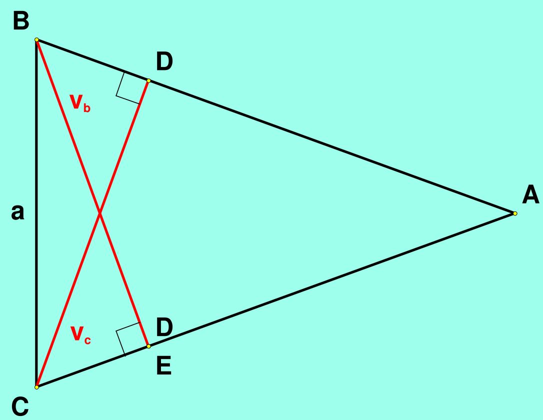
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

▶



Sa slika vidi se:

$$|BC| = a \ . \ |BE| = v_b \ , \ |CD| = v_c \ , \ \angle CEB = \angle CDB = 90^\circ$$

Neka su točke D i E redom nožišta visina v_c i v_b. Primijetimo da su trokuti ΔCDB i ΔCEB sukladni po S – S – K poučku o sukladnosti trokuta (a im je zajednička stranica, $v_b = v_c$, $\angle CDB = \angle CEB = 90^\circ$).

Odatle slijedi da je

$$\angle BCE = \angle CBE$$

što znači da je trokut ABC jednakokračan sa stranicom a kao osnovicom. ■

Dokaz 100

Dokaži da je svaka tetiva kružnice kojoj ne pripada središte te kružnice manja od duljine promjera te kružnice.

Teorija

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Tetiva je spojnica dviju točaka kružnice.
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Promjer (dijametar) je dužina koja prolazi kroz središte kružnice i čiji krajevi se nalaze na kružnici. Duljinu promjera označavamo slovom d. Sveza promjera i polumjera:

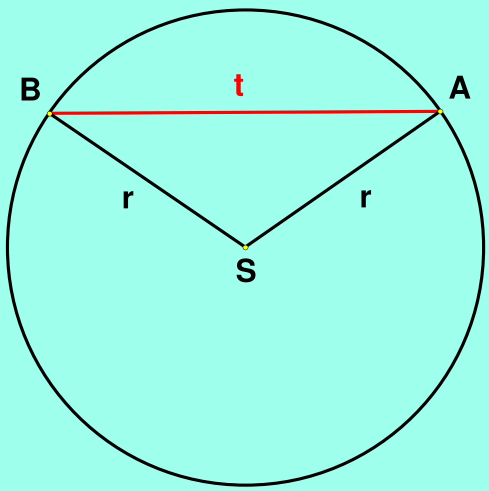
$$d = 2 \cdot r.$$

Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica.

▶



Sa slika vidi se:

$$|SA| = |SB| = r \ , \ |AB| = t$$

U kružnici nacrtamo trokut kojem je jedan vrh središte kružnice S, a jedna stranica tetiva.
Po nejednakosti trokuta dobijemo:

$$|AB| < |SA| + |SB| \ \Rightarrow \ t < r + r \ \Rightarrow \ t < 2 \cdot r \ \Rightarrow \ t < d. \ ■$$