

### Zadatak 301 (Marko, gimnazija)

Vlak se giba stalnom brzinom 60 km/h. U jednom trenutku vlakovođa počne jednoliko kočiti te vlak za 60 s prevali put od 600 m. Kolikom se brzinom vlak giba na kraju tog puta?

#### Rješenje 301

$$v_0 = 60 \text{ km/h} = [60 : 3.6] = 16.67 \text{ m/s}, \quad t = 60 \text{ s}, \quad s = 600 \text{ m}, \quad v = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo počto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijede formule za brzinu i put:

$$v = v_0 - a \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s.$$



#### 1. inačica

Iz formula za put i brzinu pri jednolikom usporenom gibanju dobije se brzina vlaka na kraju puta.

$$\left. \begin{aligned} s &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v &= v_0 - a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} s &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{2}{t} \\ a \cdot t &= v_0 - v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2 \cdot s}{t} &= 2 \cdot v_0 - a \cdot t \\ a \cdot t &= v_0 - v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = 2 \cdot v_0 - (v_0 - v) \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = 2 \cdot v_0 - v_0 + v \Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = v_0 + v \Rightarrow v_0 + v = \frac{2 \cdot s}{t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t} - v_0 = \frac{2 \cdot 600 \text{ m}}{60 \text{ s}} - 16.67 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.33 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [3.33 \cdot 3.6] = 11.988 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

#### 2. inačica

Iz formula za brzine pri jednolikom usporenom gibanju dobije se brzina vlaka na kraju puta.

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \\ v &= v_0 - a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot a \cdot s &= v_0^2 - v^2 \\ a \cdot t &= v_0 - v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot a \cdot s &= (v_0 - v) \cdot (v_0 + v) \\ a \cdot t &= v_0 - v \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot s}{a \cdot t} = \frac{(v_0 - v) \cdot (v_0 + v)}{v_0 - v} \Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot s}{a \cdot t} = \frac{(v_0 - v) \cdot (v_0 + v)}{v_0 - v} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = v_0 + v \Rightarrow v_0 + v = \frac{2 \cdot s}{t} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t} - v_0 =$$
$$= \frac{2 \cdot 600 \text{ m}}{60 \text{ s}} - 16.67 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.33 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [3.33 \cdot 3.6] = 11.988 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

#### 3. inačica

Iz formula za brzine pri jednolikom usporenom gibanju dobije se brzina vlaka na kraju puta.

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s \\ v &= v_0 - a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot a \cdot s &= v_0^2 - v^2 \\ a \cdot t &= v_0 - v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot a \cdot s &= v_0^2 - v^2 \\ a \cdot t &= v_0 - v \quad / : t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot a \cdot s &= (v_0 - v) \cdot (v_0 + v) \\ a &= \frac{v_0 - v}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot \frac{v_0 - v}{t} \cdot s = (v_0 - v) \cdot (v_0 + v) \Rightarrow 2 \cdot \frac{v_0 - v}{t} \cdot s = (v_0 - v) \cdot (v_0 + v) / \cdot \frac{1}{v_0 - v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot s}{t} = v_0 + v \Rightarrow v_0 + v = \frac{2 \cdot s}{t} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot s}{t} - v_0 =$$

$$= \frac{2 \cdot 600 \text{ m}}{60 \text{ s}} - 16.67 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.33 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [3.33 \cdot 3.6] = 11.988 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

### Vježba 301

Vlak se giba stalnom brzinom 60 km/h. U jednom trenutku vlakovođa počne jednoliko kočiti te vlak za 1 min prevali put od 0.6 km. Kolikom se brzinom vlak giba na kraju tog puta?

**Rezultat:** 12 km/h.

### Zadatak 302 (Maturantica, medicinska škola)

Padobranac prizemljuje brzinom 6 m/s. S koje bi visine trebao skočiti bez padobrana da postigne tu brzinu? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 302

$$v = 6 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t, \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje su  $v$  i  $s$  brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad h = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje su  $v$  brzina pada,  $h$  visina pada.



Računamo visinu  $h$  sa koje treba skočiti padobranac bez padobrana da postigne zadanu brzinu.

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v = g \cdot t \\ h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \frac{v}{g} \\ h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( \frac{v}{g} \right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v^2}{g^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v^2}{g^2} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left( 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.83 \text{ m}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} v = g \cdot t \\ h = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \frac{v}{g} \\ h = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{v}{g} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(6 \frac{m}{s}\right)^2}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 1.83 \text{ m.}$$

3. inačica

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(6 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 1.83 \text{ m.}$$

### Vježba 302

Padobranac prizemljuje brzinom 10 m/s. S koje bi visine trebao skočiti bez padobrana da postigne tu brzinu? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 5.097 m.

### Zadatak 303 (Maturantica, medicinska škola)

Prevaljeni put kod vertikalnog hica opisan je:

- A) linearnom funkcijom vremena
- B) kvadratnom funkcijom vremena
- C)  $\sqrt{t}$
- D)  $\sqrt[3]{t}$
- E) eksponencijalnom funkcijom vremena.

### Rješenje 303

Kvadratna funkcija ili polinom drugog stupnja jest svaka funkcija oblika

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a, b, c realni brojevi, a  $\neq 0$ .

Vertikalni hitac sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je put s (ili visina h) u času kad je prošlo vrijeme t dan ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Pri vertikalnom hicu put je opisan funkcijom

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t,$$

a to je kvadratna funkcija vremena. Odgovor je pod B.

### Vježba 303

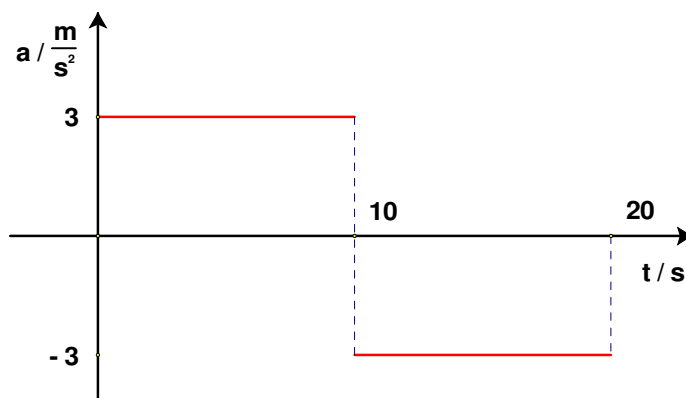
Trenutna brzina kod vertikalnog hica opisana je:

- A) linearnom funkcijom vremena
- B) kvadratnom funkcijom vremena
- C)  $\sqrt{t}$
- D)  $\sqrt[3]{t}$
- E) eksponencijalnom funkcijom vremena.

**Rezultat:** A.

### Zadatak 304 (Ivana, gimnazija)

Ovisnost akceleracije o vremenu, za gibanje nekog tijela predstavljeno je dijagramom  $a = f(t)$ . Izračunajte srednju brzinu tijela za  $t = 20$  s, uz uvjet da je početna brzina tijela bila 0 m/s.



### Rješenje 304

$$t = 20 \text{ s}, \quad v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad v = ?$$

Srednja brzina tijela u vremenskom intervalu  $\Delta t$  jest količnik dijela puta  $\Delta s$ , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka  $\Delta t$ :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ako je taj količnik stalan za svaki  $\Delta s$  i odgovarajući  $\Delta t$  duž nekog puta  $s$ , onda kažemo da se na tom putu tijelo giba jednoliko te vrijedi

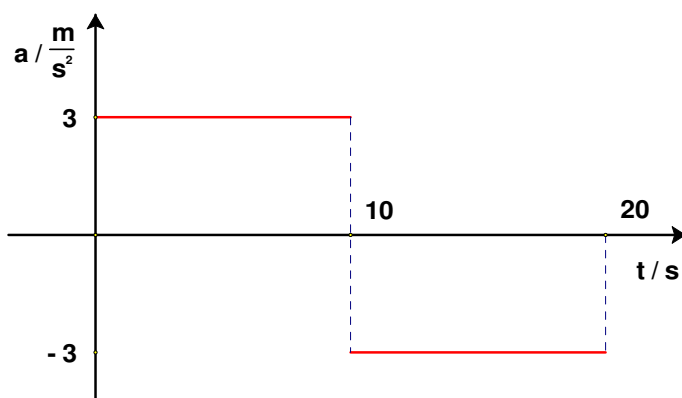
$$v = \frac{s}{t}.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  sa početnom brzinom  $v_0$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = v_0 + a \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za put:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



Sa slike vidi se da postoje dva intervala vremena  $t_1$  i  $t_2$  ( $t_1 = t_2 = 10$  s) za koje je akceleracija po iznosu jednaka, ali ima suprotan predznak.

Računamo put  $s_1$ . U prvom vremenskom intervalu  $t_1$  početna brzina tijela jednaka je nuli pa put  $s_1$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ v_0 = 0 \frac{m}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow s_1 = 0 \frac{m}{s} \cdot 10 s + \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot (10 s)^2 = 150 m.$$

Na kraju vremenskog intervala  $t_1$  tijelo ima brzinu:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = v_0 + a \cdot t_1 \\ v_0 = 0 \frac{m}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = 0 \frac{m}{s} + 3 \frac{m}{s^2} \cdot 10 s = 30 \frac{m}{s}.$$

U drugom vremenskom intervalu  $t_2$  tijelo usporava pa je brzina  $v_1$  njegova početna brzina prije usporavanja.

Računamo put  $s_2$ .

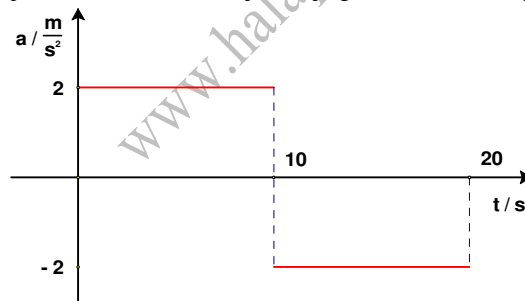
$$\left. \begin{array}{l} s_2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \\ v_0 = v_1 \end{array} \right\} \Rightarrow s_2 = v_1 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 10 s - \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot (10 s)^2 = 150 m.$$

Srednja brzina  $v$  tijela za vrijeme  $t$  na putu  $s$  iznosi:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} s = s_1 + s_2 \\ t = t_1 + t_2 \end{array} \right] \Rightarrow v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{150 m + 150 m}{10 s + 10 s} = 15 \frac{m}{s}.$$

### Vježba 304

Ovisnost akceleracije o vremenu, za gibanje nekog tijela predstavljeno je dijagramom  $a = f(t)$ . Izračunajte srednju brzinu tijela za  $t = 20$  s, uz uvjet da je početna brzina tijela bila 0 m/s.



**Rezultat:** 10 m/s.

### Zadatak 305 (Dado, gimnazija)

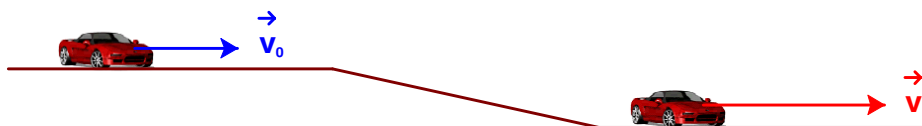
Automobil vozi 10 sekundi jednoliko na horizontalnom putu brzinom 40 km/h. Nakon toga dođe do nizbrdice gdje dobiva akceleraciju  $1 \text{ m/s}^2$ .

- Koliku će brzinu imati automobil 30 sekundi nakon početka gibanja?
- Koliki će put prevaliti za to vrijeme?
- Nacrtaj grafički prikaz brzine za to gibanje i iz grafikona nađi ukupni put što ga je automobil prevalio.

### Rješenje 305

$$t_1 = 10 \text{ s}, \quad v_0 = 40 \text{ km/h} = [40 : 3.6] = 11.11 \text{ m/s}, \quad a = 1 \text{ m/s}^2, \quad t_2 = 30 \text{ s}, \quad v = ?,$$

$$s = ?$$



Jednoliko pravocrtno gibanje je gibanje stalnom brzinom. Put je razmjernan s vremenom:

$$s = v \cdot t.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s sa početnom brzinom  $v_0$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = v_0 + a \cdot t \quad , \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

a) Automobil ima početnu brzinu  $v_0$  i počinje se ubrzavati u vremenskom intervalu

$$t = t_2 - t_1$$

pa mu je konačna brzina

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = v_0 + a \cdot (t_2 - t_1) = 11.11 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s^2} \cdot (30 s - 10 s) = 31.11 \frac{m}{s}.$$

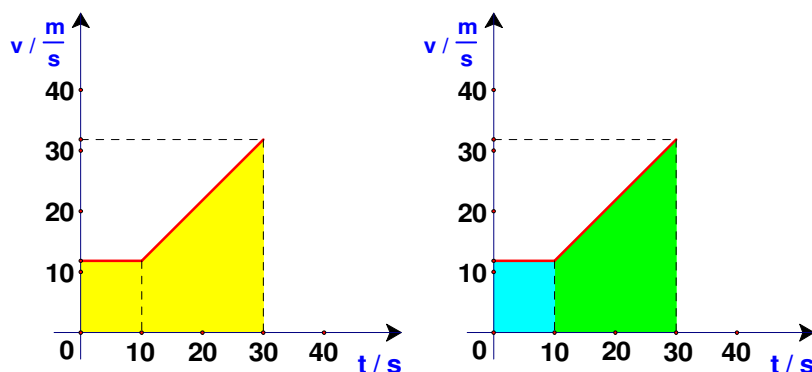
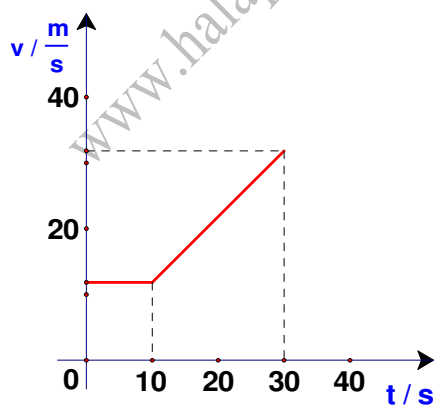
b) Automobil se u vremenskom intervalu  $t_1$  giba stalnom brzinom  $v_0$ , a onda se počinje ubrzavati u vremenskom intervalu

$$t = t_2 - t_1$$

pa ukupni prijeđeni put iznosi:

$$\begin{aligned} s &= v_0 \cdot t_1 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = v_0 \cdot t_1 + v_0 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_2 - t_1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s = v_0 \cdot (t_1 + t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_2 - t_1)^2 \Rightarrow s = v_0 \cdot (t_1 + t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_2 - t_1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s = v_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_2 - t_1)^2 = 11.11 \frac{m}{s} \cdot 30 s + \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{m}{s^2} \cdot (30 s - 10 s)^2 = 533.3 m. \end{aligned}$$

c) Grafički prikaz brzine



U  $v, t$  – dijagramu površina ispod krivulje odgovara veličini puta što ga je tijelo prešlo gibajući se u vremenu  $t$  brzinom  $v$ . Dakle, prijeđeni put može se odrediti računajući površinu ispod krivulje  $v(t)$ .

Iz dijagrama se vidi da je ukupni put što ga je automobil prevalio po iznosu jednak površini lika ispod krivulje (površina pravokutnika – plava boja plus površina trapeza – zelena boja), tj. 533 m.

### Vježba 305

Automobil vozi 10 sekundi jednoliko na horizontalnom putu brzinom 40 km/h. Nakon toga dođe do nizbrdice gdje dobiva akceleraciju  $2 \text{ m/s}^2$ . Koliku će brzinu imati automobil 30 sekundi nakon početka gibanja?

**Rezultat:** 51.11 m/s.

### Zadatak 306 (Dado, gimnazija)

S ruba mosta bacimo vertikalno u vodu kamen brzinom 0.8 m/s. Nađi visinu mosta i brzinu kojom kamen padne u vodu ako pada 3 sekunde. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 306

$$v_0 = 0.8 \text{ m/s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?, \quad v = ?$$

s = ?

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

gdje su  $v$  brzina pada,  $h$  visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$  tada formule za slobodni pad glase:

$$v = v_0 + g \cdot t, \quad h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h.$$

Računamo visinu mosta.

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 \text{ s})^2 = 46.55 \text{ m} \approx 47 \text{ m}.$$

Brzina kojom kamen pada iznosi:

1. inačica

$$v = v_0 + g \cdot t = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = 30.23 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. inačica

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{\left(0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 47 \text{ m}} = 30.38 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Vježba 306

S ruba mosta bacimo vertikalno u vodu kamen brzinom 80 cm/s. Nađi visinu mosta ako kamen pada 3 sekunde. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 47 m.

### Zadatak 307 (Ana, gimnazija)

S vrha brijega bacimo kamen u horizontalnom smjeru. Padina brijega nagnuta je prema horizontalnoj ravnini za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Kojom je brzinom bačen kamen ako je na padinu brijega pao 200 m daleko od mjesta gdje je izbačen? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 307

$$\alpha = 30^\circ, \quad d = 200 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

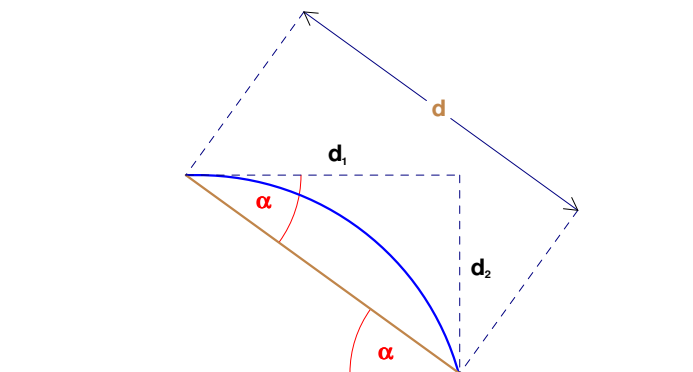
Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Za vrijeme  $t$  tijelo je prešlo put u horizontalnom smjeru

a u vertikalnom je smjeru palo za

$$x = v_0 \cdot t,$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

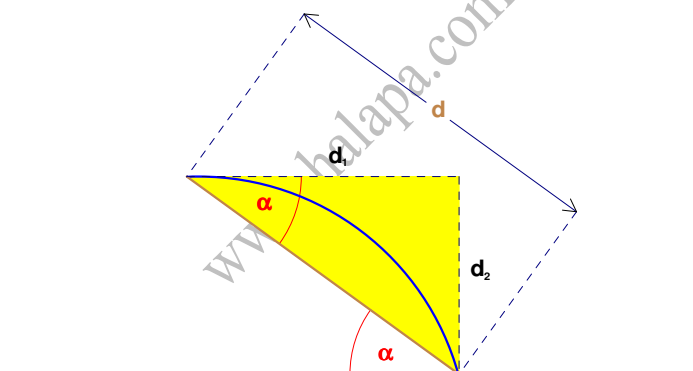


Za vrijeme  $t$  tijelo u vodoravnom (horizontalnom) smjeru prevali put

$$d_1 = v \cdot t, \quad (1)$$

a u vertikalnom smjeru je palo za

$$d_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \quad (2)$$



Uočimo pravokutan trokut čije su katete putovi  $d_1$  i  $d_2$ , a hipotenuza duljina padine brijega  $d$ . Tada je:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{d_2}{d} \\ \cos \alpha = \frac{d_1}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_2 = d \cdot \sin \alpha \\ d_1 = d \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}. \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{d_2}{d} \\ \cos \alpha = \frac{d_1}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_2 = d \cdot \sin \alpha \\ d_1 = d \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Iz (1) i (4) dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = v \cdot t \\ d_1 = d \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow v \cdot t = d \cdot \cos \alpha.$$

Iz (2) i (3) dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} d_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ d_2 = d \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = d \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = d \cdot \sin \alpha / 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot d \cdot \sin \alpha.$$

Da bismo izračunali brzinu  $v$  moramo riješiti sustav jednažbi.



$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} v \cdot t = d \cdot \cos \alpha \\ g \cdot t^2 = 2 \cdot d \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} v \cdot t = d \cdot \cos \alpha \quad / \cdot 2 \\ g \cdot t^2 = 2 \cdot d \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v^2 \cdot t^2 = d^2 \cdot \cos^2 \alpha \\ g \cdot t^2 = 2 \cdot d \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{v^2 \cdot t^2}{g \cdot t^2} = \frac{d^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot d \cdot \sin \alpha} \Rightarrow \frac{v^2 \cdot \cancel{t^2}}{g \cdot \cancel{t^2}} = \frac{d^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot d \cdot \sin \alpha} \Rightarrow \frac{v^2}{g} = \frac{d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{v^2}{g} = \frac{d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha} \quad / \cdot g \Rightarrow v^2 = \frac{g \cdot d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{g \cdot d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha} \quad / \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot d \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin \alpha}} \Rightarrow \\
\Rightarrow v = \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{g \cdot d}{2 \cdot \sin \alpha}} = \cos 30^\circ \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 200 \text{ m}}{2 \cdot \sin 30^\circ}} = 38.36 \frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

### Vježba 307

S vrha brijega bacimo kamen u horizontalnom smjeru. Padina brijega nagnuta je prema horizontalnoj ravnini za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Kojom je brzinom bačen kamen ako je na padinu brijega pao 800 m daleko od mjesta gdje je izbačen? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 76.72 m.

### Zadatak 308 (Iva, gimnazija)

Tijelo smo bacili početnom brzinom  $v_0$  pod kutom  $\alpha$  prema horizontalnoj ravnini. Tijelo se vratilo na tlo za 3 sekunde. Koju je najveću visinu postiglo? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 308

$$v_0, \quad \alpha, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad Y = ?$$

Tijelo se složeno giba kad istodobno obavlja dva ili više gibanja. Pri takvom gibanju vrijedi načelo neovisnosti gibanja koje glasi: Kad tijelo istodobno obavlja dva gibanja, giba se tako da se u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi stiglo kad bi obavilo samo jedno gibanje u određenom vremenskom razmaku, a neovisno o tom gibanju istodobno i drugo gibanje u istome vremenskom razmaku. Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut  $\alpha$  (kut elevacije) i slobodnog pada. Vrijeme za koje tijelo stigne do najviše točke je

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

Maksimalna visina iznosi:

$$Y = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}.$$

Za slobodan pad vrijedi izraz

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada. Za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

1. inačica

Budući da se tijelo vratilo na tlo za vrijeme  $t$ , do najviše točke stiglo je za polovicu tog vremena pa vrijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \quad / \cdot g \Rightarrow v_0 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot t \cdot g.$$

Najveća visina  $Y$  koju je tijelo postiglo iznosi:

$$\left. \begin{aligned} v_0 \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot g \\ Y &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot g \\ Y &= \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \text{metoda supstitucije} \right] \Rightarrow Y = \frac{\left( \frac{1}{2} \cdot t \cdot g \right)^2}{2 \cdot g} \Rightarrow Y = \frac{\frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot g^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y = \frac{t^2 \cdot g^2}{8 \cdot g} \Rightarrow Y = \frac{t^2 \cdot g}{8} \Rightarrow Y = \frac{t^2 \cdot g}{8} = \frac{(3 \text{ s})^2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8} = 11.04 \text{ m}.$$

2. inačica

Zbog neovisnosti gibanja možemo izračunati visinu Y sa koje je tijelo počelo slobodno padati u vremenskom intervalu  $\frac{t}{2}$ .

$$Y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( \frac{t}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{3 \text{ s}}{2} \right)^2 = 11.04 \text{ m}.$$

### Vježba 308

Tijelo smo bacili početnom brzinom  $v_0$  pod kutom  $\alpha$  prema horizontalnoj ravnini. Tijelo se vratilo na tlo za 4 sekunde. Koju je najveću visinu postiglo? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 19.62 m.

### Zadatak 309 (Marija, gimnazija)

Kamen bacimo brzinom 10 m/s pod kutom elevacije  $40^\circ$ . On padne na zemlju na udaljenosti d od početnog položaja. S koje visine  $s_y$  treba baciti kamen u horizontalnom smjeru da bi uz jednaku početnu brzinu pao na isto mjesto? Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 309

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad \alpha = 40^\circ, \quad d, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad s_y = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Za vrijeme t tijelo je prešlo put

$$x = v_0 \cdot t,$$

a u vertikalnom je smjeru palo za

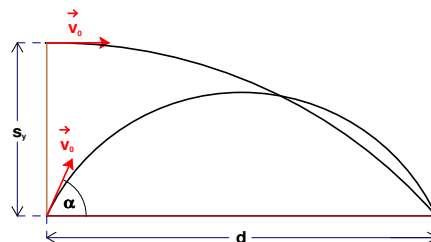
$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Domat D horizontalnog hica, ako je zadana početna brzina  $v_0$  i visina y, iznosi:

$$D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}}.$$

Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut  $\alpha$  (kut elevacije) i slobodnog pada. Domat D kosog hica iznosi:

$$D = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}.$$



### 1. inačica

Vrijeme  $t$ , za koje kamen bačen horizontalno brzinom  $v_0$  postigne domet  $d$ , iznosi:

$$t = \frac{d}{v_0}.$$

Istodobno kamen se za to vrijeme spusti za

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{d}{v_0}\right)^2 \Rightarrow s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{d^2}{v_0^2}.$$

Iz podataka za kosi hitac znamo da je domet  $d$  dan formulom

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}.$$

Pomoću sustava jednažbi dobije se  $s_y$ .

$$\left. \begin{array}{l} s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{d^2}{v_0^2} \\ d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{\left(\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}\right)^2}{v_0^2} \Rightarrow s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^4 \cdot \sin^2 2\alpha}{g^2 v_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^4 \cdot \sin^2 2\alpha}{g^2 \cdot v_0^2} \Rightarrow s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{g \cdot v_0^2} \Rightarrow s_y = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_y = \frac{(v_0 \cdot \sin 2\alpha)^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(10 \frac{m}{s} \cdot \sin 80^\circ\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 4.94 \text{ m.}$$

### 2. inačica

Budući da domet  $d$  horizontalnog i kosog hica mora biti jednak, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} d = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}} \\ d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \quad /: v_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}} = \frac{v_0 \cdot \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}} = \frac{v_0 \cdot \sin 2\alpha}{g} \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot s_y}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{g^2} \Rightarrow \frac{2 \cdot s_y}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{g^2} \quad / \cdot \frac{g}{2} \Rightarrow s_y = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{2 \cdot g} \Rightarrow s_y = \frac{(v_0 \cdot \sin 2\alpha)^2}{2 \cdot g} =$$

$$= \frac{\left(10 \frac{m}{s} \cdot \sin 80^\circ\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 4.94 \text{ m.}$$

### Vježba 309

Kamen bacimo brzinom 10 m/s pod kutom elevacije 30°. On padne na zemlju na udaljenosti d od početnog položaja. S koje visine  $s_y$  treba baciti kamen u horizontalnom smjeru da bi uz jednaku početnu brzinu pao na isto mjesto? Otpor zraka zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 3.82 m.

### Zadatak 310 (Malena, kemijska škola)

Tijelo se giba jednoliko ubrzano po pravcu. Što od navedenoga vrijedi za iznos ukupne sile na tijelo tijekom gibanja?

- A) Iznos ukupne sile na tijelo jednoliko raste.
- B) Iznos ukupne sile na tijelo jednak je nuli.
- C) Iznos ukupne sile na tijelo se jednoliko smanjuje.
- D) Iznos ukupne sile na tijelo je stalan i različit od nule.

### Rješenje 310

Sila je vektorska veličina kojom se opisuje djelovanje jednog tijela na drugo tijelo. Sila može ubrzati ili usporiti neko tijelo, tj. promijeniti mu stanje gibanja.

#### Drugi (Newtonov) zakon mehanike

Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Budući da se tijelo giba jednoliko ubrzano po pravcu (ima akceleraciju), iznos ukupne sile na tijelo je stalan i različit od nule. Odgovor je pod D.

### Vježba 310

Tijelo se giba jednoliko po pravcu. Što od navedenoga vrijedi za iznos ukupne sile na tijelo tijekom gibanja?

- A) Iznos ukupne sile na tijelo jednoliko raste.
- B) Iznos ukupne sile na tijelo jednak je nuli.
- C) Iznos ukupne sile na tijelo se jednoliko smanjuje.
- D) Iznos ukupne sile na tijelo je stalan i različit od nule.

**Rezultat:** Odgovor je pod B.

### Zadatak 311 (Kristina, srednja škola)

Tenisač prilikom servisa daje loptici mase 0.06 kg početnu horizontalnu brzinu od 55 m/s. Ako je loptica bila u kontaktu s reketom 0.03 s, kolikom je srednjom silom reket djelovao na lopticu?

### Rješenje 311

$$m = 0.06 \text{ kg}, \quad v = 55 \text{ m/s}, \quad t = 0.03 \text{ s}, \quad F = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

#### Drugi (Newtonov) zakon mehanike

Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase m na koje je za vrijeme t djelovala sila F vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je v brzina na kraju vremenskog intervala t za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile F, a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m.

1. inačica

Srednja sila F kojom je reket djelovao na lopticu iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = a \cdot t \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{v}{t} \\ F = m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow F = m \cdot \frac{v}{t} = 0.06 \text{ kg} \cdot \frac{55 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.03 \text{ s}} = 110 \text{ N}.$$

2. inačica

Uporabom formule koja povezuje impuls sile i količinu gibanja za srednju silu F kojom je reket djelovao na lopticu dobije se:

$$F \cdot t = m \cdot v \Rightarrow F \cdot t = m \cdot v \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow F = \frac{m \cdot v}{t} = \frac{0.06 \text{ kg} \cdot 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.03 \text{ s}} = 110 \text{ N}.$$



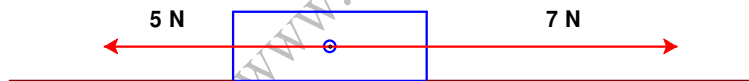
### Vježba 311

Tenisaič prilikom servisa daje loptici mase 0.12 kg početnu horizontalnu brzinu od 55 m/s. Ako je loptica bila u kontaktu s reketom 0.06 s, kolikom je srednjom silom reket djelovao na lopticu?

**Rezultat:** 110 N.

### Zadatak 312 (Branka, maturantica srednje škole)

Na tijelo koje se giba stalnom brzinom udesno počnu djelovati dvije sile, kako je prikazano na slici (trenje je zanemarivo).



Kako će to utjecati na gibanje tijela?

- A. Tijelo će se odmah zaustaviti.
- B. Tijelo će se nastaviti gibati stalnom brzinom.
- C. Tijelo će početi ubrzavati.
- D. Tijelo će početi usporavati.

### Rješenje 312

$$F_1 = 5 \text{ N}, \quad F_2 = 7 \text{ N}, \quad F_r = ?$$

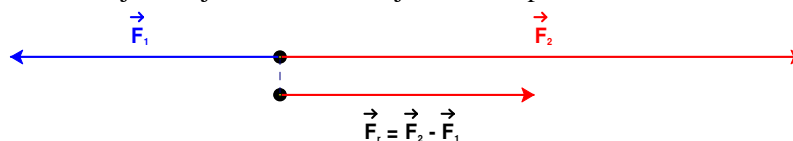
Sila je fizikalna veličina kojom iskazujemo međudjelovanje tijela. Sila može mijenjati položaj tijela: pokretati ga, zaustavljati, mijenjati mu smjer gibanja. Sile mogu mijenjati i oblik tijela.

### Drugi (Newtonov) zakon mehanike

Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako dvije sile imaju suprotne orijentacije, tada je orijentacija rezultante jednaka orijentaciji sile većeg iznosa, a iznos rezultante jednak je razlici iznosa njezinih komponenta.



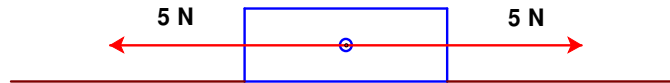
Rezultanta sila  $F_1$  i  $F_2$  je

$$F_r = F_2 - F_1 = 7 \text{ N} - 5 \text{ N} = 2 \text{ N}$$

i djeluje udesno pa će se tijelo (prema drugom Newtonovom poučku) početi ubrzavati. Odgovor je pod C.

### Vježba 312

Na tijelo koje se giba stalnom brzinom udesno počnu djelovati dvije sile, kako je prikazano na slici (trenje je zanemarivo).



Kako će to utjecati na gibanje tijela?

- A. Tijelo će se odmah zaustaviti.                      B. Tijelo će se nastaviti gibati stalnom brzinom.  
C. Tijelo će početi ubrzavati.                      D. Tijelo će početi usporavati.

**Rezultat:**      B.

### Zadatak 313 (Josip, srednja škola)

Preko učvršćenog kolotura prebačeno je uže. Na jednome kraju užeta visi uteg mase  $m_1 = 5 \text{ kg}$ , uronjen u vodu, a na drugome kraju visi uteg mase  $m_2 = 4 \text{ kg}$ . Kolotur je u ravnoteži. Kolika sila uzgona djeluje na uteg u vodi? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 313

$$m_1 = 5 \text{ kg}, \quad m_2 = 4 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_{uz} = ?$$

Sila je fizikalna veličina kojom iskazujemo međudjelovanje tijela. Sila može mijenjati položaj tijela: pokretati ga, zaustavljati, mijenjati mu smjer gibanja. Sile mogu mijenjati i oblik tijelu.

### Drugi (Newtonov) zakon mehanike

Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako dvije sile imaju suprotne orijentacije, tada je orijentacija rezultante jednaka orijentaciji sile većeg iznosa, a iznos rezultante jednak je razlici iznosa njezinih komponenata.

### Arhimedov zakon

Svako tijelo gubi na svojoj težini onoliko koliko teži tim tijelom istisnuta tekućina. Sila koja smanjuje težinu tijela u tekućini suprotne je orijentacije od težine i nazivamo je uzgon.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

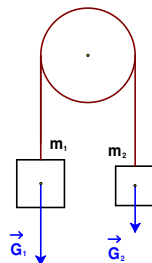
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sila  $F$  koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici djelovanja sile teže na tijelo mase  $m_1$  i tijelo mase  $m_2$ , tj.

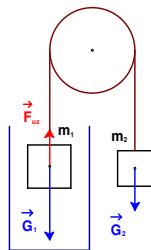
$$F = G_1 - G_2 \Rightarrow F = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \Rightarrow F = g \cdot (m_1 - m_2).$$



Kada je uteg mase  $m_1$  uronjen u vodu kolotur je u ravnoteži. Znači da je razlika sile teže na tijelo mase  $m_1$  i uzgona po iznosu jednaka sili teži na tijelo mase  $m_2$ .

$$G_1 - F_{uz} = G_2 \Rightarrow F_{uz} = G_1 - G_2 \Rightarrow F_{uz} = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \Rightarrow F_{uz} = g \cdot (m_1 - m_2) =$$

$$= 9.81 \frac{m}{s} \cdot (5 \text{ kg} - 4 \text{ kg}) = 9.81 \text{ N}.$$



### Vježba 313

Preko učvršćenog kolotura prebačeno je uže. Na jednome kraju užeta visi uteg mase  $m_1 = 6$  kg, uronjen u vodu, a na drugome kraju visi uteg mase  $m_2 = 5$  kg. Kolotur je u ravnoteži. Kolika sila uzgona djeluje na uteg u vodi? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 9.81 N.

### Zadatak 314 (Josip, srednja škola)

Vozač automobila odluči preteći kamion koji vozi stalnom brzinom 20 m/s. Na početku automobil vozi također brzinom 20 m/s i udaljen je 24 m od stražnjeg ruba kamiona. Automobil ubrzava s  $0.6 \text{ m/s}^2$  i vraća se u desni trak kad mu je zadnji rub udaljen 26 m od prednjeg ruba kamiona. Automobil je dug 4.5 m, a kamion 21 m. Koliko vremena treba za opisano pretjecanje?

### Rješenje 314

$$v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad d_1 = 24 \text{ m}, \quad a = 0.6 \text{ m/s}^2, \quad d_2 = 26 \text{ m}, \quad l_1 = 4.5 \text{ m}, \quad l_2 = 21 \text{ m},$$

$$t = ?$$

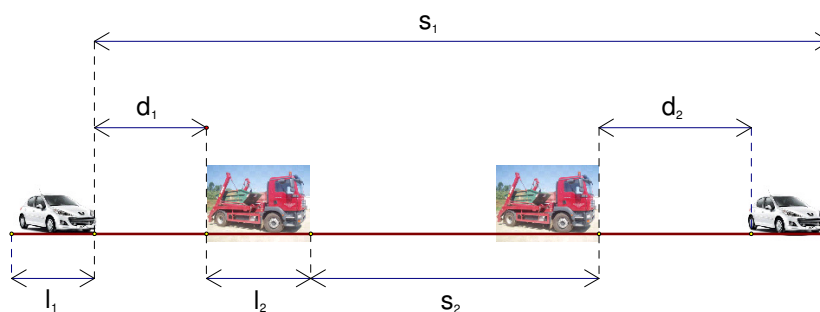
Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo koje se giba stalnom brzinom  $v$  za vrijeme  $t$ .

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje jest gibanje sa stalnim ubrzanjem (akceleracijom). Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$ , a akceleracija je pozitivna, formula za prijeđeni put  $s$  glasi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



Dok kamion (sporije vozilo) za vrijeme  $t$  prevali put

$$s_2 = v_0 \cdot t$$

gibajući se stalnom brzinom  $v_0$ , automobil (brže vozilo) za isto vrijeme prijeđe put

$$s_1 = d_1 + l_2 + s_2 + d_2 + l_1$$

gibajući se jednoliko ubrzano početnom brzinom  $v_0$ .

Pritom smo uzeli u obzir da je početna međusobna udaljenost vozila razmak između prednjeg dijela automobila i stražnjeg dijela kamiona, a konačna međusobna udaljenost obrnuta. Budući da se automobil giba jednoliko ubrzano početnom brzinom  $v_0$ , za prevaljeni put  $s_1$  vrijedi:

$$s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Računamo vrijeme  $t$  mimoilaženja.

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = d_1 + l_2 + s_2 + d_2 + l_1 \\ s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s_2 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = d_1 + l_2 + v_0 \cdot t + d_2 + l_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = d_1 + l_2 + v_0 \cdot t + d_2 + l_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = d_1 + l_2 + d_2 + l_1.$$

Zbog jednostavnosti računanja uvrstimo brojeve bez mjernih jedinica i riješimo dobivenu kvadratnu jednadžbu po varijabli  $t$ .

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = d_1 + l_2 + d_2 + l_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0.6 \cdot t^2 = 24 + 21 + 26 + 4.5 \Rightarrow 0.3 \cdot t^2 = 75.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.3 \cdot t^2 = 75.5 \quad /: 0.3 \Rightarrow t^2 = 251.67 \Rightarrow t^2 = 251.67 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow t = \sqrt{251.67} \Rightarrow t = 15.86 \text{ s.}$$

### Vježba 314

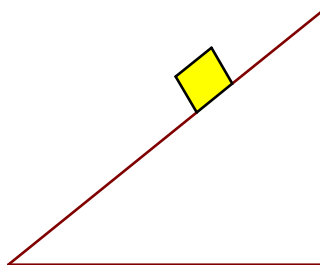
Vozač automobila odluči preteći kamion koji vozi stalnom brzinom 72 km/h. Na početku automobil vozi također brzinom 72 km/h i udaljen je 24 m od stražnjeg ruba kamiona. Automobil ubrzava s  $0.6 \text{ m/s}^2$  i vraća se u desni trak kad mu je zadnji rub udaljen 26 m od prednjeg ruba kamiona. Automobil je dug 4.5 m, a kamion 21 m. Koliko vremena treba za opisano pretjecanje?

**Rezultat:** 15.86 s.

### Zadatak 315 (Ante, srednja škola)

Tijelo klizi niz kosinu nagiba  $45^\circ$  bez trenja.

- Nacrtajte sve sile koje djeluju na tijelo.
- Izračunajte ubrzanje tijela. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )



### Rješenje 315

$$\alpha = 45^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.



**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

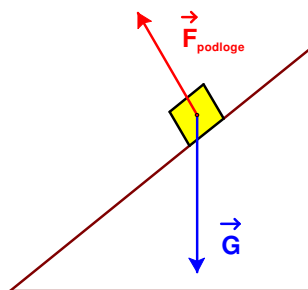
**Sinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

**Treći Newtonov poučak (sila i protusila)**

Ako jedno tijelo djeluje na drugo nekom silom, onda istodobno drugo djeluje na prvo silom jednake vrijednosti, ali suprotnog smjera.

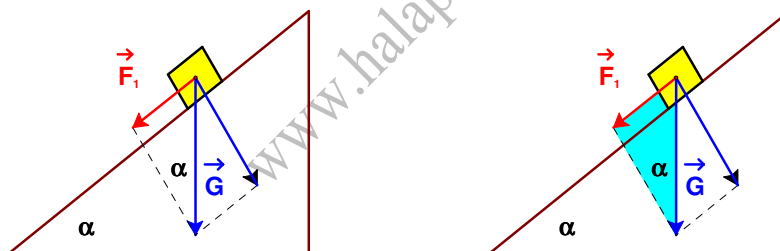
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

a)



Djelovanja dvaju tijela (tijela i kosine) jedno na drugo uvijek su jednaka i suprotnog smjera. Zato na tijelo djeluje sila podloge. Druga sila koja djeluje na tijelo je sila teža.

b)



Sa slika vidi se

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \cdot G \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Sila teža  $G$  rastavlja se na dvije komponente, na jednu paralelnu i drugu okomitu na kosinu. Gibanje tijela niz kosinu uzrokovano je paralelnom komponentom.

Sila koja tijelo ubrzava niz kosinu je horizontalna komponenta  $F_1$  sile teže  $G$  pa prema drugom Newtonovom poučku vrijedi:

$$F = F_1 \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha \quad /: m \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 45^\circ = 6.94 \frac{m}{s^2}.$$

### Vježba 315

Tijelo klizi niz kosinu nagiba  $45^\circ$  bez trenja. Izračunajte ubrzanje tijela. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $7.1 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 316 (Ante, srednja škola)

Dvije mjedene kugle jednakog vanjskog polumjera, jedna puna a jedna šuplja, padaju s iste visine. Otpor zraka postoji. Procijenite koja kugla pada brže.

### Rješenje 316

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Otpor zraka isti je za obje kugle. Rezultantna sila  $F$  koja ubrzava kugle jednaka je razlici sile teže  $G$  i otpora zraka  $F_{ot}$ .

$$F = G - F_{ot} \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - F_{ot} \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - F_{ot} \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow a = g - \frac{F_{ot}}{m}.$$

Budući da je masa pune kugle veća, slijedi da je i njezina akceleracija veća, a time i njezina brzina. Puna kugla pada brže jer je teža.

Uoči!

$$\left. \begin{array}{l} m \text{ povećava se} \Rightarrow \frac{F_{ot}}{m} \text{ smanjuje se} \Rightarrow a = g - \frac{F_{ot}}{m} \text{ povećava se} \\ m \text{ smanjuje se} \Rightarrow \frac{F_{ot}}{m} \text{ povećava se} \Rightarrow a = g - \frac{F_{ot}}{m} \text{ smanjuje se} \end{array} \right\}$$



### Vježba 316

Dvije mjedene kugle jednakog vanjskog polumjera, jedna puna a jedna šuplja, padaju s iste visine. Otpor zraka postoji. Procijenite koja kugla pada sporije.

**Rezultat:** Šuplja kugla pada sporije.

### Zadatak 317 (Ante, srednja škola)

Tri su tijela međusobno spojena nitima. Kolike su napetosti  $F_1$  i  $F_2$  ovih niti:

a) ako je podloga savršeno glatka?

b) ako je faktor trenja prema podlozi  $\mu = 0.1$ ?

Neka je  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 6 \text{ kg}$ ,  $F_3 = 24 \text{ N}$ . ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 317

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 4 \text{ kg}, \quad m_3 = 6 \text{ kg}, \quad F_3 = 24 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

$$F_1 = ?, \quad F_2 = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela

padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

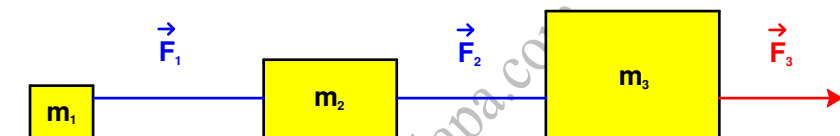
Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $m$  masa tijela,  $g$  akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže).



a)

Akceleraciju sustava naći ćemo iz osnovnog zakona gibanja (drugi Newtonov poučak). Kako sila  $F_3$  pokreće sustav kao cjelinu, ona daje akceleraciju ukupnoj masi

$$m_1 + m_2 + m_3$$

te je

$$F_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a \Rightarrow F_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a \cdot \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow a = \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{24 \text{ N}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Da bismo odredili napetosti  $F_1$  i  $F_2$  niti, napišemo drugi Newtonov poučak za svako tijelo posebno.

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = m_1 \cdot a \\ F_2 = (m_1 + m_2) \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ a = \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = m_1 \cdot \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ F_2 = (m_1 + m_2) \cdot \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot F_3 \\ F_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = \frac{2 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} \cdot 24 \text{ N} = 4 \text{ N} \\ F_2 = \frac{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} \cdot 24 \text{ N} = 12 \text{ N} \end{array} \right\}.$$

b)

Kada postoji trenje sila  $F$  koja uzrokuje gibanje sustava jednaka je razlici sile  $F_3$  i sile trenja sustava  $F_{tr}$ .

$$\begin{aligned}
 F &= F_3 - F_{tr} \Rightarrow F = F_3 - \mu \cdot G \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a = F_3 - \mu \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a = F_3 - \mu \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow a &= \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu \cdot g = \frac{24 \text{ N}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} - 0.1 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.
 \end{aligned}$$

Kada postoji trenje napetosti  $F_1$  i  $F_2$  niti odredit ćemo tako da napišemo drugi Newtonov poučak za svako tijelo posebno.

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} F_1 - \mu \cdot m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a \\ F_2 - \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \cdot a + \mu \cdot m_1 \cdot g \\ F_2 &= (m_1 + m_2) \cdot a + \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow &\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \cdot (a + \mu \cdot g) \\ F_2 &= (m_1 + m_2) \cdot (a + \mu \cdot g) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ a = \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu \cdot g \Rightarrow a + \mu \cdot g = \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow &\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \cdot \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ F_2 &= (m_1 + m_2) \cdot \frac{F_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot F_3 \\ F_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot F_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow &\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{2 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} \cdot 24 \text{ N} = 4 \text{ N} \\ F_2 &= \frac{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} \cdot 24 \text{ N} = 12 \text{ N} \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Uočimo da postojanje trenja ne mijenja napetosti  $F_1$  i  $F_2$  niti. One su iste kao i kad nema trenja (uz istu silu  $F_3$ ). Akceleracija sustava manja je nego kad trenja nema.

### Vježba 317

Tri su tijela međusobno spojena nitima. Nađi akceleraciju sustava ako je podloga savršeno glatka. Neka je  $m_1 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 8 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 12 \text{ kg}$ ,  $F_3 = 48 \text{ N}$ .

**Rezultat:**  $2 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 318 (Josip, gimnazija)

Ako je vrijeme reagiranja vozača jedna sekunda, a zaustavni put automobila pri brzini  $60 \text{ km/h}$  iznosi  $44 \text{ m}$ , koliki je faktor trenja klizanja kotača po cesti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 318

$$t = 1 \text{ s}, \quad v_0 = 60 \text{ km/h} = [60 : 3.6] = 16.67 \text{ m/s}, \quad s = 44 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $m$  masa tijela,  $g$  akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže). Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ . Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje vrijedi ista formula.

Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$  i jednoliko usporava akceleracijom  $a$ , njegova trenutna brzina  $v$  dana je formulom

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je  $s$  put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo stalnom brzinom  $v$  za vrijeme  $t$ .

Zaustavni put  $s$  automobila jednak je zbroju:

- $s_r$ , prijeđenog puta za vrijeme  $t$ , dok vozač reagira pošto je uočio opasnost
- $s_k$ , puta kočenja.

$$s = s_r + s_k.$$

Put  $s_r$ , koji automobil prijeđe dok vozač reagira i pritisne kočnicu iznosi:

$$s_r = v_0 \cdot t.$$

Pri naglom kočenju svi kotači automobila se blokiraju i više se ne okreću nego klize po cesti. Pritom je sila trenja jednaka

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je  $\mu$  faktor trenja klizanja kotača po cesti. Ta sila usporava automobil pa je prema drugom Newtonovu poučku akceleracija usporavanja jednaka

$$F = F_{tr} \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad /: m \Rightarrow a = \mu \cdot g.$$

Budući da automobil usporava trenutna brzina računa se po formuli:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s_k,$$

gdje je  $v$  trenutna brzina,  $s_k$  put kočenja. U trenutku zaustavljanja trenutna brzina je nula pa vrijedi:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s_k \Rightarrow \begin{bmatrix} v=0 \\ a=\mu \cdot g \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s_k \Rightarrow 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s_k = v_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s_k = v_0^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot s_k} \Rightarrow \mu = \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot s_k} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} s = s_r + s_k \\ s_k = s - s_r \\ s_k = s - v_0 \cdot t \end{array} \right] \Rightarrow \mu = \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot (s - v_0 \cdot t)} =$$

$$= \frac{\left(16.67 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(44 m - 16.67 \frac{m}{s} \cdot 1 s\right)} = 0.52.$$

### Vježba 318

Ako je vrijeme reagiranja vozača jedna sekunda, a zaustavni put automobila pri brzini 72 km/h iznosi 44 m, koliki je faktor trenja klizanja kotača po cesti? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.83.

### Zadatak 319 (Maja, gimnazija)

Tijelo se giba jednoliko ubrzano s početnom brzinom. Nakon 10 s prewalkjeni put tijela iznosi 30 m, pri čemu se njegova brzina povećala 5 puta. Odredite ubrzanje tijela.

### Rješenje 319

$$v_0, \quad t = 10 \text{ s}, \quad s = 30 \text{ m}, \quad v = 5 \cdot v_0, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje s početnom brzinom je gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = v_0 + a \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s, \quad s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t,$$

gdje je  $v_0$  početna brzina,  $v$  (trenutna brzina) brzina koju tijelo ima nakon vremena  $t$  gibanja s ubrzanjem  $a$ ,  $s$  put koji je tijelo prešlo za to vrijeme.

1. inačica

Iz uvjeta zadatka dobije se početna brzina  $v_0$  kao funkcija akceleracije  $a$  i vremena  $t$ .

$$\left. \begin{array}{l} v = 5 \cdot v_0 \\ v = v_0 + a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow 5 \cdot v_0 = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 5 \cdot v_0 - v_0 = a \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot v_0 = a \cdot t \Rightarrow 4 \cdot v_0 = a \cdot t \quad /: 4 \Rightarrow v_0 = \frac{a \cdot t}{4}.$$

Računamo ubrzanje tijela.

$$\left. \begin{array}{l} s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v_0 = \frac{a \cdot t}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow s = \frac{a \cdot t}{4} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{a \cdot t^2}{4} + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{a \cdot t^2}{4} + \frac{a \cdot t^2}{2} \quad /: 4 \Rightarrow 4 \cdot s = a \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow 4 \cdot s = 3 \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot t^2 = 4 \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a \cdot t^2 = 4 \cdot s \quad /: 3 \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{4 \cdot s}{3 \cdot t^2} = \frac{4 \cdot 30 \text{ m}}{3 \cdot (10 \text{ s})^2} = 0.4 \frac{m}{s^2}.$$

2. inačica

Iz sustava jednadžbi odredimo akceleraciju  $a$  kao funkciju početne brzine  $v_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \\ v = 5 \cdot v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow (5 \cdot v_0)^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 25 \cdot v_0^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \cdot v_0^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 24 \cdot v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow 24 \cdot v_0^2 = 2 \cdot a \cdot 30 \Rightarrow 24 \cdot v_0^2 = 60 \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 \cdot a = 24 \cdot v_0^2 \Rightarrow 60 \cdot a = 24 \cdot v_0^2 \quad /: 60 \Rightarrow a = 0.4 \cdot v_0^2.$$

Računamo  $v_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 + a \cdot t \\ v = 5 \cdot v_0 \\ a = 0.4 \cdot v_0^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow 5 \cdot v_0 = v_0 + 0.4 \cdot v_0^2 \cdot t \Rightarrow 5 \cdot v_0 - v_0 = 0.4 \cdot v_0^2 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot v_0 = 0.4 \cdot v_0^2 \cdot t \Rightarrow 4 \cdot v_0 = 0.4 \cdot v_0^2 \cdot 10 \Rightarrow 4 \cdot v_0 = 4 \cdot v_0^2 \Rightarrow 4 \cdot v_0 = 4 \cdot v_0^2 \quad /: 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = v_0^2 \Rightarrow v_0 - v_0^2 = 0 \Rightarrow v_0 \cdot (1 - v_0) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_0 = 0 \text{ nema smisla} \\ 1 - v_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = 1 \frac{m}{s}.$$

Ubrzanje tijela iznosi:

$$a = 0.4 \cdot v_0^2 \Rightarrow a = 0.4 \cdot 1^2 \Rightarrow a = 0.4 \cdot 1 \Rightarrow a = 0.4 \frac{m}{s^2}.$$

3. inačica

Iz sustava jednadžbi izračunamo početnu brzinu  $v_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \\ v = 5 \cdot v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow s = \frac{v_0 + 5 \cdot v_0}{2} \cdot t \Rightarrow s = \frac{6 \cdot v_0}{2} \cdot t \Rightarrow s = \frac{6 \cdot v_0}{2} \cdot t \Rightarrow s = 3 \cdot v_0 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 = 3 \cdot v_0 \cdot 10 \Rightarrow 30 = 30 \cdot v_0 \Rightarrow 30 \cdot v_0 = 30 \Rightarrow 30 \cdot v_0 = 30 \quad /: 30 \Rightarrow v_0 = 1 \frac{m}{s}.$$

Ubrzanje tijela iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0 + a \cdot t \\ v = 5 \cdot v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow v_0 + a \cdot t = 5 \cdot v_0 \Rightarrow a \cdot t = 5 \cdot v_0 - v_0 \Rightarrow a \cdot t = 4 \cdot v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot t = 4 \cdot v_0 \quad /: t \Rightarrow a = \frac{4 \cdot v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{4 \cdot 1}{10} \Rightarrow a = \frac{4}{10} \Rightarrow a = 0.4 \frac{m}{s^2}.$$

### Vježba 319

Tijelo se giba jednoliko ubrzano s početnom brzinom. Nakon 10 s prewalkeni put tijela iznosi 60 m, pri čemu se njegova brzina povećala 5 puta. Odredite ubrzanje tijela.

**Rezultat:**  $0.8 \text{ m/s}^2$ .

### Zadatak 320 (Katarina, srednja škola)

Automobil mase 600 kg udara u zid brzinom 36 km/h. Zaustavljanje automobila trajalo je 0.1 s. Kolikom je silom automobil udario u zid?

### Rješenje 320

$$m = 600 \text{ kg}, \quad v_1 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad \Delta t = 0.1 \text{ s}, \quad F = ?$$

Srednja akceleracija je omjer razlike brzina  $\Delta v$  u nekom vremenskom intervalu  $\Delta t$  i toga vremenskog intervala:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutna akceleracija  $a$  je omjer promjene brzine  $\Delta v$  u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku)  $\Delta t$  i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Kada se tijelo giba pravocrtno, vrijedi:

- akceleracija pozitivna,  $a > 0 \Rightarrow$  tijelo ubrzava
- akceleracija negativna,  $a < 0 \Rightarrow$  tijelo usporava

Drugi Newtonov zakon: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a$$

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase  $m$  na koje je za vrijeme  $t$  djelovala sila  $F$  vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je  $v$  brzina na kraju vremenskog intervala  $t$  za koji je sila djelovala. Umnožak  $I = F \cdot t$  zovemo impulsom sile  $F$ , a umnožak  $p = m \cdot v$  količinom gibanja mase  $m$ .

1. inačica

Akceleracija automobila pri udaru u zid iznosi

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{0 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s}}{0.1 s} = -100 \frac{m}{s^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{akceleracija negativna,} \\ \text{automobil usporava} \end{array} \right.$$

pa sila ima vrijednost (gledamo samo iznos sile, zato akceleraciju uzimamo pozitivnu)

$$F = m \cdot a = 600 \text{ kg} \cdot 100 \frac{m}{s^2} = 60000 \text{ N} = 60 \text{ kN} = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$$

2. inačica

Pomoću formule koja povezuje impuls sile i količinu gibanja dobije se

$$F \cdot t = m \cdot v \Rightarrow F \cdot t = m \cdot v \quad /: t \Rightarrow F = \frac{m \cdot v}{t} = \frac{600 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s}}{0.1 s} = 60000 \text{ N} = 60 \text{ kN} = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$$



### Vježba 320

Automobil mase 1200 kg udari u zid brzinom 36 km/h. Zaustavljanje automobila trajalo je 0.2 s. Kolikom je silom automobil udario u zid?

**Rezultat:** 60 kN.