

Zadatak 221 (Maja, gimnazija)

Vozeći bez pogona, automobil se giba konstantnom brzinom 40 km/h po cesti sa strminom od 20% ($\text{tg } \alpha = 0.2$). Koliki će put automobil prijeći od mjesta u kojem cesta postane horizontalna pod pretpostavkom da je sila kočenja ostala nepromijenjena? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

Rješenje 221

$$v = 40 \text{ km/h} = [40 : 3.6] = 11.11 \text{ m/s}, \quad \text{tg } \alpha = 0.2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

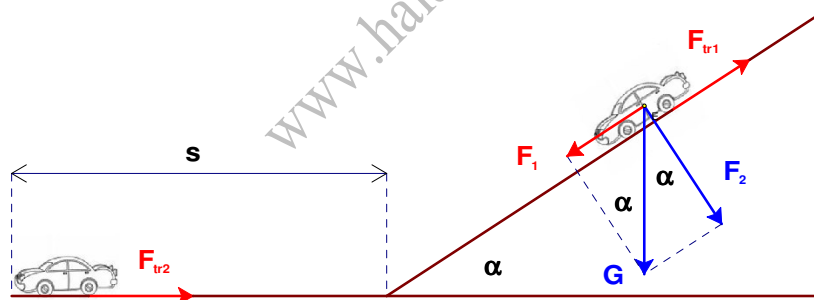
gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$



Sa slike vidi se:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \\ \cos \alpha = \frac{F_2}{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = G \cdot \sin \alpha \\ F_2 = G \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ F_2 = m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}.$$

Trenje F_{tr1} između automobila i kosine iznosi:

$$F_{tr1} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr1} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Budući da se automobil giba niz kosinu konstantnom brzinom, komponenta F_1 sile teže koja uvjetuje ubrzavanje automobila niz kosinu po iznosu jednaka je sili trenja F_{tr1} :

$$\begin{aligned} F_1 = F_{tr1} &\Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu = \text{tg } \alpha \Rightarrow \mu = 0.2 \text{ faktor trenja.} \end{aligned}$$

Kada automobil dođe na ravnu cestu ima brzinu v pa mu je kinetička energija

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Na ravnoj cesti sila trenja F_{tr2} između automobila i ceste iznosi:

$$F_{tr2} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr2} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Sila kočenja (trenje) na putu s obavi rad koji je jednak promjeni kinetičke energije automobila:

$$\begin{aligned} W = E_k &\Rightarrow F_{tr2} \cdot s = E_k \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{1}{\mu \cdot m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \\ &= \frac{\left(11.11 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 31.46 \text{ m.} \end{aligned}$$

Vježba 221

Vozeći bez pogona, automobil se giba konstantnom brzinom 72 km/h po cesti sa strminom od 20% ($\text{tg } \alpha = 0.2$). Koliki će put automobil prijeći od mjesta u kojem cesta postane horizontalna pod pretpostavkom da je sila kočenja ostala nepromijenjena? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

Rezultat: 101.94 m.

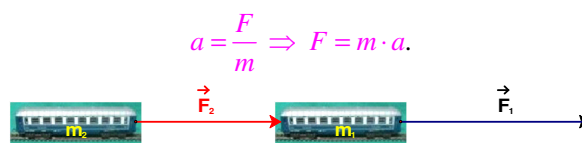
Zadatak 222 (Ivan, tehnička škola)

Dva su vagona mase $m_1 = 10 \text{ t}$ i $m_2 = 20 \text{ t}$ međusobno spojena i stoje na horizontalnim tračnicama. Kolikom je silom napregnuta spojka ako vagon manje mase vučemo silom $3 \cdot 10^4 \text{ N}$? (Zanemariti trenje.)

Rješenje 222

$$m_1 = 10 \text{ t} = 10^4 \text{ kg}, \quad m_2 = 20 \text{ t} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad F_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad F_2 = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.



Budući da su vagoni spojeni, sila F_1 ubrzava cijeli sustav, mase $m_1 + m_2$, akceleracijom a :

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2}.$$

Sila F_2 kojom je napregnuta spojka na kraju koje je vagon mase m_2 , iznosi:

$$\begin{aligned} F_2 = m_2 \cdot a &\Rightarrow F_2 = m_2 \cdot \frac{F_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \\ &= 3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \frac{2 \cdot 10^4 \text{ kg}}{10^4 \text{ kg} + 2 \cdot 10^4 \text{ kg}} = 2 \cdot 10^4 \text{ N} = 20 \text{ kN.} \end{aligned}$$

Vježba 222

Dva su vagona mase $m_1 = 10 \text{ t}$ i $m_2 = 20 \text{ t}$ međusobno spojena i stoje na horizontalnim tračnicama. Kolikom je silom napregnuta spojka ako vagon manje mase vučemo silom $6 \cdot 10^4 \text{ N}$? (Zanemariti trenje.)

Rezultat: 40 kN.

Zadatak 223 (Hrvoje, tehnička škola)

Za 10 s brzina tijela jednoliko se poveća s 3 m/s na 12 m/s. Koliki put prijeđe tijelo za to vrijeme?

Rješenje 223

$$t = 10 \text{ s}, \quad v_1 = 3 \text{ m/s}, \quad v_2 = 12 \text{ m/s}, \quad s = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje je gibanje stalnom brzinom. Put je razmjernan s vremenom:

$$s = v \cdot t.$$

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje stalnim ubrzanjem (akceleracijom).

Akceleracija opisuje promjenu brzine u jedinici vremena (u 1 sekundi).

Srednja akceleracija:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t},$$

gdje su v_1 početna brzina gibanja, v_2 konačna brzina gibanja.

Srednja brzina v_s kod jednolikog ubrzanog pravocrtnog gibanja je:

$$v_s = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

gdje su v_1 početna brzina gibanja, v_2 konačna brzina gibanja.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 , a akceleracija je pozitivna, vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ s = v_s \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t = \frac{3 \frac{m}{s} + 12 \frac{m}{s}}{2} \cdot 10 \text{ s} = 75 \text{ m}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{v_2 - v_1}{t} \\ s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot t^2 \Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (v_2 - v_1) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot t \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2) \cdot t =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(3 \frac{m}{s} + 12 \frac{m}{s} \right) \cdot 10 \text{ s} = 75 \text{ m}.$$

Vježba 223

Za 5 s brzina tijela jednoliko se poveća sa 6 m/s na 24 m/s. Koliki put prijeđe tijelo za to vrijeme?

Rezultat: 75 m.

Zadatak 224 (Dada, medicinska škola)

Kamen je bačen vertikalno uvis početnom brzinom $v_0 = 100 \text{ m/s}$. Nakon koliko vremena će se kamen nalaziti na visini $h = 25 \text{ m}$? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 224

$$v_0 = 100 \text{ m/s}, \quad h = 25 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato mu je visina h u času kad je prošlo vrijeme t dana ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vrijeme t nakon kojeg će se kamen nalaziti na visini h iznosi:

$$\begin{aligned} h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 &\Rightarrow 25 = 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \Rightarrow 25 = 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 50 = 200 \cdot t - 9.81 \cdot t^2 &\Rightarrow 9.81 \cdot t^2 - 200 \cdot t + 50 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9.81 \cdot t^2 - 200 \cdot t + 50 = 0 \\ a = 9.81, b = -200, c = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} &\left. \begin{array}{l} a = 9.81, b = -200, c = 50 \\ \Rightarrow t_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \cdot 9.81 \cdot 50}}{2 \cdot 9.81} \Rightarrow \end{array} \right\} \\ \Rightarrow t_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 1962}}{19.62} &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{38038}}{19.62} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{200 \pm 195.03}{19.62} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{200 - 195.03}{19.62} \\ t_2 = \frac{200 + 195.03}{19.62} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{4.97}{19.62} \\ t_2 = \frac{395.03}{19.62} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 0.25 \text{ s} \\ t_2 = 20.13 \text{ s} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Vrijeme t_1 je vrijeme za koje će kamen doći do visine h , a vrijeme t_2 predstavlja vrijeme za koje drugi puta dolazi kamen na tu visinu pri padanju.

Vježba 224

Kamen je bačen vertikalno uvis početnom brzinom $v_0 = 360 \text{ km/h}$. Nakon koliko vremena će se kamen nalaziti na visini $h = 0.025 \text{ km}$? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $t_1 = 0.25 \text{ s}$, $t_2 = 20.13 \text{ s}$.

Zadatak 225 (Malena, medicinska škola)

Jabuka padne sa stabla za 3 s i udari o zemlju brzinom 29.4 m/s. Koliko je ubrzanje sile teže?

Rješenje 225

$$\Delta t = 3 \text{ s}, \quad v_1 = 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = 29.4 \text{ m/s}, \quad g = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje s početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i akceleracijom $a = g$. Relacija za brzinu za ubrzano gibanje vrijedi i za slobodni pad:

$$v = g \cdot t.$$

Akceleracija je promjena brzine u jedinici vremena. Srednja akceleracija jest omjer razlike brzina Δv u nekome vremenskom intervalu Δt i toga vremenskog intervala

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje pri kojemu je taj kvocijent stalan (konstantan) za svaki Δv i odgovarajući Δt duž tog puta pa pišemo

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Ubrzanje sile teže g iznosi:



$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow g = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{29.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 225

Jabuka padne sa stabla za 6 s i udari o zemlju brzinom 58.8 m/s. Koliko je ubrzanje sile teže?

Rezultat: 9.8 m/s².

Zadatak 226 (Malena, medicinska škola)

Kamen izbacimo horizontalno s visine od 4.9 m prema moru. Na koju će udaljenost od nas pasti kamen ako ga izbacimo brzinom 20 m/s? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 226

$$h = 4.9 \text{ m}, \quad v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad D = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Brzina tijela u horizontalnom smjeru je stalnog iznosa v_0 , a u vertikalnom zbog slobodnog pada

$$v = g \cdot t.$$

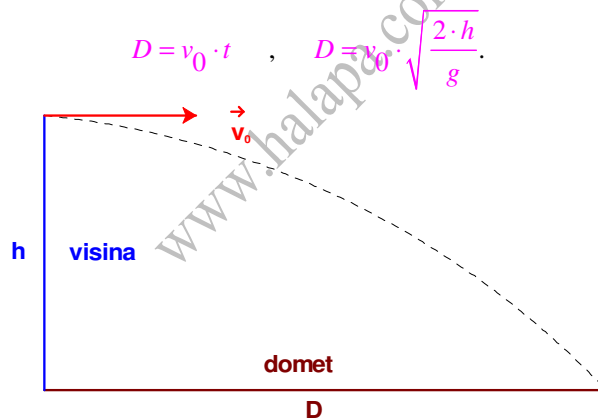
Položaj tijela je određen u svakom trenutku prijednim putom u horizontalnom smjeru (jednoliko pravocrtno gibanje)

$$x = v_0 \cdot t$$

i vertikalnom smjeru (slobodni pad)

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Domat D horizontalnog hica je horizontalna udaljenost između mjesta izbacivanja tijela i mjesta pada na tlo:



Udaljenost na koju će kamen pasti iznosi:

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4.9 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 19.99 \text{ m} \approx 20 \text{ m}.$$

Vježba 226

Kamen izbacimo horizontalno s visine od 4.9 m prema moru. Na koju će udaljenost od nas pasti kamen ako ga izbacimo brzinom 40 m/s? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 40 m.

Zadatak 227 (Zoran, student)

Tijelo mase 4 kg guramo silom od 30 N pod kutom od 20° u odnosu na kosinu. Nagib kosine je 30°. Koliki je koeficijent trenja ako je akceleracija tijela 0.8 m/s²? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 227

$$m = 4 \text{ kg}, \quad F = 30 \text{ N}, \quad \alpha = 20^\circ, \quad \beta = 30^\circ, \quad a = 0.8 \text{ m/s}^2, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom

Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

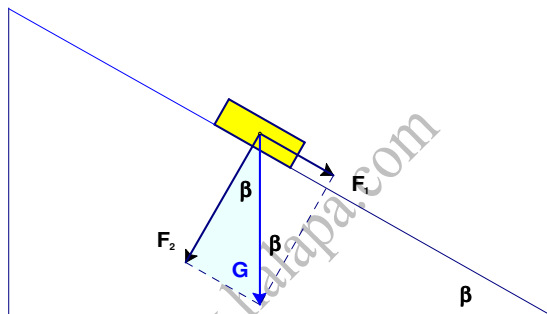
Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ koeficijent (faktor) trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.



- Na tijelo mase m , koje je na kosini, djeluje sila teža $G = m \cdot g$.

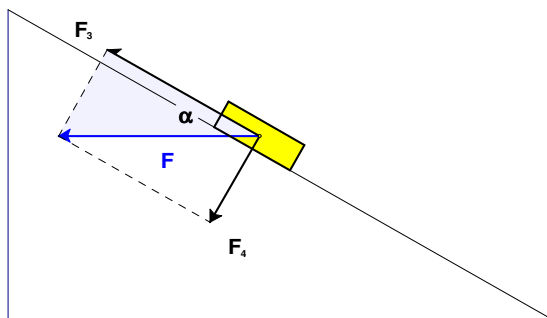
Računamo komponentu F_1 sile teže G u smjeru kosine i komponentu F_2 sile teže G okomitu na kosinu. Sa slike vidi se:

$$\sin \beta = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \beta \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \beta,$$

$$\cos \beta = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \beta \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \beta.$$

Trenje F_{tr1} zbog sile teže G iznosi:

$$F_{tr1} = \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{tr1} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \beta.$$



- Na tijelo mase m , koje je na kosini, djeluje sila F pod kutom α .

Računamo komponentu F_3 sile F u smjeru kosine i komponentu F_4 sile F okomitu na kosinu. Sa slike vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{F_4}{F} \Rightarrow F_4 = F \cdot \sin \alpha,$$

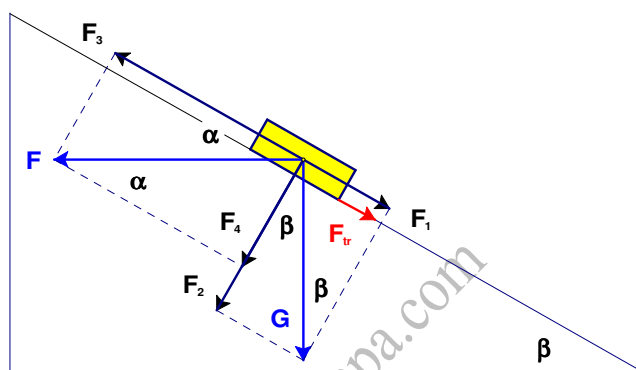
$$\cos \alpha = \frac{F_3}{F} \Rightarrow F_3 = F \cdot \cos \alpha.$$

Trenje F_{tr2} uvjetovano silom F iznosi:

$$F_{tr2} = \mu \cdot F_4 \Rightarrow F_{tr2} = \mu \cdot F \cdot \sin \alpha.$$

Ukupno trenje F_{tr} koje se javlja kad tijelo mase m guramo silom F uz kosinu jednako je zbroju trenja F_{tr1} i F_{tr2} :

$$F_{tr} = F_{tr1} + F_{tr2} \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \beta + \mu \cdot F \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha).$$



Ukupna sila $m \cdot a$ (rezultantna sila) kojom tijelo guramo uz kosinu jednaka je razlici komponenata paralelnih sa kosinom F_3 i F_1 umanjenoj za trenje F_{tr} . Pomoću drugog Newtonova poučka dobije se traženi koeficijent trenja μ :

$$m \cdot a = F_3 - F_1 - F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$m \cdot a = F_3 - F_1 - F_{tr} \Rightarrow \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha) = F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta - m \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha) = F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta - m \cdot a \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta - m \cdot a}{m \cdot g \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha} = \frac{30 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ - 4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30^\circ - 4 \text{ kg} \cdot 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 30^\circ + 30 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ} = 0.11.$$

Vježba 227

Tijelo mase 400 dag guramo silom od 0.03 kN pod kutom od 20° u odnosu na kosinu. Nagib kosine je 30° . Koliki je koeficijent trenja ako je akceleracija tijela 0.8 m/s^2 ? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.11.

Zadatak 228 (Zoran, student)

Tijelo mase 3 kg vučemo silom od 25 N pod kutom od 30° u odnosu na kosinu. Nagib kosine je 40° . Kolika je akceleracija tijela ako je koeficijent trenja 0.1? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 228

$$m = 3 \text{ kg}, \quad F = 25 \text{ N}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 40^\circ, \quad \mu = 0.1, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

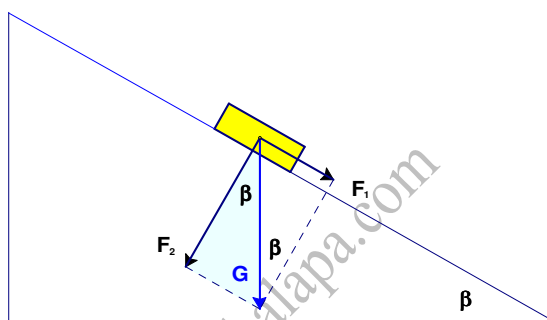
Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ koeficijent (faktor) trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.

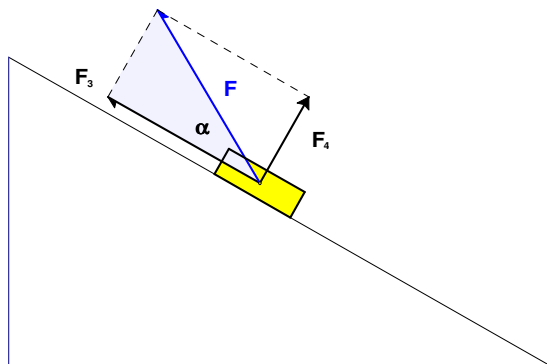


- Na tijelo mase m , koje je na kosini, djeluje sila teža $G = m \cdot g$.

Računamo komponentu F_1 sile teže G u smjeru kosine i komponentu F_2 sile teže G okomitu na kosinu. Sa slike vidi se:

$$\sin \beta = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \beta \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \beta,$$

$$\cos \beta = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \beta \Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \cos \beta.$$

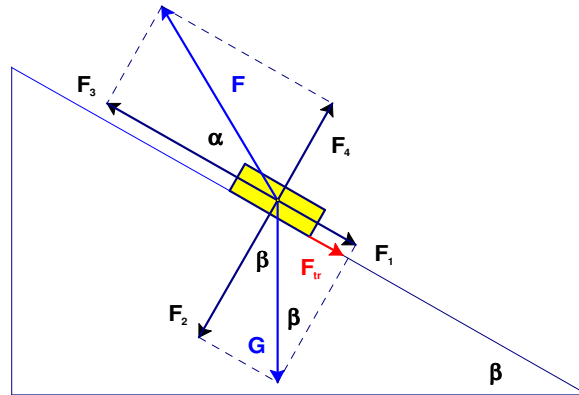


- Na tijelo mase m , koje je na kosini, djeluje sila F pod kutom α .

Računamo komponentu F_3 sile F u smjeru kosine i komponentu F_4 sile F okomitu na kosinu. Sa slike vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{F_4}{F} \Rightarrow F_4 = F \cdot \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{F_3}{F} \Rightarrow F_3 = F \cdot \cos \alpha.$$



Sa slike vidi se da sile F_2 i F_4 koje okomito djeluju na kosinu i uvjetuju trenje F_{tr} imaju suprotan smjer! Zato trenje F_{tr} koje se javlja kad tijelo mase m vučemo uz kosinu, nagiba β , pod kutom α iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot (F_2 - F_4) \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \beta - F \cdot \sin \alpha).$$

Ukupna sila $m \cdot a$ (rezultantna sila) kojom tijelo vučemo uz kosinu jednaka je razlici komponenta paralelnih sa kosinom F_3 i F_1 umanjenoj za trenje F_{tr} . Pomoću drugog Newtonova poučka dobije se akceleracija a:

$$m \cdot a = F_3 - F_1 - F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = F_3 - F_1 - F_{tr} \quad | : m \Rightarrow a = \frac{F_3 - F_1 - F_{tr}}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \beta - F \cdot \sin \alpha)}{m} =$$

$$= \frac{25 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ - 3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 40^\circ - 0.1 \cdot \left(3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 40^\circ - 25 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \right)}{3 \text{ kg}} = 0.44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 228

Tijelo mase 300 dag vučemo silom od 0.025 kN pod kutom od 30° u odnosu na kosinu. Nagib kosine je 40° . Kolika je akceleracija tijela ako je koeficijent trenja 0.1? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.44 m/s^2 .

Zadatak 229 (Ivan, obrtnička škola)

Kolika je težina tijela koje sila od 60 N pokrene u horizontalnom smjeru akceleracijom 4 m/s^2 ? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 229

$$F = 60 \text{ N}, \quad a = 4 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad G = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Težina tijela iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \quad / : a \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{F}{a} \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow G = \frac{F}{a} \cdot g = \frac{60 \text{ N}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 147.15 \text{ N}.$$

Vježba 229

Kolika je težina tijela koje sila od 30 N pokrene u horizontalnom smjeru akceleracijom 2 m/s^2 ? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 147.15 N.

Zadatak 230 (Josip, gimnazija)

Čovjek gura teret mase 30 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut $\alpha = 30^\circ$ s horizontalom. Koeficijent trenja je 0.2. Kolika je sila? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 230

$$m = 30 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \mu = 0.2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Prvi Newtonov poučak:

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

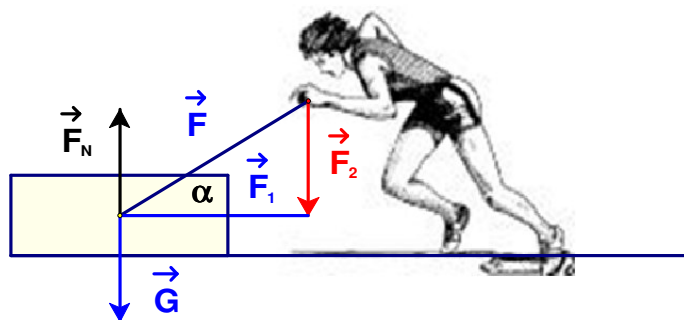
$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ koeficijent (faktor) trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.



Sa slike vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{F_2}{F} \Rightarrow F_2 = F \cdot \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{F_1}{F} \Rightarrow F_1 = F \cdot \cos \alpha.$$

Silu F kojom čovjek gura teret rastavimo na dvije komponente:

- komponenta F_1 djeluje u smjeru horizontalne podloge i uvjetuje gibanje tereta,

- komponenta F_2 djeluje okomito na horizontalnu podlogu i pritišće podlogu.
- Budući da sila teža G i komponenta F_2 djeluju okomito na podlogu u istom smjeru, trenje iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot (G + F_2) \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot (m \cdot g + F \cdot \sin \alpha).$$

Teret se giba jednoliko po horizontalnoj podlozi pa je sila F_1 po iznosu jednaka trenju F_{tr} (prvi Newtonov poučak):

$$F_1 = F_{tr} \Rightarrow F \cdot \cos \alpha = \mu \cdot (m \cdot g + F \cdot \sin \alpha) \Rightarrow F \cdot \cos \alpha = \mu \cdot m \cdot g + \mu \cdot F \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot F \cdot \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow F \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) = \mu \cdot m \cdot g \quad | \cdot \frac{1}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} = \frac{0.2 \cdot 30 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 30^\circ - 0.2 \cdot \sin 30^\circ} = 76.84 \text{ N}.$$

Vježba 230

Čovjek gura teret mase 60 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut $\alpha = 30^\circ$ s horizontalom. Koeficijent trenja je 0.2. Kolika je sila? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 153.68 N.

Zadatak 231 (Josip, gimnazija)

Čovjek vuče teret mase 30 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut $\alpha = 30^\circ$ s horizontalom. Koeficijent trenja je 0.2. Kolika je sila? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 231

$$m = 30 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \mu = 0.2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Prvi Newtonov poučak:

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

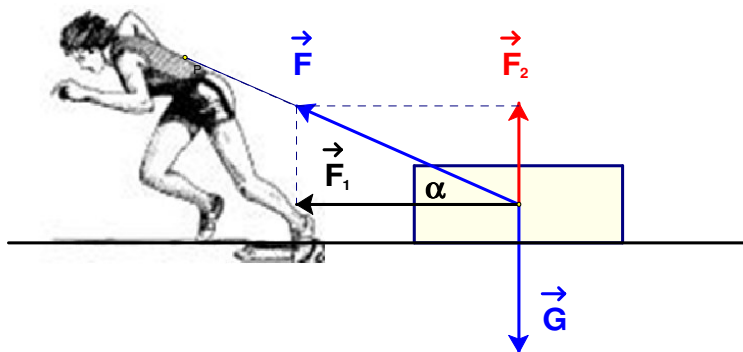
$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ koeficijent (faktor) trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba.



Sa slike vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{F_2}{F} \Rightarrow F_2 = F \cdot \sin \alpha \quad , \quad \cos \alpha = \frac{F_1}{F} \Rightarrow F_1 = F \cdot \cos \alpha.$$

Silu F kojom čovjek vuče teret rastavimo na dvije komponente:

- komponenta F_1 djeluje u smjeru horizontalne podloge i uvjetuje gibanje tereta,
- komponenta F_2 djeluje okomito na horizontalnu podlogu i umanjuje pritisak sile teže G na podlogu.

Budući da sila teža G i komponenta F_2 djeluju okomito na podlogu u suprotnim smjerovima, trenje iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot (G - F_2) \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha).$$

Teret se giba jednoliko po horizontalnoj podlozi pa je sila F_1 po iznosu jednaka trenju F_{tr} (prvi Newtonov poučak):

$$F_1 = F_{tr} \Rightarrow F \cdot \cos \alpha = \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin \alpha) \Rightarrow F \cdot \cos \alpha = \mu \cdot m \cdot g - \mu \cdot F \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot \cos \alpha + \mu \cdot F \cdot \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow F \cdot (\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha) = \mu \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha} = \frac{0.2 \cdot 30 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 30^\circ + 0.2 \cdot \sin 30^\circ} = 60.93 \text{ N}.$$

Vježba 231

Čovjek vuče teret mase 60 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut $\alpha = 30^\circ$ s horizontalom. Koeficijent trenja je 0.2. Kolika je sila? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 121.86 N.

Zadatak 232 (Martin, srednja škola)

Balon, ukupne mase 200 kg, spušta se konstantnom brzinom. Kolika je masa balasta koji treba izbaciti da bi se balon podizao jednakom brzinom? Sila uzgona iznosi 1800 N. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 232

$$m = 200 \text{ kg}, \quad F_{uz} = 1800 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad m_b = ?$$

Prvi Newtonov poučak:

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu.

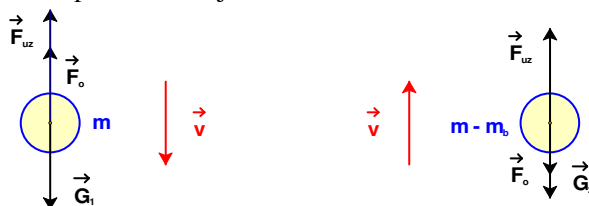
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Uzgon je sila koja tijelo uronjeno u tekućinu u gravitacijskom polju potiskuje uvis. Po iznosu je jednak težini tekućine što je tijelo istisne svojim obujmom. Dakle, uzgon je sila koja istiskuje uronjeno tijelo iz tekućine u suprotnome smjeru od sile teže.



Težina balona ukupne mase m iznosi:

$$G_1 = m \cdot g.$$

Težina balona nakon izbacivanja balasta mase m_b iznosi:

$$G_2 = (m - m_b) \cdot g.$$

Spuštanje



Budući da se balon jednoliko spušta, težina balona G_1 po iznosu jednaka je zbroju (rezultanti) uzgona F_{uz} i otpora zraka F_o :

$$G_1 = F_{uz} + F_o \Rightarrow F_o = G_1 - F_{uz} \Rightarrow F_o = m \cdot g - F_{uz}.$$



Dizanje

Budući da se balon jednoliko uzdiže, težina balona G_2 bez balasta mase m_b po iznosu jednaka je razlici (rezultanti) uzgona F_{uz} i otpora zraka F_o :

$$G_2 = F_{uz} - F_o \Rightarrow F_o = F_{uz} - G_2 \Rightarrow F_o = F_{uz} - (m - m_b) \cdot g.$$

Iz sustava jednačbi dobije se masa balasta m_b :

$$\left. \begin{array}{l} F_o = m \cdot g - F_{uz} \\ F_o = F_{uz} - (m - m_b) \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow m \cdot g - F_{uz} = F_{uz} - (m - m_b) \cdot g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m \cdot g - F_{uz} = F_{uz} - m \cdot g + m_b \cdot g \Rightarrow -m_b \cdot g = F_{uz} - m \cdot g - m \cdot g + F_{uz} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -m_b \cdot g = 2 \cdot F_{uz} - 2 \cdot m \cdot g \quad /: (-g) \Rightarrow m_b = -2 \cdot \frac{F_{uz}}{g} + 2 \cdot m \Rightarrow m_b = 2 \cdot m - 2 \cdot \frac{F_{uz}}{g} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_b = 2 \cdot \left(m - \frac{F_{uz}}{g} \right) = 2 \cdot \left(200 \text{ kg} - \frac{1800 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 33.03 \text{ kg}.$$

Vježba 232

Balon, ukupne mase 400 kg, spušta se konstantnom brzinom. Kolika je masa balasta koji treba izbaciti da bi se balon podizao jednakom brzinom? Sila uzgona iznosi 3600 N. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 66.06 kg.

Zadatak 233 (Leon, srednja škola)

Plosnato tijelo mase 100 kg, klizajući po ledu, zaustavilo se u vremenu od 5 s i pri tome prešlo put 20 m. Kolika je sila trenja djelovala na to tijelo?

Rješenje 233

$$m = 100 \text{ kg}, \quad t = 5 \text{ s}, \quad s = 20 \text{ m}, \quad F_{tr} = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, m masa tijela, g akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže).

1. inačica

Tijelo je, gibajući se jednoliko usporeno, prešlo put s za vrijeme t pa mu akceleracija a iznosi:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{2}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2}.$$

Budući da se plosnato tijelo giba jednoliko usporeno, sila trenja F_{tr} jednaka je sili kočenja F:

$$F_{tr} = F \Rightarrow F_{tr} = m \cdot a \Rightarrow F_{tr} = m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} = 100 \text{ kg} \cdot \frac{2 \cdot 20 \text{ kg}}{(5 \text{ s})^2} = 160 \text{ N}.$$

2. inačica

Tijelo je, gibajući se jednoliko usporeno, prešlo put s u vremenu t akceleracijom a:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{2}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2}.$$

Budući da se plosnato tijelo giba jednoliko usporeno, sila trenja F_{tr} jednaka je sili kočenja F. Sila na podlogu jednaka je težini plosnatog tijela jer je put horizontalan.

$$F_{tr} = F \Rightarrow \mu \cdot G = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2}.$$

Sada je trenje F_{tr} :

$$\begin{aligned} F_{tr} = \mu \cdot G &\Rightarrow F_{tr} = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} \cdot m \cdot g \Rightarrow F_{tr} = \frac{2 \cdot s}{g \cdot t^2} \cdot m \cdot g \Rightarrow F_{tr} = \frac{2 \cdot s}{t^2} \cdot m = \\ &= \frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{(5 \text{ s})^2} \cdot 100 \text{ kg} = 160 \text{ N}. \end{aligned}$$

Vježba 233

Plosnato tijelo mase 200 kg, kličući po ledu, zaustavilo se u vremenu od 5 s i pri tome prešlo put 20 m. Kolika je sila trenja djelovala na to tijelo?

Rezultat: 320 N.

Zadatak 234 (Nely, gimnazija)

Dva su automobila krenula iz istog mjesta jedan za drugim u vremenskom razmaku od 80 sekundi s jednakim ubrzanjem $a = 0.5 \text{ m/s}^2$. Računajući od početka kretanja prvog automobila, nakon koliko će vremena razmak između njih iznositi 5 km?

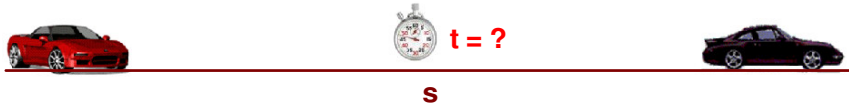
Rješenje 234

$$t_1 = t, \quad t_2 = t - 80, \quad a = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad s = 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.



Budući da razmak između automobila nakon vremena t mora iznositi s, slijedi:

$$\begin{aligned} s_1 - s_2 = s &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 = s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t-80)^2 = s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbog lakoće računanja unosimo} \\ \text{samo brojeve bez mjernih jedinica} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (t-80)^2 = 5000 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{1}{4} \cdot (t-80)^2 = 5000 \quad / : 4 \Rightarrow t^2 - (t-80)^2 = 20000 \Rightarrow t^2 - (t^2 - 160 \cdot t + 6400) = 20000 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t^2 - t^2 + 160 \cdot t - 6400 = 20000 \Rightarrow t^2 - t^2 + 160 \cdot t - 6400 = 20000 \Rightarrow 160 \cdot t - 6400 = 20000 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 160 \cdot t = 20000 + 6400 \Rightarrow 160 \cdot t = 26400 \quad / : 160 \Rightarrow t = 165 \text{ s.} \end{aligned}$$

Vježba 234

Dva su automobila krenula iz istog mjesta jedan za drugim u vremenskom razmaku od 80 sekundi s jednakim ubrzanjem $a = 0.5 \text{ m/s}^2$. Računajući od početka kretanja prvog automobila, nakon koliko će vremena razmak između njih iznositi 10 km?

Rezultat: 290 s.

Zadatak 235 (Ivica, medicinska škola)

Na kraju slobodnog pada tijelo postigne brzinu v. S koje visine mora pasti da bi postiglo brzinu $5 \cdot v$?

Rješenje 235

$$v_1 = v, \quad h_1, \quad v_2 = 5 \cdot v, \quad h_2 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Budući da je slobodni pad jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje s početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i akceleracijom $a = g$, relacija za ubrzano gibanje vrijedi i za slobodni pad:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je h visina tijela iznad tla.

Sada je:

$$\left. \begin{aligned} v_1^2 &= 2 \cdot g \cdot h_1 \\ v_2^2 &= 2 \cdot g \cdot h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_2} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_1}{2 \cdot g \cdot h_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{5 \cdot v} \right)^2 = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \left(\frac{v}{5 \cdot v} \right)^2 = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \left(\frac{1}{5} \right)^2 = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_2 = 25 \cdot h_1.$$

Vježba 235

Na kraju slobodnog pada tijelo postigne brzinu v . S koje visine mora pasti da bi postiglo brzinu $4 \cdot v$?

Rezultat: $h_2 = 16 \cdot h_1$.

Zadatak 236 (Ivica, medicinska škola)

Kolika je vučna sila potrebna da automobil mase 1500 kg ubrza od 0 do 30 m/s za 10 s, ako pretpostavimo da se 40% od ukupne vučne sile potroši na trenje? Koliki je koeficijent trenja tijela i podloge? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 236

$$m = 1500 \text{ kg}, \quad v_1 = 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = 30 \text{ m/s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad F_{tr} = 40\% \cdot F_v = 0.40 \cdot F_v,$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_v = ?, \quad \mu = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na horizontalnoj podlozi pritisna je sila jednaka težini tijela, ukoliko nema dodatnih sila, pa silu trenja možemo izraziti

$$F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

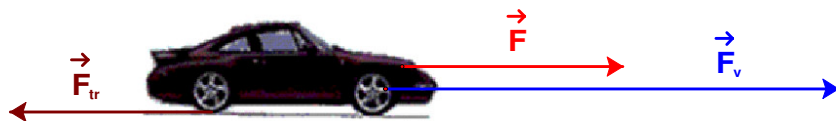
Koeficijent proporcionalnosti μ (čitaj: mi) zovemo koeficijent (faktor) trenja.

Srednju akceleraciju definiramo količnikom promjene brzine $\Delta v = v_2 - v_1$ i vremenskog intervala $\Delta t = t_2 - t_1$ u kojem se to dogodilo:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutnu akceleraciju definiramo količnikom promjene brzine Δv u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku) Δt i toga trenutka. Ako je pri gibanju tijela vrijednost akceleracije stalna, tada su srednja i trenutna akceleracija jednake pa vrijedi

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$



1. inačica

Budući da se 40% od ukupne vučne sile potroši na trenje, ostatak od 60% ukupne vučne sile koristi se za ubrzavanje automobila mase m akceleracijom a . Prema drugom Newtonovom poučku dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} 60\% \cdot F_V = m \cdot a \\ a = \frac{v_2 - v_1}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow 0.60 \cdot F_V = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \Rightarrow 0.60 \cdot F_V = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot \frac{1}{0.60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_V = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{0.60 \cdot t} = 1500 \text{ kg} \cdot \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.60 \cdot 10 \text{ s}} = 7500 \text{ N}.$$

Budući da se 40% od ukupne vučne sile potroši na trenje, koeficijent trenja μ iznosi:

$$\begin{aligned} F_{tr} = 40\% \cdot F_V &\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = 0.40 \cdot F_V \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = 0.40 \cdot F_V \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= \frac{0.40 \cdot F_V}{m \cdot g} = \frac{0.40 \cdot 7500 \text{ N}}{1500 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.204. \end{aligned}$$

2. inačica

Iz uvjeta zadatka slijedi da se 40% od ukupne vučne sile F_V potroši na trenje F_{tr} :

$$F_{tr} = 40\% \cdot F_V \Rightarrow F_{tr} = 0.40 \cdot F_V.$$

Budući da je rezultantna sila F (sila koja ubrzava automobil) jednaka razlici vučne sile F_V i sile trenja F_{tr} , slijedi:

$$F = F_V - F_{tr} \Rightarrow F = F_V - 0.40 \cdot F_V \Rightarrow F = 0.60 \cdot F_V \Rightarrow F = 0.60 \cdot F_V \cdot \frac{1}{0.60} \Rightarrow F_V = \frac{F}{0.60} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_V &= \frac{m \cdot a}{0.60} \Rightarrow \left[a = \frac{v_2 - v_1}{t} \right] \Rightarrow F_V = \frac{m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t}}{0.60} \Rightarrow F_V = \frac{m \cdot (v_2 - v_1)}{0.60 \cdot t} = \\ &= \frac{1500 \text{ kg} \cdot \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{0.60 \cdot 10 \text{ s}} = 7500 \text{ N}. \end{aligned}$$

Budući da se 40% od ukupne vučne sile potroši na trenje, koeficijent trenja μ iznosi:

$$\begin{aligned} F_{tr} = 40\% \cdot F_V &\Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = 0.40 \cdot F_V \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = 0.40 \cdot F_V \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= \frac{0.40 \cdot F_V}{m \cdot g} = \frac{0.40 \cdot 7500 \text{ N}}{1500 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.204. \end{aligned}$$

Vježba 236

Kolika je vučna sila potrebna da automobil mase 1500 kg ubrza od 0 do 30 m/s za 10 s, ako pretpostavimo da se 50% od ukupne vučne sile potroši na trenje?

Rezultat: 9000 N.

Zadatak 237 (Megy, medicinska škola)

S ruba mosta bacimo okomito u vodu kamen brzinom 0.8 m/s. Nađi visinu mosta i brzinu kojom kamen padne u vodu ako pada 3 sekunde. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 237

$$v = 0.8 \text{ m/s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?, \quad v = ?$$



Vertikalni hitac prema dolje sastoji se od jednolikoga gibanja prema dolje brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima

$$v = v_0 + g \cdot t \quad , \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Visina mosta iznosi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0.8 \frac{m}{s} \cdot 3 s + \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2 = 46.55 m.$$

Brzina kojom kamen padne u vodu ima vrijednost:

$$v = v_0 + g \cdot t = 0.8 \frac{m}{s} + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s = 30.23 \frac{m}{s}.$$

Vježba 237

S ruba mosta bacimo vertikalno u vodu kamen brzinom 0.5 m/s. Nadi visinu mosta i brzinu kojom kamen padne u vodu ako pada 3 sekunde. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 45.65 m, 29.93 $\frac{m}{s}$.

Zadatak 238 (Megy, medicinska škola)

Tijelo bačeno vertikalno u vis palo je natrag na tlo za 6 sekundi. Koju je visinu tijelo postiglo i koliku brzinu je imalo kad je palo? Otpor zraka zanemarimo. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 238

$$t = 6 s, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s = ?, \quad v = ?$$

Vertikalni hitac u vis sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom v_0 i slobodnog pada. Zato su mu brzina v i put s u času kad je prošlo vrijeme t dani ovim izrazima

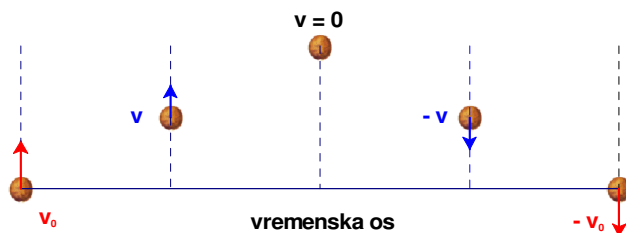
$$v = v_0 - g \cdot t \quad , \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Najviši domet H što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put u času kad je $v = 0$. Onda je

$$v_0 = g \cdot t \quad , \quad H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Kod vertikalnog hica su početna brzina v_0 i brzina pri padu tijela natrag na zemlju iste po iznosu, a suprotnih smjerova.



Budući da za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku, slijedi da vrijeme penjanja iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} t = 6 s \\ t_1 = \frac{1}{2} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 s = 3 s.$$

Najviši domet koji je tijelo postiglo pri ovom vertikalnom hicu je:

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2 = 44.15 m.$$

Brzina kojom tijelo padne na tlo iznosi:

$$v_0 = g \cdot t_1 = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s = 29.43 \frac{m}{s}$$

Vježba 238

Tijelo bačeno vertikalno u vis palo je natrag na tlo za 8 sekundi. Koju je visinu tijelo postiglo i koliku brzinu je imalo kad je palo? Otpor zraka zanemarimo. ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $78.48 \text{ m}, 39.24 \frac{m}{s}$

Zadatak 239 (Tomislav, srednja škola)

Za koje će vrijeme tijelo, mase 5 kg, postići brzinu 30 m/s ako na njega djeluje stalna sila od 50 N?

Rješenje 239

$$m = 5 \text{ kg}, \quad v = 30 \text{ m/s}, \quad F = 50 \text{ N}, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a$$

Sila koja djeluje na tijelo određena je drugim Newtonovim poučkom

$$F = m \cdot a$$

Budući da je gibanje tijela jednoliko ubrzano, bez početne brzine, njegova brzina iznosi:

$$v = a \cdot t \Rightarrow v = a \cdot t \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{v}{t}$$

Vrijeme t za koje će tijelo postići brzinu v je:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{F}{m} \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow v = \frac{F}{m} \cdot t \Rightarrow v = \frac{F}{m} \cdot t \cdot \frac{m}{F} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = v \cdot \frac{m}{F} = 30 \frac{m}{s} \cdot \frac{5 \text{ kg}}{50 \text{ N}} = 3 \text{ s}$$

Vježba 239

Za koje će vrijeme tijelo, mase 10 kg, postići brzinu 30 m/s ako na njega djeluje stalna sila od 100 N?

Rezultat: 3 s

Zadatak 240 (Tomislav, srednja škola)

Kolikom stalnom silom treba djelovati na tijelo, mase 15 kg, da bi za vrijeme 30 s postiglo brzinu 36 km/h?

Rješenje 240

$$m = 15 \text{ kg}, \quad t = 30 \text{ s}, \quad v = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad F = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima

akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Sila koja djeluje na tijelo određena je drugim Newtonovim poučkom

$$F = m \cdot a.$$

Budući da je gibanje tijela jednoliko ubrzano, bez početne brzine, njegova brzina iznosi:

$$v = a \cdot t \Rightarrow v = a \cdot t / \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{v}{t}.$$

Sila F kojom treba djelovati na tijelo iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = \frac{v}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} = 15 \text{ kg} \cdot \frac{10 \frac{m}{s}}{30 \text{ s}} = 5 \text{ N}.$$

Vježba 240

Kolikom stalnom silom treba djelovati na tijelo, mase 15 kg, da bi za vrijeme 60 s postiglo brzinu 72 km/h?

Rezultat: 10 N.