

### Zadatak 061 (Božidar, srednja škola)

Kolika je brzina širenja zvuka u zraku:

- na temperaturi  $t_1 = 20\text{ °C}$
- na temperaturi  $t_2 = -20\text{ °C}$
- na apsolutnoj nuli  $t_3 = -273.15\text{ °C}$ ? (brzina zvuka pri  $0\text{ °C}$   $v_0 = 331\text{ m/s}$ )

#### Rješenje 061

$$t_1 = 20\text{ °C}, \quad t_2 = -20\text{ °C}, \quad t_3 = -273.15\text{ °C}, \quad v_0 = 331\text{ m/s}, \quad v_1 = ?, \quad v_2 = ?, \quad v_3 = ?$$

Brzina zvuka u zraku mijenja se s temperaturom i možemo je približno odrediti prema izrazu

$$v = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{t}{273.15}},$$

gdje je  $v_0$  brzina zvuka pri  $0\text{ °C}$  ( $331\text{ m/s}$ ), a  $t$  temperatura zraka.

a)

$$v_1 = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{t_1}{273.15}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{20}{273.15}} = 342.90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

$$v_2 = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{t_2}{273.15}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - \frac{20}{273.15}} = 318.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)

$$v_3 = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{t_3}{273.15}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - \frac{273.15}{273.15}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Na apsolutnoj nuli ( $T = 0\text{ K}$ ) brzina zvuka jednaka je nuli.

#### Vježba 061

Kolika je brzina širenja zvuka u zraku na temperaturi  $t = 100\text{ °C}$  (brzina zvuka pri  $0\text{ °C}$   $v_0 = 331\text{ m/s}$ )

**Rezultat:**  $386.87\text{ m/s}$ .

### Zadatak 062 (Zvonimir, srednja škola)

Jednadžba transverzalnog vala ima oblik  $y = 0.12\text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot \left(t - \frac{x}{50}\right)\right)$ . Odredite:

- amplitudu vala
- frekvenciju valnog gibanja
- valnu duljinu
- brzinu vala
- smjer širenja vala.

#### Rješenje 062

$$y = 0.12\text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot \left(t - \frac{x}{50}\right)\right), \quad A = ?, \quad v = ?, \quad \lambda = ?, \quad v = ?$$

Val je širenje titranja iz izvora vala kroz neko sredstvo. Zrake vala su pravci po kojima se titranje širi od čestice do čestice. Udaljenost za koju se val proširio dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj zove se duljina vala  $\lambda$ . Veza između valne duljine  $\lambda$ , periode  $T$  i brzine vala  $v$  je

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Frekvencija  $v$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $v$  i periode  $T$  postoji veza:

$$T \cdot v = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{T}$$

Kada se neprigušeni harmonički titraji iz izvora prostiru brzinom  $v$  u smjeru pozitivne osi  $x$ , elongacija  $y(x, t)$  točke koja je udaljena za  $x$  od izvora vala jednaka je

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right),$$

gdje su  $A$  amplituda,  $T$  perioda titranja i  $\lambda$  valna duljina. U jednadžbi se pojavljuju dvije varijable: vrijeme  $t$  i udaljenost  $x$  od položaja ravnoteže.

- Ako je vrijeme  $t$  konstantno jednadžba daje pomake pojedinih točaka u tom trenutku, odnosno raspodjelu faza titranja u vremenu.
- Ako je udaljenost  $x$  konstantna jednadžba daje titranje čestica u vremenu na toj udaljenosti, odnosno promjenu elongacije u vremenu.

Preoblikujemo zadanu jednadžbu vala i usporedimo s formulom.

$$y = 0.12 \text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot \left(t - \frac{x}{50}\right)\right) \Rightarrow y = 0.12 \text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot t - \frac{16 \cdot \pi}{50} \cdot x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0.12 \text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot t - \frac{16 \cdot \pi}{50} \cdot x\right) \Rightarrow y = 0.12 \text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot t - \frac{8 \cdot \pi}{25} \cdot x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right) \\ y = 0.12 \text{ m} \cdot \sin\left(16 \cdot \pi \cdot t - \frac{8 \cdot \pi}{25} \cdot x\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.12 \text{ m} \\ \frac{2 \cdot \pi}{T} = 16 \cdot \pi \\ \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{8 \cdot \pi}{25} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.12 \text{ m} \\ \frac{2 \cdot \pi}{T} = 16 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \\ \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{8 \cdot \pi}{25} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.12 \text{ m} \\ \frac{1}{T} = 8 \\ \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{25} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.12 \text{ m} \\ v = 8 \text{ Hz} \\ \lambda = \frac{25}{4} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0.12 \text{ m} \\ v = 8 \text{ Hz} \\ \lambda = 6.25 \text{ m} \end{array} \right\}$$

a)

$$A = 0.12 \text{ m}.$$

b)

$$v = 8 \text{ Hz}.$$

c)

$$\lambda = 6.25 \text{ m}.$$

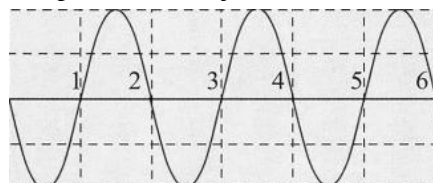
d)

Brzina vala iznosi:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \lambda \cdot v = 6.25 \text{ m} \cdot 8 \frac{1}{\text{s}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

e)

Iz jednadžbe je očito da se val širi u pozitivnom smjeru osi  $x$ .



### Vježba 062

Jednadžba transverzalnog vala ima oblik  $y = 2 \text{ cm} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{0.01 \text{ s}} - \frac{x}{30 \text{ cm}}\right)\right)$ . Odredite:

- a) amplitudu vala
- b) frekvenciju valnog gibanja
- c) valnu duljinu.

**Rezultat:**  $A = 2 \text{ cm}$ ,  $\nu = 100 \text{ Hz}$ ,  $\lambda = 30 \text{ cm}$ .

### Zadatak 063 (Azra, tehnička škola)

Snaga zvučnog izvora je 5 mW. Na kojoj će udaljenosti od izvora intenzitet zvuka odgovarati intenzitetu praga čujnosti? Pri proračunu pretpostavimo da se val giba od izvora do slušatelja bez smetnje. Također, imati na umu činjenicu da se val širi u svim smjerovima u prostoru.

A. 0.5 km    B. 1 km    C. 2 km    D. 4 km    E. 20 km

(intenzitet  $I_0$  odgovara otprilike najslabijem zvuku kojega još prosječno uho može čuti te iznosi  $I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2$  pri frekvenciji 1 kHz)

### Rješenje 063

$$P = 5 \text{ mW} = 0.005 \text{ W}, \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2, \quad r = ?$$

Intenzitet  $I$  zvučnih valova je snaga koju nosi zvučni val pri prolazu jediničnom površinom okomitom na smjer širenja zvuka, tj.

$$I = \frac{P}{S},$$

gdje je za točkasti izvor vala

$$S = 4 \cdot r^2 \cdot \pi,$$

a  $r$  je polumjer kugle jer se val širi u svim smjerovima.

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} I = I_0 \\ I = \frac{P}{S} \end{array} \right\} \Rightarrow I_0 = \frac{P}{S} \Rightarrow I_0 = \frac{P}{S} \cdot \frac{S}{I_0} \Rightarrow S = \frac{P}{I_0} \Rightarrow [S = 4 \cdot r^2 \cdot \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{P}{I_0} \Rightarrow 4 \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{P}{I_0} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^2 = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot I_0} \Rightarrow r^2 = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot I_0} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{P}{4 \cdot \pi \cdot I_0}} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{\pi \cdot I_0}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{0.005 \text{ W}}{\pi \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} = 19947.11 \text{ m} \approx 20 \text{ km}.$$

Odgovor je pod E.

### Vježba 063

Snaga zvučnog izvora je 5000  $\mu\text{W}$ . Na kojoj će udaljenosti od izvora intenzitet zvuka odgovarati intenzitetu praga čujnosti? Pri proračunu pretpostavimo da se val giba od izvora do slušatelja bez smetnje. Također, imati na umu činjenicu da se val širi u svim smjerovima u prostoru.

A. 0.5 km    B. 1 km    C. 2 km    D. 4 km    E. 20 km

(intenzitet  $I_0$  odgovara otprilike najslabijem zvuku kojega još prosječno uho može čuti te iznosi  $I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2$  pri frekvenciji 1 kHz)

**Rezultat:** E.

**Zadatak 064 (Marinko, srednja škola)**

Razlika u hodu dvaju valova koji interferiraju iznosi  $\frac{\lambda}{2}$ . Kolika je razlika faza tih valova?

- A.  $180^\circ$       B.  $90^\circ$       C.  $360^\circ$       D.  $0^\circ$       E.  $\frac{\pi}{2}$

**Rješenje 064**

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta \varphi = ?$$

Dvije točke koje se nalaze na udaljenosti  $x_1$  i  $x_2$  od izvora vala imaju međusobnu razliku u fazi, odnosno pomak u fazi:

$$\Delta \varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x.$$

$$\Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x \Rightarrow \left[ \Delta x = \frac{\lambda}{2} \right] \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = \pi \Rightarrow \Delta \varphi = 180^\circ.$$

Odgovor je pod A.

**Vježba 064**

Razlika u hodu dvaju valova koji interferiraju iznosi  $\lambda$ . Kolika je razlika faza tih valova?

- A.  $180^\circ$       B.  $90^\circ$       C.  $360^\circ$       D.  $0^\circ$       E.  $\frac{\pi}{2}$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 065 (Sven, srednja škola)**

Na koncertu rock – skupine izmjeren je srednji intenzitet zvuka od  $5 \text{ W / m}^2$ . Kolika energija je prenesena na bubnjić uha površine  $0.5 \text{ cm}^2$  ako je koncert trajao 2 sata?

- A.  $1.8 \text{ J}$       B.  $18 \text{ kJ}$       C.  $5 \text{ J}$       D.  $0.5 \text{ mJ}$

**Rješenje 065**

$$I = 5 \text{ W / m}^2, \quad A = 0.5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \quad t = 2 \text{ h} = 7200 \text{ s}, \quad E = ?$$

Intenzitet  $I$  vala je energija koju val prenese u jediničnom vremenu kroz jediničnu površinu smještenu okomito na smjer širenja:

$$I = \frac{E}{A \cdot t}.$$

$$I = \frac{E}{A \cdot t} \Rightarrow \frac{E}{A \cdot t} = I \Rightarrow \frac{E}{A \cdot t} = I \cdot A \cdot t \Rightarrow E = I \cdot A \cdot t = 5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot 7200 \text{ s} = 1.8 \text{ J}.$$

Odgovor je pod A.

**Vježba 065**

Na koncertu rock – skupine izmjeren je srednji intenzitet zvuka od  $10 \text{ W / m}^2$ . Kolika energija je prenesena na bubnjić uha površine  $0.5 \text{ cm}^2$  ako je koncert trajao 1 sat?

- A.  $1.8 \text{ J}$       B.  $18 \text{ kJ}$       C.  $5 \text{ J}$       D.  $0.5 \text{ mJ}$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 066 (Sven, srednja škola)

Zvučnim valom prenosi se 50 mJ u sekundi kroz površinu od 2 m<sup>2</sup>. Izračunajte intenzitet zvuka.

#### Rješenje 066

$$E = 50 \text{ mJ} = 0.05 \text{ J}, \quad t = 1 \text{ s}, \quad A = 2 \text{ m}^2, \quad I = ?$$

Intenzitet I vala je energija koju val prenese u jediničnom vremenu kroz jediničnu površinu smještenu okomito na smjer širenja:

$$I = \frac{E}{A \cdot t}.$$
$$I = \frac{E}{A \cdot t} = \frac{0.05 \text{ J}}{2 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ s}} = 0.025 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 25 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}.$$

#### Vježba 066

Zvučnim valom prenosi se 100 mJ u sekundi kroz površinu od 4 m<sup>2</sup>. Izračunajte intenzitet zvuka.

**Rezultat:** 25 mW / m<sup>2</sup>.

### Zadatak 067 (Miro, tehnička škola)

Intenzitet Sunčeva zračenja na udaljenosti od  $1.5 \cdot 10^{11}$  m od središta Sunca iznosi 1400 W / m<sup>2</sup>. Za koliko se smanji masa Sunca tijekom 365 dana uz pretpostavku da se energija koju Sunce zrači u potpunosti dobiva nuklearnim izgaranjem njegove mase? Napomena: Površina sfere polumjera R određuje se izrazom  $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ . (brzina svjetlosti u praznini  $c = 3 \cdot 10^8$  m / s)

#### Rješenje 067

$$R = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad I = 1400 \text{ W / m}^2, \quad t = 365 \text{ d} = [365 \cdot 24 \cdot 60] = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s},$$
$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}, \quad \Delta m = ?$$

Intenzitet I vala je energija koju val prenese u jediničnom vremenu kroz jediničnu površinu smještenu okomito na smjer širenja:

$$I = \frac{E}{S \cdot t} \Rightarrow E = I \cdot S \cdot t.$$

Relacija koja izražava ekvivalenciju između mase i energije

$$E = m \cdot c^2,$$

gdje je c brzina svjetlosti u praznini.

$$\left. \begin{array}{l} E = \Delta m \cdot c^2 \\ E = I \cdot S \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta m \cdot c^2 = I \cdot S \cdot t \Rightarrow \Delta m \cdot c^2 = I \cdot S \cdot t \cdot \frac{1}{c^2} \Rightarrow \Delta m = \frac{I \cdot S \cdot t}{c^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[ S = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \right] \Rightarrow \Delta m = \frac{I \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t}{c^2} =$$
$$= \frac{1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}\right)^2 \cdot 3.15 \cdot 10^7 \text{ s}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1.39 \cdot 10^{17} \text{ kg}.$$

#### Vježba 067

Intenzitet Sunčeva zračenja na udaljenosti od  $1.5 \cdot 10^{11}$  m od središta Sunca iznosi 1.4 kW / m<sup>2</sup>. Za koliko se smanji masa Sunca tijekom 365 dana uz pretpostavku da se energija koju Sunce zrači u potpunosti dobiva nuklearnim izgaranjem njegove mase? Napomena: Površina sfere polumjera R određuje se izrazom  $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ . (brzina svjetlosti u praznini  $c = 3 \cdot 10^8$  m / s)

**Rezultat:**  $1.39 \cdot 10^{17}$  kg.

**Zadatak 068 (Tomo, gimnazija)**

Brodski ultrazvučni radar radi na frekvenciji 35 MHz. Brod se kreće prema obali i na radaru se registrira promjena frekvencije na 36.82 MHz. Brzina zvuka je 343 m/s. Kolika je brzina broda?

**Rješenje 068**

$f_0 = 35 \text{ MHz} = 3.5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ ,  $f_b = 36.82 \text{ MHz} = 3.682 \cdot 10^7 \text{ Hz}$  **frekvencija koju registrira brod**,  $v_s = 0 \text{ m/s}$  **stijena obale miruje**,  $v = 343 \text{ m/s}$ ,  $v_b = ?$

Pojava promjene frekvencije pri relativnom gibanju prijammnika i izvora zvuka naziva se Dopplerovim učinkom. Pritom vrijedi formula

$$f_p = f_i \cdot \frac{v + v_p}{v - v_i}$$

gdje je  $f_p$  frekvencija koju registrira prijammnik,  $f_i$  frekvencija kojom titra izvor vala,  $v_i$  brzina gibanja izvora vala,  $v_p$  brzina gibanja prijammnika,  $v$  brzina širenja zvuka u sredstvu (zraku). Kod približavanja su  $v_p$  i  $v_i$  pozitivni, a kod udaljavanja negativni.

Primijetimo da je stijena obale najprije prijammnik valova koje šalje brod. Za emitirani signal kada je stijena obale prijammnik vrijedi:

$$f_s = f_0 \cdot \frac{v + v_s}{v - v_b} \Rightarrow [v_s = 0] \Rightarrow f_s = f_0 \cdot \frac{v}{v - v_b}$$

Nakon toga stijena obale postaje izvor odbijenih valova. Za odbijeni signal kada je brod prijammnik vrijedi:

$$f_b = f_s \cdot \frac{v + v_b}{v - v_s} \Rightarrow [v_s = 0] \Rightarrow f_b = f_s \cdot \frac{v + v_b}{v}$$

Dobili smo sustav jednačžba.

$$\left. \begin{aligned} f_s &= f_0 \cdot \frac{v}{v - v_b} \\ f_b &= f_s \cdot \frac{v + v_b}{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_b = f_0 \cdot \frac{v}{v - v_b} \cdot \frac{v + v_b}{v} \Rightarrow f_b = f_0 \cdot \frac{v}{v - v_b} \cdot \frac{v + v_b}{v} \Rightarrow f_b = f_0 \cdot \frac{v + v_b}{v - v_b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_0 \cdot \frac{v + v_b}{v - v_b} = f_b \Rightarrow f_0 \cdot \frac{v + v_b}{v - v_b} = f_b \cdot \frac{1}{f_0} \Rightarrow \frac{v + v_b}{v - v_b} = \frac{f_b}{f_0}$$

Jednostavnosti radi uvedemo zamjenu

$$t = \frac{f_b}{f_0}$$

Sada je

$$\frac{v + v_b}{v - v_b} = t \Rightarrow \frac{v + v_b}{v - v_b} = t \cdot (v - v_b) \Rightarrow v + v_b = t \cdot (v - v_b) \Rightarrow v + v_b = t \cdot v - t \cdot v_b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_b + t \cdot v_b = t \cdot v - v \Rightarrow (1 + t) \cdot v_b = v \cdot (t - 1) \Rightarrow (1 + t) \cdot v_b = v \cdot (t - 1) \cdot \frac{1}{t + 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_b = v \cdot \frac{t - 1}{t + 1} \Rightarrow \left[ t = \frac{f_b}{f_0} \right] \Rightarrow v_b = v \cdot \frac{\frac{f_b}{f_0} - 1}{\frac{f_b}{f_0} + 1} \Rightarrow v_b = v \cdot \frac{\frac{f_b - 1}{f_0}}{\frac{f_b + 1}{f_0}} \Rightarrow v_b = v \cdot \frac{f_b - f_0}{f_b + f_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_b = v \cdot \frac{f_b - f_0}{f_b + f_0} \Rightarrow v_b = v \cdot \frac{f_b - f_0}{f_b + f_0} = 343 \frac{m}{s} \cdot \frac{3.682 \cdot 10^7 \text{ Hz} - 3.5 \cdot 10^7 \text{ Hz}}{3.682 \cdot 10^7 \text{ Hz} + 3.5 \cdot 10^7 \text{ Hz}} = 8.69 \frac{m}{s}$$

### Vježba 068

Odmor!

**Rezultat:** ...

### Zadatak 069 (Lana, gimnazija)

Šišmiš leti brzinom 5 m/s u potrazi za kukcima. Pritom emitira ultrazvučni signal frekvencije 40 kHz koji mu se nakon refleksije sa kukca vraća frekvencijom 40.6 kHz. Odredi brzinu kukca. (brzina zvuka u zraku  $v = 340$  m/s)

### Rješenje 069

$v_s = 5$  m/s **brzina šišmiša** (imam govornu manu pa govorim sismisa ☺),  $f_0 = 40$  kHz =  $4 \cdot 10^4$  Hz,  $f_s = 40.6$  kHz =  $4.06 \cdot 10^4$  Hz,  $v = 340$  m/s,  $v_k = ?$

Pojava promjene frekvencije pri relativnom gibanju prijammnika i izvora zvuka naziva se Dopplerovim učinkom. Pritom vrijedi formula

$$f_p = f_i \cdot \frac{v + v_p}{v - v_i}$$

gdje je  $f_p$  frekvencija koju registrira prijammnik,  $f_i$  frekvencija kojom titra izvor vala,  $v_i$  brzina gibanja izvora vala,  $v_p$  brzina gibanja prijammnika,  $v$  brzina širenja zvuka u sredstvu (zraku). Kod približavanja su  $v_p$  i  $v_i$  pozitivni, a kod udaljavanja negativni.

Nesretni kukac je najprije prijammnik valova koje šalje zločesti šišmiš. Za emitirani signal kada je kukac prijammnik vrijedi:

$$f_k = f_0 \cdot \frac{v + v_k}{v - v_s}$$

Nakon toga kukac postaje izvor odbijenih valova. Za odbijeni signal kada je šišmiš prijammnik vrijedi:

$$f_s = f_k \cdot \frac{v + v_s}{v - v_k}$$

Dobili smo sustav jednadžba.

$$\left. \begin{array}{l} f_k = f_0 \cdot \frac{v + v_k}{v - v_s} \\ f_s = f_k \cdot \frac{v + v_s}{v - v_k} \end{array} \right\} \Rightarrow f_s = f_0 \cdot \frac{v + v_k}{v - v_s} \cdot \frac{v + v_s}{v - v_k} \Rightarrow f_s = f_0 \cdot \frac{v + v_s}{v - v_s} \cdot \frac{v + v_k}{v - v_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_0 \cdot \frac{v + v_s}{v - v_s} \cdot \frac{v + v_k}{v - v_k} = f_s \Rightarrow f_0 \cdot \frac{v + v_s}{v - v_s} \cdot \frac{v + v_k}{v - v_k} = f_s \cdot \frac{v - v_s}{(v + v_s) \cdot f_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v + v_k}{v - v_k} = \frac{f_s}{f_0} \cdot \frac{v - v_s}{v + v_s}$$

Jednostavnosti radi uvodimo zamjenu.

$$t = \frac{f_s}{f_0} \cdot \frac{v - v_s}{v + v_s} = \frac{4.06 \cdot 10^4 \text{ Hz}}{4 \cdot 10^4 \text{ Hz}} \cdot \frac{340 \frac{m}{s} - 5 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s} + 5 \frac{m}{s}} = 0.98558.$$

Sada je

$$\frac{v+v_k}{v-v_k} = t \Rightarrow \frac{v+v_k}{v-v_k} = t \cdot (v-v_k) \Rightarrow v+v_k = t \cdot (v-v_k) \Rightarrow v+v_k = t \cdot v - t \cdot v_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_k + t \cdot v_k = t \cdot v - v \Rightarrow (1+t) \cdot v_k = v \cdot (t-1) \Rightarrow (t+1) \cdot v_k = v \cdot (t-1) \cdot \frac{1}{t+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_k = v \cdot \frac{t-1}{t+1} = \left[ \begin{array}{l} v = 340 \frac{m}{s} \\ t = 0.98558 \end{array} \right] = 340 \frac{m}{s} \cdot \frac{0.98558-1}{0.98558+1} = -2.47 \frac{m}{s} \text{ . kukac se udaljava}$$

### Vježba 069

Odmor!

**Rezultat:** ...

### Zadatak 070 (Nina, gimnazija)

Neka svirala emitira zvuk frekvencije 196 Hz. Kad ona i G žica violine zajedno emitiraju zvuk može se čuti 10 udara u 8 s. Udari su sve rjeđi kad se violinska žica polako napinje. Kolika je prvotna frekvencija violinske žice?

#### Rješenje 070

$$f_1 = 196 \text{ Hz}, \quad n = 10, \quad t = 8 \text{ s}, \quad f_2 = ?$$

Frekvencija  $f$  je broj titraja (okreta) u jedinici vremena (u 1 sekundi).

$$f = \frac{n}{t},$$

gdje je  $n$  broj titraja (okreta) za vrijeme  $t$ .

Udari nastaju superpozicijom dvaju valova koji se vrlo malo razlikuju u frekvencijama. Broj udara u sekundi jednak je razlici frekvencija valova koji interferiraju.

$$f_u = f_1 - f_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} f_u = \frac{n}{t} \\ f_u = f_1 - f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{n}{t} = f_1 - f_2 \Rightarrow f_2 = f_1 - \frac{n}{t} = 196 \text{ Hz} - \frac{10}{8 \text{ s}} = 194.75 \text{ Hz}.$$

### Vježba 070

Neka svirala emitira zvuk frekvencije 196 Hz. Kad ona i G žica violine zajedno emitiraju zvuk može se čuti 20 udara u 16 s. Udari su sve rjeđi kad se violinska žica polako napinje. Kolika je prvotna frekvencija violinske žice?

**Rezultat:** 194.75 Hz.

### Zadatak 071 (Fric, gimnazija)

Dva izvora u zraku u kojem je brzina zvuka 343 m/s emitiraju valove valnih duljina 102.1 cm i 103.9 cm.

a) Kolika je frekvencija udara?

b) Kolika je resultantna frekvencija?

#### Rješenje 071

$$v = 343 \text{ m/s}, \quad \lambda_1 = 102.1 \text{ cm} = 1.021 \text{ m}, \quad \lambda_2 = 103.9 \text{ cm} = 1.039 \text{ m}, \quad f_u = ?, \quad f = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda},$$

gdje je  $v$  brzina širenja vala,  $\lambda$  valna duljina,  $f$  frekvencija.

Zvučni udari nastaju slaganjem zvukova jednakih amplituda, a podjednakih frekvencija.



Broj udara u sekundi jednak je razlici frekvencija valova koji interferiraju.

$$f_u = f_1 - f_2.$$

Frekvencija nastalog vala (rezultantna frekvencija) je

$$f = \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2).$$

a)

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \\ f_2 = \frac{v}{\lambda_2} \end{array} \right\} \Rightarrow [f_u = f_1 - f_2] \Rightarrow f_u = \frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2} \Rightarrow f_u = v \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) =$$

$$= 343 \frac{m}{s} \cdot \left( \frac{1}{1.021 m} - \frac{1}{1.039 m} \right) = 5.82 \text{ Hz} \approx 6 \text{ Hz}.$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \\ f_2 = \frac{v}{\lambda_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ f = \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) \right] \Rightarrow f = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{v}{\lambda_1} + \frac{v}{\lambda_2} \right) \Rightarrow f_u = \frac{v}{2} \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) =$$

$$= \frac{343 \frac{m}{s}}{2} \cdot \left( \frac{1}{1.021 m} + \frac{1}{1.039 m} \right) = 333 \text{ Hz}.$$

### Vježba 071

Dva izvora u zraku u kojem je brzina zvuka 343 m / s emitiraju valove valnih duljina 10.21 dm i 10.39 dm.

a) Kolika je frekvencija udara?

b) Kolika je rezultantna frekvencija?

**Rezultat:** 6 Hz, 333 Hz.

### Zadatak 072 (Fric, gimnazija)

Kada zajedno zazvuče tonovi s dviju žica, oni daju 4 udara u sekundi, a rezultantna frekvencija je 330 Hz. Žice su od istog materijala, napete jednakom silom. Koliki je omjer duljina žica?

### Rješenje 072

$$n = 4, \quad t = 1 \text{ s}, \quad f = 330 \text{ Hz}, \quad F_1 = F_2 = F, \quad L_2 : L_1 = ?$$

Frekvencija  $f$  je broj titraja (okreta) u jedinici vremena (u 1 sekundi).

$$f = \frac{n}{t},$$

gdje je  $n$  broj titraja (okreta) za vrijeme  $t$ .

Osnovna frekvencija kojom žica titra jednaka je

$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je  $L$  duljina žice,  $F$  napetost žice,  $\mu$  omjer mase i duljine žice.

Zvučni udari nastaju slaganjem zvukova jednakih amplituda, a podjednakih frekvencija.

Broj udara u sekundi jednak je razlici frekvencija valova koji interferiraju.

$$f_u = f_1 - f_2.$$

Frekvencija nastalog vala (rezultantna frekvencija) je

$$f = \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2).$$

Najprije izračunamo  $f_u$ .

$$f_u = \frac{n}{t} = \frac{4}{1 \text{ s}} = 4 \text{ Hz}.$$

Pomoću sustava jednačba nađemo  $f_1$  i  $f_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} f_u = f_1 - f_2 \\ f = \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f_u = f_1 - f_2 \\ f = \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) \cdot 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f_u = f_1 - f_2 \\ 2 \cdot f = f_1 + f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f_1 - f_2 = f_u \\ f_1 + f_2 = 2 \cdot f \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koefficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot f_1 = f_u + 2 \cdot f \Rightarrow 2 \cdot f_1 = f_u + 2 \cdot f \quad /: 2 \Rightarrow f_1 = \frac{f_u + 2 \cdot f}{2} =$$

$$= \frac{4 \text{ Hz} + 2 \cdot 330 \text{ Hz}}{2} = 332 \text{ Hz}.$$

Računamo  $f_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 332 \text{ Hz} \\ f_1 + f_2 = 2 \cdot f \end{array} \right\} \Rightarrow 332 + f_2 = 2 \cdot 330 \Rightarrow 332 + f_2 = 660 \Rightarrow f_2 = 660 - 332 \Rightarrow f_2 = 328 \text{ Hz}.$$

Gledamo omjer.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot L_1} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\frac{1}{2 \cdot L_2} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot L_1} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\frac{1}{2 \cdot L_2} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{332 \text{ Hz}}{328 \text{ Hz}} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{332 \text{ Hz}}{328 \text{ Hz}} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{83}{82}.$$

### Vježba 072

Kada zajedno zazvuče tonovi s dviju žica, oni daju 12 udara u 3 sekunde, a rezultatna frekvencija je 330 Hz. Žice su od istog materijala, napete jednakom silom. Koliki je omjer duljina žica?

**Rezultat:** 83 : 82.

### Zadatak 073 (Igor, tehnička škola)

Kolika je potrebna sila napinjanja čelične žice promjera 0.5 mm da se na duljini 32 cm dobije ton osnovne frekvencije 440 Hz? (gustoća čelika  $\rho = 7850 \text{ kg / m}^3$ )

#### Rješenje 073

$$d = 0.5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad L = 32 \text{ cm} = 0.32 \text{ m}, \quad f = 440 \text{ Hz} = 440 \text{ s}^{-1},$$

$$\rho = 7850 \text{ kg / m}^3, \quad F = ?$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Volumen valjka promjera baze  $d$  i visine  $h$  računa se po formuli

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot h}{4}.$$

Osnovna frekvencija kojom žica titra jednaka je

$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{L},$$

gdje je L duljina žice, F napetost žice,  $\mu$  omjer mase i duljine žice.

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot 2 \cdot L \Rightarrow 2 \cdot L \cdot f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 2 \cdot L \cdot f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2 \cdot L \cdot f)^2 &= \left( \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot 2 \right)^2 \Rightarrow 4 \cdot L^2 \cdot f^2 = \frac{F}{\mu} \Rightarrow \frac{F}{\mu} = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \Rightarrow \frac{F}{\mu} = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \cdot \mu \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \cdot \mu \Rightarrow F = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \cdot \frac{m}{L} \Rightarrow F = 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \frac{m}{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot m \Rightarrow F = 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \rho \cdot V \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{žica ima oblik valjka,} \\ \text{promjera baze } d \text{ i} \\ \text{visine (duljine) } L \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \rho \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot L \Rightarrow F = 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \rho \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot L \Rightarrow F = L^2 \cdot f^2 \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= L^2 \cdot f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi \Rightarrow F = (L \cdot f \cdot d)^2 \cdot \rho \cdot \pi = \\ &= \left( 0.32 \text{ m} \cdot 440 \frac{1}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right)^2 \cdot 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi = 122.23 \text{ N.} \end{aligned}$$

### Vježba 073

Kolika je potrebna sila napinjanja čelične žice promjera 1 mm da se na duljini 16 cm dobije ton osnovne frekvencije 440 Hz? (gustoća čelika  $\rho = 7850 \text{ kg / m}^3$ )

**Rezultat:** 122.23 N.

### Zadatak 074 (Igor, tehnička škola)

Klavirska žica napeta je silom 600 N. Kolika je duljina žice koja daje ton frekvencije 880 Hz? Promjer žice je 0.6 mm,  $\rho = 7.7 \text{ g / cm}^3$ .

### Rješenje 074

$$F = 600 \text{ N}, \quad f = 880 \text{ Hz} = 880 \text{ s}^{-1}, \quad d = 0.6 \text{ mm} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad \rho = 7.7 \text{ g / cm}^3 = 7700 \text{ kg / m}^3, \quad L = ?$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Volumen valjka promjera baze d i visine h računa se po formuli

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h.$$

Osnovna frekvencija kojom žica titra jednaka je

$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{L},$$

gdje je L duljina žice, F napetost žice,  $\mu$  omjer mase i duljine žice.

$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot 2 \cdot L \Rightarrow 2 \cdot L \cdot f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 2 \cdot L \cdot f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2 \cdot L \cdot f)^2 &= \left( \sqrt{\frac{F}{\mu}} \right)^2 \Rightarrow 4 \cdot L^2 \cdot f^2 = \frac{F}{\mu} \Rightarrow \frac{F}{\mu} = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \Rightarrow \frac{F}{\mu} = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \quad / \cdot \mu \Rightarrow \\ &\Rightarrow F = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \cdot \mu \Rightarrow F = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \cdot \frac{m}{L} \Rightarrow F = 4 \cdot L^2 \cdot f^2 \cdot \frac{m}{L} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F = 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot m \Rightarrow F = 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \rho \cdot V \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{žica ima oblik valjka,} \\ \text{promjera baze } d \text{ i} \\ \text{visine (duljine) } L \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \rho \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot L \Rightarrow F = 4 \cdot L \cdot f^2 \cdot \rho \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot L \Rightarrow F = L^2 \cdot f^2 \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow F = L^2 \cdot f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi \Rightarrow L^2 \cdot f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi = F \Rightarrow \\ &\Rightarrow L^2 \cdot f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi = F \quad / \cdot \frac{1}{f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi} \Rightarrow L^2 = \frac{F}{f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow L^2 &= \frac{F}{f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{F}{f^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \pi}} \Rightarrow L = \frac{1}{f \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot \pi}} = \\ &= \frac{1}{880 \frac{1}{s} \cdot 6 \cdot 10^{-4} m} \cdot \sqrt{\frac{600 N}{7700 \frac{kg}{m^3} \cdot \pi}} = 0.2983 m = 29.83 cm. \end{aligned}$$

### Vježba 074

Klavirska žica napeta je silom 1200 N. Kolika je duljina žice koja daje ton frekvencije 880 Hz? Promjer žice je 0.6 mm,  $\rho = 7.7 \text{ g/cm}^3$ .

**Rezultat:** 42.18 cm.

### Zadatak 075 (Ana, maturantica)

Na užetu duljine 5 m pobudom na kraju nastaje val koji ima 4 brijega i 4 dola. Izračunajte brzinu i frekvenciju vala ako titraj traje 0.6 s.

A.  $2 \frac{m}{s}$  i 1.7 Hz      B.  $4 \frac{m}{s}$  i 3.4 Hz      C.  $0.6 \frac{m}{s}$  i 1.7 Hz      D.  $5 \frac{m}{s}$  i 2.8 Hz

### Rješenje 075

$L = 5 \text{ m}$ , 4 brijega + 4 dola,  $T = 0.6 \text{ s}$ ,  $v = ?$ ,  $f = ?$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

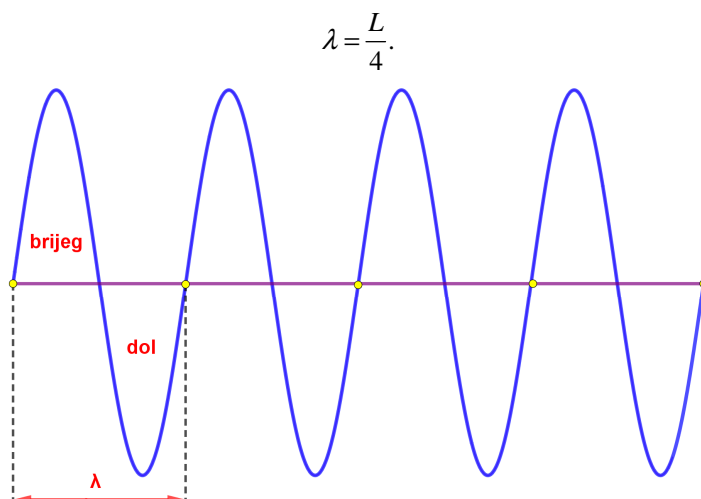
$$v = \frac{\lambda}{T},$$

gdje je  $v$  brzina širenja vala,  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja).

Frekvencija  $f$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $f$  i periode  $T$  postoji veza:

$$T \cdot f = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{T}.$$

Na užetu dugačkom  $L$  nastaje val koji ima 4 brijega i 4 dola, tj. nastaju 4 puna vala čija valna duljina iznosi:



Brzina je vala

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{\frac{L}{4}}{T} \Rightarrow v = \frac{L}{4 \cdot T} = \frac{5 \text{ m}}{4 \cdot 0.6 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Frekvencija iznosi:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.6 \text{ s}} = 1.7 \text{ Hz}.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 075

Na užetu duljine 10 m pobudom na kraju nastaje val koji ima 8 bregova i 8 dolova. Izračunajte brzinu i frekvenciju vala ako titraj traje 0.6 s.

- A.  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $1.7 \text{ Hz}$       B.  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $3.4 \text{ Hz}$       C.  $0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $1.7 \text{ Hz}$       D.  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $2.8 \text{ Hz}$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 076 (Pixy, maturan)

Izvor titra frekvencijom 325 Hz, a val se širi brzinom 340 m / s. Kolika je najmanja udaljenost točaka za koje je razlika u fazi  $\frac{\pi}{8}$ ?

### Rješenje 076

$$f = 325 \text{ Hz} = 325 \text{ s}^{-1}, \quad v = 340 \text{ m / s}, \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{8}, \quad \Delta x = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f},$$

gdje je  $v$  brzina širenja vala,  $\lambda$  valna duljina,  $f$  frekvencija.

Razlika faza dviju točaka udaljenih za  $\Delta x = x_2 - x_1$  određena je izrazom

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda}.$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{v}{f} \\ \Delta\varphi &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\frac{v}{f}} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot f}{v} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot f}{v} = \Delta\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot f}{v} = \Delta\varphi \cdot \frac{v}{2 \cdot \pi \cdot f} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta\varphi \cdot v}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\frac{\pi}{8} \cdot 340 \frac{m}{s}}{2 \cdot \pi \cdot 325 \frac{1}{s}} =$$

$$= 0.0654 \text{ m} = 6.54 \text{ cm.}$$

### Vježba 076

Izvor titra frekvencijom 325 Hz, a val se širi brzinom 340 m / s. Kolika je najmanja udaljenost točaka za koje je razlika u fazi  $\frac{\pi}{4}$ ?

**Rezultat:** 13.08 cm.

### Zadatak 077 (Pixy, maturant)

Na jednom kraju bazena pobuđen je val koji je do drugog kraja stigao za 48 s. Udaljenost dvaju bregova vala iznosi 80 cm i oni udare u stijenku bazena u razmaku 1.6 s. Izračunaj:

- brzinu vala
- frekvenciju vala
- duljinu vala.

### Rješenje 077

$$t = 48 \text{ s}, \quad \lambda = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}, \quad T = 1.6 \text{ s}, \quad v = ?, \quad f = ?, \quad d = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

gdje je  $v$  brzina širenja vala,  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja).

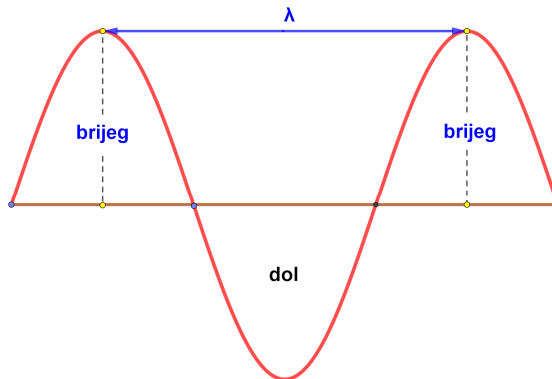
Frekvencija  $f$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $f$  i periode  $T$  postoji veza:

$$T \cdot f = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{T}.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je  $v$  stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.



a)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.8 \text{ m}}{1.6 \text{ s}} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.6 \text{ s}} = 0.625 \frac{1}{\text{s}} = 0.625 \text{ Hz} \text{ ili } f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.8 \text{ m}} = 0.625 \frac{1}{\text{s}} = 0.625 \text{ Hz}.$$

c)

$$d = v \cdot t = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 48 \text{ s} = 24 \text{ m}.$$

### Vježba 077

Odmor!

**Rezultat:** ...

### Zadatak 078 (Miroslav, gimnazija)

Zadana je jednadžba vala  $y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{24 \text{ m}}\right)$ . Kolika je brzina širenja toga vala?

A.  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Rješenje 078

$$y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{24 \text{ m}}\right), \quad v = ?$$

Valna duljina je udaljenost dviju najbližih točaka vala koje titraju u istoj fazi. Drugim riječima, to je udaljenost do koje se proširi val za vrijeme jednog titraja, tj.

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

gdje je  $v$  brzina širenja vala,  $T$  perioda (vrijeme jednog titraja).

Elongacija (udaljenost od položaja ravnoteže)  $y$  točke udaljene za  $x$  od ishodišta za vrijeme  $t$  iznosi

$$y = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right),$$

gdje je  $A$  amplituda (najveća udaljenost od ravnotežnog položaja),  $T$  perioda (vrijeme jednoga titraja),  $x$  udaljenost točke od ishodišta za vrijeme  $t$ ,  $\lambda$  valna duljina.

Usporedit ćemo opći oblik jednadžbe vala sa zadanom jednadžbom i naći  $T$  i  $\lambda$ .

$$\left. \begin{array}{l} y = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \\ y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{24 \text{ m}}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \\ y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{8 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{24 \text{ m}}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \\ y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{8 \text{ s}} - \frac{x}{24 \text{ m}}\right)\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = 8 \text{ s} \\ \lambda = 24 \text{ m} \end{array} \right\}.$$

Brzina širenja vala je

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{24 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 078

Zadana je jednačba vala  $y = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4 \text{ s}} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{48 \text{ m}}\right)$ . Kolika je brzina širenja toga vala?

- A.  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Rezultat:** B.

### Zadatak 079 (H<sub>2</sub>O, gimnazija)

Žica duljine 50 cm daje osnovni ton frekvencije 240 Hz. Kolika je najmanja frekvencija tona kada žicu skratimo za 20 cm pri jednakoj napetosti žice?

#### Rješenje 079

$$L = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}, \quad v_1 = 240 \text{ Hz}, \quad \Delta L = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad F, \quad v_2 = ?$$

Frekvencija  $v$  je broj titraja (okreta) u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Osnovna frekvencija kojom napeta žica titra jednaka je

$$v = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je  $L$  duljina žice,  $F$  napetost žice,  $\mu$  omjer mase i duljine žice.

Za frekvenciju osnovnog tona vrijedi

$$v_1 = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Poslije skraćivanja žice za  $\Delta L$  ona će davati osnovni ton frekvencije

$$v_2 = \frac{1}{2 \cdot (L - \Delta L)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Iz sustava jednačba dobije se:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \\ v_2 &= \frac{1}{2 \cdot (L - \Delta L)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot (L - \Delta L)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot (L - \Delta L)} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{L}{L - \Delta L} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{L}{L - \Delta L} \cdot v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{L}{L - \Delta L} \cdot v_1 =$$
$$= \frac{0.5 \text{ m}}{0.5 \text{ m} - 0.2 \text{ m}} \cdot 240 \text{ Hz} = 400 \text{ Hz}.$$

### Vježba 079

Žica duljine 100 cm daje osnovni ton frekvencije 240 Hz. Kolika je najmanja frekvencija tona kada žicu skratimo za 40 cm pri jednakoj napetosti žice?

**Rezultat:** 400 Hz.



### Zadatak 080 (H<sub>2</sub>O, gimnazija)

Odredite omjer frekvencija  $v_1$  i  $v_2$  osnovnih tonova željezne i srebrne žice. Žice imaju jednake duljine, poprečne presjeke i jednako su napete. (gustoća željeza  $\rho_1 = 7800 \text{ kg / m}^3$ , gustoća srebra  $\rho_2 = 10600 \text{ kg / m}^3$ )

#### Rješenje 080

$$L_1 = L_2 = L, \quad S_1 = S_2 = S, \quad F_1 = F_2 = F, \quad \rho_1 = 7800 \text{ kg / m}^3, \quad \rho_2 = 10600 \text{ kg / m}^3, \\ v_1 : v_2 = ?$$

Obujam (volumen) valjka ploštine baze (osnovke) S i visine h iznosi:

$$V = S \cdot h.$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari definiramo omjerom mase m i obujma V tijela:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Frekvencija  $v$  je broj titraja (okreta) u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Osnovna frekvencija kojom napeta žica titra jednaka je

$$v = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

gdje je L duljina žice, F napetost žice,  $\mu$  omjer mase i duljine žice.

$$\mu = \frac{m}{L} \Rightarrow \mu = \frac{\rho \cdot V}{L} \Rightarrow \mu = \frac{\rho \cdot S \cdot L}{L} \Rightarrow \mu = \frac{\rho \cdot S \cdot L}{L} \Rightarrow \mu = \rho \cdot S.$$

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2 \cdot L_1} \cdot \sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} \\ v_2 = \frac{1}{2 \cdot L_2} \cdot \sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_1 \cdot S}} \\ v_2 = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_2 \cdot S}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_1 \cdot S}}}{\frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_2 \cdot S}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{2 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_1 \cdot S}}}{2 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_2 \cdot S}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\rho_1 \cdot S}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho_2 \cdot S}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\frac{F}{\rho_1 \cdot S}}{\frac{F}{\rho_2 \cdot S}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2 \cdot S}{\rho_1 \cdot S}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{10600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1.17.$$

#### Vježba 080

Odmor!

Rezultat: ...