

Zadatak 481 (Ante, strukovna škola)

Koliku konačnu brzinu dobije puška dok ispaljuje metak mase 5 grama koji napušta cijev brzinom 800 m/s. Puška ima 200 puta veću masu od metka.

Rješenje 481

$$v_1 = v_2 = 0 \text{ m/s}, \quad m_1 = 5 \text{ g} = 0.005 \text{ kg}, \quad v_1' = 800 \text{ m/s}, \\ m_2 = 200 \cdot m_1 = 200 \cdot 0.005 \text{ kg} = 1 \text{ kg}, \quad v_2' = ?$$

Treći Newtonov poučak (sila i protusila)

Ako jedno tijelo djeluje na drugo nekom silom, onda istodobno drugo djeluje na prvo silom jednake vrijednosti, ali suprotnog smjera.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase m na koje je za vrijeme t djelovala sila F vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je v brzina na kraju vremenskog intervala t za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m .

Zakon održanja količine gibanja ako su početne brzine obaju tijela jednake nuli:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0,$$

gdje su v_1 i v_2 brzine tijela mase m_1 odnosno m_2 nakon njihova međusobnog djelovanja.

Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Zbroj količina gibanja obaju tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja.



Možemo računati na dva načina.

1. inačica

Sila barutnih plinova djeluje impulsom sile na metak i on odleti iz puške na jednu stranu, dok se puška pod utjecajem sile jednake po iznosu, a suprotne po smjeru pomakne na drugu stranu (treći Newtonov poučak). Impulsi sile koje prime metak i puška jednaki su, ali suprotnog smjera te su i promjene količine gibanja metka i puške jednake, a suprotnog smjera.

$$m_1 \cdot v_1' = -m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_2 \cdot v_2' = -m_1 \cdot v_1' \Rightarrow m_2 \cdot v_2' = -m_1 \cdot v_1' \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2' = -\frac{m_1 \cdot v_1'}{m_2} = \\ = -\frac{0.005 \text{ kg} \cdot 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ kg}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Predznak minus označava da je pomak puške suprotnog smjera od gibanja (brzine) metka.

2. inačica

Zakon očuvanja količine gibanja kaže da je ukupna količina gibanja izoliranog sustava prije i poslije međusobnog djelovanja unutar sustava jednaka. U našem slučaju sustav metak i puška prije ispaljivanja imaju $v_1 = v_2 = 0 \text{ m/s}$ pa je ukupna količina gibanja nula. Nakon ispaljivanja ukupna količina gibanja, također, mora biti nula.

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = 0 \Rightarrow m_2 \cdot v_2' = -m_1 \cdot v_1' \Rightarrow \\
\Rightarrow m_2 \cdot v_2' &= -m_1 \cdot v_1' \cdot \frac{1}{m_2} \Rightarrow v_2' = -\frac{m_1 \cdot v_1'}{m_2} = -\frac{0.005 \text{ kg} \cdot 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ kg}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

Predznak minus označava da je pomak puške suprotnog smjera od gibanja (brzine) metka.

Vježba 481

Koliku konačnu brzinu dobije puška dok ispaljuje metak mase 10 grama koji napušta cijev brzinom 800 m/s. Puška ima 200 puta veću masu od metka.

Rezultat: $-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadatak 482 (Bingo, gimnazija)

Koliki je vremenski interval ekspozicije pri fotografiranju kuglice koja je padala ispred centimetarske skale, ako je puštena kod znaka O na skali, a na fotografiji se slika kuglice za vrijeme ekspozicije razvukla od 4.9 cm do 19.6 cm? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 482

$$h_1 = 4.9 \text{ cm} = 0.049 \text{ m}, \quad h_2 = 19.6 \text{ cm} = 0.196 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad \Delta t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}, \quad v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}},$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

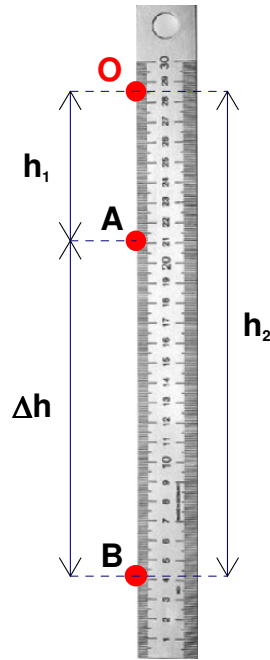
Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}, \quad v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 tada formula za slobodni pad glasi:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



1. inačica

Kuglica slobodno pada i u točki A ima brzinu v_1 :

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.049 m} = 0.98 \frac{m}{s}$$

Put Δh , od točke A do točke B, iznosi

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 0.196 m - 0.049 m = 0.147 m,$$

a kuglica ga prijeđe za vrijeme t početnom brzinom v_1 pa vrijedi:

$$\Delta h = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \Delta h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_1 \cdot t - \Delta h = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvrstimo podatke} \\ \text{bez mjernih jedinica} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2 + 0.98 \cdot t - 0.147 = 0 \Rightarrow 4.9 \cdot t^2 + 0.98 \cdot t - 0.147 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4.9 \cdot t^2 + 0.98 \cdot t - 0.147 = 0 \quad /: 0.049 \Rightarrow 100 \cdot t^2 + 20 \cdot t - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 \cdot t^2 + 20 \cdot t - 3 = 0 \\ a = 100, b = 20, c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 100, b = 20, c = -3 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 100 \cdot (-3)}}{2 \cdot 100} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{200} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{1600}}{200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-20 \pm 40}{200} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{-20 + 40}{200} \\ t_2 = \frac{-20 - 40}{200} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{20}{200} \\ t_2 = -\frac{60}{200} \text{ nema smisla} \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{20}{200} \Rightarrow t = 0.1 s.$$

2. inačica

Kuglica slobodno pada pa:

- put h_1 prijeđe za vrijeme $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}$
- put h_2 prijeđe za vrijeme $t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}}$.

Budući da se slika kuglice razvukla na putu $\Delta h = h_2 - h_1$, vremenski interval Δt jednak je:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} - \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.196 \text{ m}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 0.049 \text{ m}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.1 \text{ s.}$$

3.inačica

Kada kuglica prevali put h_1 za vrijeme t_1 postigla je brzinu v_1 koju možemo izraziti na dva načina:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= g \cdot t_1 \\ v_1 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \cdot t_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}.$$

Kada kuglica prevali put h_2 za vrijeme t_2 postigla je brzinu v_2 koju možemo izraziti na dva načina:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= g \cdot t_2 \\ v_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \cdot t_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} g \cdot t_1 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \\ g \cdot t_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow g \cdot t_2 - g \cdot t_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} - \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow g \cdot (t_2 - t_1) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} - \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \Rightarrow g \cdot \Delta t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} - \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow g \cdot \Delta t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} - \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \quad / \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} - \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}}{g} = \\ = \frac{\sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.196 \text{ m}} - \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.049 \text{ m}}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.1 \text{ s.} \end{aligned}$$

Vježba 482

Koliki je vremenski interval ekspozicije pri fotografiranju kuglice koja je padala ispred centimetarske skale, ako je puštena kod znaka O na skali, a na fotografiji se slika kuglice za vrijeme ekspozicije razvukla od 19.6 cm do 78.4 cm? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.2 s.

Zadatak 483 (Vesna, strukovna škola)

S visine od 150 m tijelo je izbačeno u vodoravnome smjeru početnom brzinom 10 m/s. Koji će položaj tijelo imati 3 sekunde nakon početka gibanja? Zanimarite otpor zraka. U ponuđenim odgovorima x označava vodoravnu udaljenost tijela od početnoga položaja, a y udaljenost tijela od tla. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

- A. $x = 10 \text{ m}$, $y = 105 \text{ m}$ B. $x = 10 \text{ m}$, $y = 45 \text{ m}$
 C. $x = 30 \text{ m}$, $y = 105 \text{ m}$ D. $x = 30 \text{ m}$, $y = 45 \text{ m}$

Rješenje 483

$$h = 150 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad x = ?, \quad y = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Za vrijeme t tijelo je prešlo put u horizontalnom smjeru

$$x = v_0 \cdot t,$$

a u vertikalnom je smjeru palo za

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Brzina v_0 je brzina u horizontalnom (vodoravnom) smjeru. Ona se s vremenom ne povećava, niti smanjuje.

$$\left. \begin{array}{l} x = v_0 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} \\ y = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 \text{ s})^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 30 \text{ m} \\ y = 45 \text{ m} \end{array} \right\}.$$

Budući da je tijelo u vertikalnom smjeru prešlo put od 45 m, njegova udaljenost od tla iznosi:

$$d = h - y = 150 \text{ m} - 45 \text{ m} = 105 \text{ m}.$$

Ili ovako:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 150 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3 \text{ s})^2 = 105 \text{ m}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 483

S visine od 150 m tijelo je izbačeno u vodoravnome smjeru početnom brzinom 10 m/s. Koji će položaj tijelo imati 1 sekundu nakon početka gibanja? Zanimarite otpor zraka. U ponuđenim odgovorima x označava vodoravnu udaljenost tijela od početnoga položaja, a y udaljenost tijela od tla. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

- A. $x = 10 \text{ m}$, $y = 5 \text{ m}$ B. $x = 10 \text{ m}$, $y = 145 \text{ m}$
C. $x = 1 \text{ m}$, $y = 145 \text{ m}$ D. $x = 1 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$

Rezultat: B.

Zadatak 484 (Žac, veleučilište)

Tijelo je izbačeno početnom brzinom $v_0 = 300 \text{ m/s}$ pod kutom elevacije $\alpha = 50^\circ$ prema horizontalnoj podlozi. Ubrzanje slobodnog pada je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Odredite:

- maksimalnu visinu tijela
- vrijeme za koje tijelo postigne maksimalnu visinu (vrijeme trajanja uzlazne staze, vrijeme uspinjanja, vrijeme penjanja)
- vrijeme trajanja silazne staze (vrijeme silaženja)
- vrijeme trajanja gibanja tijela (vrijeme trajanja hica)
- domet
- položaj tijela nakon $t = 3 \text{ s}$ (x i y koordinate tijela nakon 3 s)
- udaljenost od ishodišta nakon $t = 3 \text{ s}$
- komponente brzine tijela nakon $t = 3 \text{ s}$
- ukupnu brzinu tijela nakon $t = 3 \text{ s}$
- smjer brzine tijela nakon $t = 3 \text{ s}$
- brzinu tijela prilikom pada na tlo
- najmanju brzinu tijela tijekom gibanja
- tangencijalnu komponentu akceleracije nakon $t = 3 \text{ s}$
- radijalnu (okomitu) komponentu akceleracije nakon $t = 3 \text{ s}$

- o) ukupnu akceleraciju tijela
 p) jednadžbu staze
 r) kut prema horizontalnoj podlozi pod kojim tijelo padne na tlo
 s) vrijeme za koje će tijelo postići visinu $y = 1000$ m.

Rješenje 484

$$v_0 = 300 \text{ m/s}, \quad \alpha = 50^\circ, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada. Zanemarimo li otpor zraka tijelo izbačeno početnom brzinom v_0 pod kutom elevacije α prema vodoravnoj podlozi opisuje stazu danu jednadžbom

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2 \cdot (v_0 \cdot \cos \alpha)^2} \cdot x^2. \quad (\text{parabola}).$$

Pregršt formula u svezi kosog hica. ☺

- maksimalna visina tijela

$$y_{maks} = \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g}$$

- vrijeme za koje tijelo postigne maksimalnu visinu (vrijeme penjanja, uspona)

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

- vrijeme silazanja jednako je vremenu uspona

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

- vrijeme trajanja hica (ukupno vrijeme gibanja)

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

- domet (maksimalna udaljenost)

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

- položaj tijela u trenutku t

$$(x, y) \Rightarrow x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

- udaljenost od ishodišta nakon vremena t

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow l = \sqrt{(v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha)^2 + \left(v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right)^2}$$

- komponente brzine nakon vremena t (gibanje duž x osi je jednoliko pa je $v_x = \text{konst.}$, gibanje duž y osi je jednoliko usporeno duž uzlaznog dijela staze, a jednoliko ubrzano duž silaznog dijela staze)

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$$

- ukupna brzina nakon vremena t

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v = \sqrt{(v_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}$$

- smjer brzine u trenutku t

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)$$

- tangencijalna komponenta akceleracije tijela u trenutku t

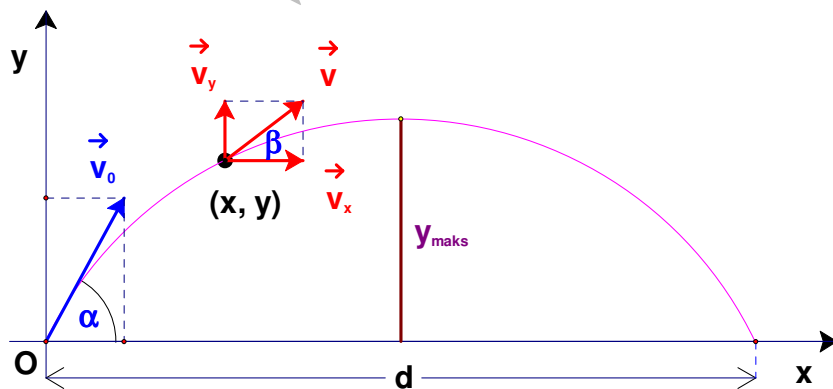
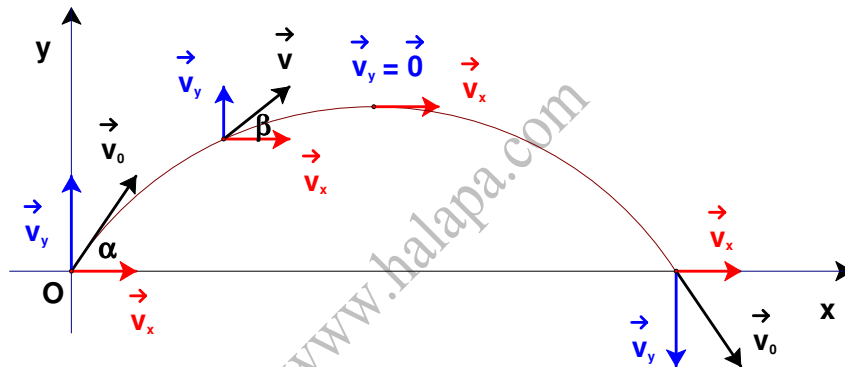
$$a_t = \pm g \cdot \frac{v_y}{v} \Rightarrow a_t = \pm g \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t}{\sqrt{(v_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}}$$

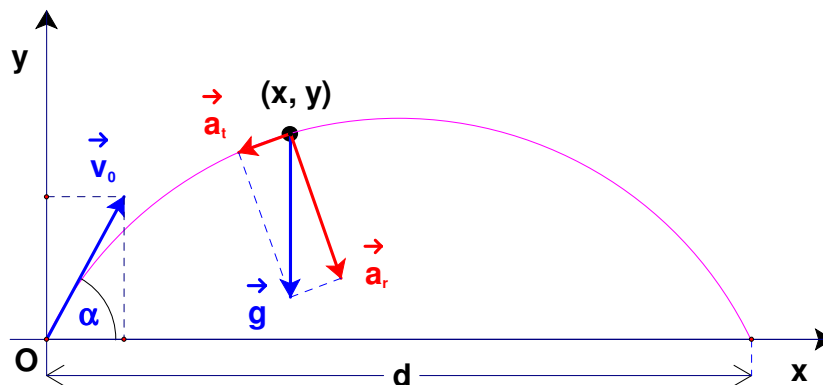
- radijalna (okomita) komponenta akceleracije tijela u trenutku t (za cijelo vrijeme hica ima negativan predznak)

$$a_r = -g \cdot \frac{v_x}{v} \Rightarrow a_r = -g \cdot \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(v_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}}$$

- ukupna akceleracija tijela u bilo kojoj točki je g

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \Rightarrow a = g.$$





a)
Maksimalna visina koju tijelo postigne je:

$$y_{maks} = \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ\right)^2}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 2691.85 \text{ m.}$$

b)
Vrijeme za koje tijelo postigne maksimalnu visinu iznosi:

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 23.43 \text{ s.}$$

c)
Vrijeme trajanja silazne staze jednako je vremenu uspona.

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 23.43 \text{ s.}$$

d)
Vrijeme trajanja gibanja tijela (vrijeme trajanja hica) je:

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 46.85 \text{ s.}$$

e)
Domet tijela iznosi:

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{\left(300 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin 100^\circ}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 9034.93 \text{ m.}$$

f)
Položaj tijela nakon $t = 3 \text{ s}$ iznosi:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y &= v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 300 \frac{m}{s} \cdot 3 s \cdot \cos 50^\circ \\ y &= 300 \frac{m}{s} \cdot 3 s \cdot \sin 50^\circ - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 578.51 m \\ y &= 645.29 m \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y) = (578.51 m, 645.29 m).$$

g)

Udaljenost od ishodišta nakon $t = 3$ s je:

$$l = \sqrt{\left(v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha\right)^2 + \left(v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(300 \frac{m}{s} \cdot 3 s \cdot \cos 50^\circ\right)^2 + \left(300 \frac{m}{s} \cdot 3 s \cdot \sin 50^\circ - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (3 s)^2\right)^2} = 866.65 m.$$

h)

Komponente brzine tijela nakon $t = 3$ s iznose:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y &= v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_x &= 300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^\circ \\ v_y &= 300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_x &= 192.84 \frac{m}{s} \\ v_y &= 200.38 \frac{m}{s} \end{aligned} \right\}.$$

i)

Ukupna brzina tijela nakon $t = 3$ s iznosi:

$$v = \sqrt{\left(v_0 \cdot \cos \alpha\right)^2 + \left(v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^\circ\right)^2 + \left(300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s\right)^2} = 278.10 \frac{m}{s}.$$

j)

Smjer brzine tijela, nakon $t = 3$ s, možemo opisati kutom β koji brzina zatvara s osi x:

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right) \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s}{300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^\circ} \right) \Rightarrow \beta = 46^\circ 5' 58''.$$

k)

Brzina tijela prilikom pada na tlo jednaka je početnoj brzini:

$$v = v_0 = 300 \frac{m}{s}.$$

l)

Najmanju brzinu tijekom gibanja tijelo ima u trenutku kada postigne maksimalnu visinu.

$$v_{\min} = v_x \Rightarrow v_{\min} = v_0 \cdot \cos \alpha = 300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^\circ = 192.84 \frac{m}{s}.$$

m)

Tangencijalna komponenta akceleracije tijela nakon $t = 3$ s iznosi:

$$a_t = -g \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t}{\sqrt{(v_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}} =$$

$$= -9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^0 - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s}{\sqrt{\left(300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^0\right)^2 + \left(300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^0 - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s\right)^2}} = -7.07 \frac{m}{s^2}.$$

Negativan predznak tangencijalne akceleracije pokazuje da se tijelo u zadanom trenutku nalazi na uzlaznom dijelu staze, tj. u području gdje se iznos brzine smanjuje.

n)

Radijalna (okomita) komponenta akceleracije tijela nakon $t = 3$ s iznosi:

$$a_r = -g \cdot \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(v_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}} =$$

$$= -9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^0}{\sqrt{\left(300 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^0\right)^2 + \left(300 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^0 - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s\right)^2}} = -6.80 \frac{m}{s^2}.$$

Radijalna komponenta akceleracije za cijelo vrijeme gibanja tijela ima negativan predznak.

o)

Ukupna akceleracija tijela u bilo kojoj točki je g

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(-7.07 \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(-6.80 \frac{m}{s^2}\right)^2} = 9.81 \frac{m}{s^2}.$$

p)

Jednadžba staze glasi:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 \cdot (v_0 \cdot \cos \alpha)^2} \cdot x^2 \Rightarrow y = x \cdot \operatorname{tg} 50^0 - \frac{9.81}{2 \cdot (300 \cdot \cos 50^0)^2} \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$y = 1.19 \cdot x - 1.32 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \Rightarrow y = -1.32 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.19 \cdot x \text{ parabola.}$$

r)

Kut prema horizontalnoj podlozi pod kojim tijelo padne na tlo jednak je kutu pod kojim je tijelo izbačeno.

$$\alpha = 50^0.$$

s)

Vrijeme za koje će tijelo postići visinu $y = 1000$ m iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} y = 1000 \\ y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1000 = 300 \cdot t \cdot \sin 50^0 - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 = 300 \cdot t \cdot \sin 50^0 - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow 2000 = 600 \cdot t \cdot \sin 50^0 - 9.81 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9.81 \cdot t^2 - 600 \cdot t \cdot \sin 50^\circ + 2000 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9.81 \cdot t^2 - 600 \cdot \sin 50^\circ \cdot t + 2000 = 0 \\ a = 9.81, b = -600 \cdot \sin 50^\circ, c = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 9.81, b = -600 \cdot \sin 50^\circ, c = 2000 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{600 \cdot \sin 50^\circ \pm \sqrt{(-600 \cdot \sin 50^\circ)^2 - 4 \cdot 9.81 \cdot 2000}}{2 \cdot 9.81} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{459.63 \pm 364.39}{19.62} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{459.63 - 364.39}{19.62} \\ t_2 = \frac{459.63 + 364.39}{19.62} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 4.85 \text{ s pri uzlaznoj stazi postigne traženu visinu} \\ t_2 = 42.00 \text{ s pri silaznoj stazi postigne traženu visinu} \end{array} \right\}.$$

Vježba 484

Tijelo je izbačeno početnom brzinom $v_0 = 100 \text{ m/s}$ pod kutom elevacije $\alpha = 60^\circ$ prema horizontalnoj podlozi. Ubrzanje slobodnog pada je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Napišite jednadžbu staze.

Rezultat: $y = -1.96 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1.73 \cdot x$ parabola.

Zadatak 485 (Igor, srednja škola)

Automobil se jednoliko ubrzava 10 s i pritom mu se brzina poveća od 30 km/h na 66 km/h . Koliki put prijeđe automobil za to vrijeme i kolika mu je brzina 5 sekundi nakon početka ubrzanja?

Rješenje 485

$$t = 10 \text{ s}, \quad v_1 = 30 \text{ km/h} = [30 : 3.6] = 8.33 \text{ m/s}, \quad v_2 = 66 \text{ km/h} = [66 : 3.6] = 18.33 \text{ m/s},$$

$$t_1 = 5 \text{ s}, \quad s = ?, \quad v = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu (jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje) je gibanje tijela stalnom akceleracijom. Srednja akceleracija je kvocijent razlike brzina Δv u nekom vremenskom intervalu Δt i toga vremenskog intervala:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Trenutna akceleracija a je omjer promjene brzine Δv u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku) Δt i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za konačnu brzinu v :

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

1. inačica

Najprije izračunamo akceleraciju automobila.

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{18.33 \frac{m}{s} - 8.33 \frac{m}{s}}{10 s} = 1 \frac{m}{s^2}.$$

Put koji automobil prijeđe uz početnu brzinu v_1 za vrijeme t iznosi:

$$s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 8.33 \frac{m}{s} \cdot 10 s + \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{m}{s^2} \cdot (10 s)^2 = 133.3 m.$$

Budući da je početna brzina automobila v_1 , brzina za vrijeme t_1 nakon početka ubrzanja je:

$$v = v_1 + a \cdot t_1 = 8.33 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s^2} \cdot 5 s = 13.33 \frac{m}{s}.$$

2. inačica

Odredimo akceleraciju automobila pa put koji automobil prijeđe uz početnu brzinu v_1 za vrijeme t iznosi:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{t} \\ s &= v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot t^2 \Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (v_2 - v_1) \cdot t \Rightarrow s = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot v_2 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2) \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \left(8.33 \frac{m}{s} + 18.33 \frac{m}{s} \right) \cdot 10 s = 133.3 m.$$

Odredimo akceleraciju automobila pa uz početnu brzinu v_1 brzina za vrijeme t_1 nakon početka ubrzanja iznosi:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{t} \\ v &= v_1 + a \cdot t_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot t_1 = 8.33 \frac{m}{s} + \frac{18.33 \frac{m}{s} - 8.33 \frac{m}{s}}{10 s} \cdot 5 s = 13.33 \frac{m}{s}.$$

Vježba 485

Automobil se jednoliko ubrzava 20 s i pritom mu se brzina poveća od 30 km/h na 66 km/h. Koliki put prijeđe automobil za to vrijeme?

Rezultat: 266.6 m.

Zadatak 486 (Marija, gimnazija)

Pod kojim kutom treba baciti predmet da kvocijent dometa i maksimalne visine bude 4?

Rješenje 486

$$\frac{d}{h} = 4, \quad \alpha = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

Maksimalna visina tijela:

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}.$$

Domet (maksimalna udaljenost):

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{h} = 4 &\Rightarrow \frac{\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}}{\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}}{\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}} = 4 \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{2 \cdot \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 \Rightarrow \frac{4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 \Rightarrow \frac{4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ. \end{aligned}$$

Vježba 486

Pod kojim kutom treba baciti predmet da kvocijent dometa i maksimalne visine bude 1?

Rezultat: $\approx 76^\circ$.

Zadatak 487 (Marija, gimnazija)

Strjelica izbačena s razine tla pala je nakon $t = 3.1$ s na udaljenosti $d = 50.5$ m. Odredite početnu brzinu izbacivanja. (Ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 487

$$t = 3.1 \text{ s}, \quad d = 50.5 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada.

Izrazi za komponente puta u smjerovima koordinatnih osi x i y u trenutku t glase:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y &= v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\}.$$

U formule za udaljenost x i visinu y stavimo $x = d$, $y = 0$ pa dobijemo:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y &= v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= d \\ y &= 0 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} d &= v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ 0 &= v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha &= d \\ v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha &= d \\ v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha &= d \cdot \frac{1}{v_0 \cdot t} \\ v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \cdot \frac{1}{v_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d}{v_0 \cdot t} \\ \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{v_0 \cdot t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d}{v_0 \cdot t} \\ \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{v_0 \cdot t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d}{v_0 \cdot t} \\ \sin \alpha = \frac{g \cdot t}{2 \cdot v_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d}{v_0 \cdot t} \quad / \cdot 2 \\ \sin \alpha = \frac{g \cdot t}{2 \cdot v_0} \quad / \cdot 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos^2 \alpha = \left(\frac{d}{v_0 \cdot t} \right)^2 \\ \sin^2 \alpha = \left(\frac{g \cdot t}{2 \cdot v_0} \right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \left(\frac{d}{v_0 \cdot t} \right)^2 + \left(\frac{g \cdot t}{2 \cdot v_0} \right)^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{d}{v_0 \cdot t} \right)^2 + \left(\frac{g \cdot t}{2 \cdot v_0} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{d^2}{v_0^2 \cdot t^2} + \frac{g^2 \cdot t^2}{4 \cdot v_0^2} \Rightarrow 1 = \frac{d^2}{v_0^2 \cdot t^2} + \frac{g^2 \cdot t^2}{4 \cdot v_0^2} \cdot v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{d^2}{t^2} + \frac{g^2 \cdot t^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \left(\frac{d}{t} \right)^2 + \left(\frac{g \cdot t}{2} \right)^2 \Rightarrow v_0^2 = \left(\frac{d}{t} \right)^2 + \left(\frac{g \cdot t}{2} \right)^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\left(\frac{d}{t} \right)^2 + \left(\frac{g \cdot t}{2} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{50.5 \text{ m}}{3.1 \text{ s}} \right)^2 + \left(\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.1 \text{ s}}{2} \right)^2} = 22.28 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 487

Strjelica izbačena s razine tla pala je nakon $t = 3.1 \text{ s}$ na udaljenosti $d = 505 \text{ dm}$. Odredite početnu brzinu izbacivanja. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 22.28 m/s.

Zadatak 488 (Fox, tehnička škola)

Tijelo slobodno pada sa visine 1 m na Zemlji i na Mjesecu. Koliki je omjer vremena slobodnog pada tijela na Zemlji i na Mjesecu? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_1 = 9.81 \text{ m/s}^2$, na Mjesecu $g_2 = 1.64 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 488

$$h = 1 \text{ m}, \quad g_1 = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad g_2 = 1.64 \text{ m/s}^2, \quad \frac{t_1}{t_2} = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}},$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je h visina pada.

Vrijeme slobodnog pada tijela sa visine h je:

- na Zemlji

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_1}}$$

- na Mjesecu

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_2}}$$

Omjer vremena iznosi:

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{t_2} &= \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_1}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_2}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{1.64 \frac{m}{s^2}}{9.81 \frac{m}{s^2}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{1.64 \frac{m}{s^2}}{9.81 \frac{m}{s^2}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 0.41. \end{aligned}$$

Vježba 488

Tijelo slobodno pada sa visine 3 m na Zemlji i na Mjesecu. Koliki je omjer vremena slobodnog pada tijela na Zemlji i na Mjesecu? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_1 = 9.81 \text{ m/s}^2$, na Mjesecu $g_2 = 1.64 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 0.41.

Zadatak 489 (Fox, tehnička škola)

Tijelo je pušteno da slobodno pada sa visine 100 m. Istodobno je bačeno drugo tijelo vertikalno uvis. Kojom početnom brzinom treba baciti drugo tijelo da bi se tijela mimoišla na visini 28 m? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 489

$$h = 100 \text{ m}, \quad h_1 = 28 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

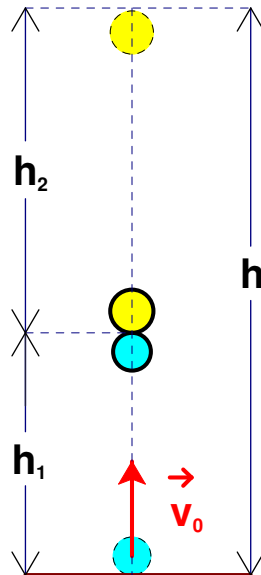
gdje je h visina pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Vertikalni hitac uvis je gibanje složeno od jednolikog pravocrtnoga gibanja prema gore i slobodnog pada prema dolje. Visina h u času kad je prošlo vrijeme t dana je izrazom

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je v_0 početna brzina.



Neka je t vrijeme potrebno da se dva tijela susretnu u zraku na visini h_1 . Prvo tijelo, slobodno padajući, prešlo je put:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= h - h_1 \\ h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h - h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Drugo tijelo pri penjanju, gibajući se jednoliko usporeno, prevali put:

$$h_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Eliminiranjem vremena t iz sustava jednadžbi dobije se tražena početna brzina v_0 .

$$\left. \begin{aligned} h - h_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow h - h_1 + h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - h_1 + h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h = v_0 \cdot t \Rightarrow h = v_0 \cdot t \cdot \frac{1}{v_0} \Rightarrow t = \frac{h}{v_0}.$$

Sada je:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{h}{v_0} \\ h - h_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow h - h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{h}{v_0} \right)^2 \Rightarrow h - h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{h^2}{v_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{h^2}{v_0^2} \cdot \frac{v_0^2}{h - h_1} \Rightarrow v_0^2 = \frac{g \cdot h^2}{2 \cdot (h - h_1)} \Rightarrow v_0^2 = \frac{g \cdot h^2}{2 \cdot (h - h_1)} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot h^2}{2 \cdot (h - h_1)}} \Rightarrow v_0 = h \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (h - h_1)}} = 100 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot (100 \text{ m} - 28 \text{ m})}} = 26.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 489

Tijelo je pušteno da slobodno pada sa visine 0.1 km. Istodobno je bačeno drugo tijelo vertikalno uvis. Kojom početnom brzinom treba baciti drugo tijelo da bi se tijela mimoišla na visini 280 dm? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: $26.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Zadatak 490 (Bond, gimnazija)

Koliko vremena traje padanje predmeta s visine 240 m ako je početna brzina 10 m/s? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 490

$$h = 240 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

gdje je h visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 tada formula za slobodni pad glasi:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vrijeme padanja s visine h iznosi:

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h / 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 = 2 \cdot h \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow g \cdot t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} g \cdot t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t - 2 \cdot h &= 0 \\ a = g, b = 2 \cdot v_0, c = -2 \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{(2 \cdot v_0)^2 - 4 \cdot g \cdot (-2 \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot v_0^2 + 8 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm 2 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g} \\ t_2 &= \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g} \text{ nema smisla, negativan je} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g} = \frac{-10 \frac{m}{s} + \sqrt{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 240 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 6.05 s.$$

Vježba 490

Koliko vremena traje padanje predmeta s visine 0.24 km ako je početna brzina 36 km/h? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 6.05 s.

Zadatak 491 (Bond, gimnazija)

Predmet pada s visine 240 m početnom brzinom 10 m/s. Nakon koliko je vremena predmet na polovini visine? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 491

$$h = 240 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu v_0 tada formula za slobodni pad glasi:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vrijeme nakon kojega je predmet na polovini visine h iznosi:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{h}{2} \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{h}{2} \cdot / \cdot 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 = h \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 - h = 0 \Rightarrow g \cdot t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t - h = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} g \cdot t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t - h &= 0 \\ a = g, b = 2 \cdot v_0, c = -h \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{(2 \cdot v_0)^2 - 4 \cdot g \cdot (-h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot v_0^2 + 4 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot (v_0^2 + g \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm 2 \cdot \sqrt{v_0^2 + g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + g \cdot h}}{g} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + g \cdot h}}{g} \\ t_2 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + g \cdot h}}{g} \text{ nema smisla, negativan je} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + g \cdot h}}{g} = \frac{-10 \frac{m}{s} + \sqrt{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2 + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 240 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 4.03 s.$$

Vježba 491

Predmet pada s visine 0.24 km početnom brzinom 36 km/h. Nakon koliko je vremena predmet na polovini visine? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 4.03 s.

Zadatak 492 (Žac, gimnazija)

Jednoliko se ubrzavajući vlak prolazi pokraj promatrača koji ustanovi da je vagon duljine 24 m prošao kraj njega za 2.6 s, a sljedeći vagon jednake duljine za 2.2 s. Koliko je ubrzanje vlaka?

Rješenje 492

$$l_1 = 24 \text{ m}, \quad t_1 = 2.6 \text{ s}, \quad l_2 = l_1 = 24 \text{ m}, \quad t_2 = 2.2 \text{ s}, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$v = a \cdot t, \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje su v i s brzina, odnosno put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijede formule za brzinu v i put s :

$$v = v_0 + a \cdot t, \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Vlak se jednoliko ubrzava. Prvi vagon nailazi pokraj promatrača brzinom v_1 pa za put l (duljinu vagona) vrijedi:

$$l = v_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2.$$

Drugi vagon, jednake duljine l , nailazi brzinom v_2 koja iznosi

$$v_2 = v_1 + a \cdot t_1$$

pa je sada

$$l = v_2 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow l = (v_1 + a \cdot t_1) \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2.$$

Iz sustava jednačbi dobije se akceleracija a .

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} l &= v_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ l &= (v_1 + a \cdot t_1) \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} l &= v_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \\ l &= v_1 \cdot t_2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 &= l \\ v_1 \cdot t_2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 &= l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 &= l / (-2 \cdot t_2) \\ v_1 \cdot t_2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 &= l / 2 \cdot t_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -2 \cdot v_1 \cdot t_1 \cdot t_2 - a \cdot t_1^2 \cdot t_2 &= -2 \cdot l \cdot t_2 \\ 2 \cdot v_1 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2 \cdot a \cdot t_1^2 \cdot t_2 + a \cdot t_2^2 \cdot t_1 &= 2 \cdot l \cdot t_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2 \cdot a \cdot t_1^2 \cdot t_2 + a \cdot t_2^2 \cdot t_1 - a \cdot t_1^2 \cdot t_2 = 2 \cdot l \cdot t_1 - 2 \cdot l \cdot t_2 \Rightarrow a \cdot t_1^2 \cdot t_2 + a \cdot t_2^2 \cdot t_1 = 2 \cdot l \cdot t_1 - 2 \cdot l \cdot t_2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow a \cdot (t_1^2 \cdot t_2 + t_2^2 \cdot t_1) = 2 \cdot l \cdot t_1 - 2 \cdot l \cdot t_2 \Rightarrow a \cdot (t_1^2 \cdot t_2 + t_2^2 \cdot t_1) = 2 \cdot l \cdot t_1 - 2 \cdot l \cdot t_2 \cdot \frac{1}{t_1^2 \cdot t_2 + t_2^2 \cdot t_1} \Rightarrow \\
& \Rightarrow a = \frac{2 \cdot l \cdot t_1 - 2 \cdot l \cdot t_2}{t_1^2 \cdot t_2 + t_2^2 \cdot t_1} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot l \cdot (t_1 - t_2)}{t_1 \cdot t_2 \cdot (t_1 + t_2)} = \frac{2 \cdot 24 \text{ m} \cdot (2.6 \text{ s} - 2.2 \text{ s})}{2.6 \text{ s} \cdot 2.2 \text{ s} \cdot (2.6 \text{ s} + 2.2 \text{ s})} = 0.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.
\end{aligned}$$

Vježba 492

Jednoliko se ubrzavajući vlak prolazi pokraj promatrača koji ustanovi da je vagon duljine 12 m prošao kraj njega za 2.6 s, a sljedeći vagon jednake duljine za 2.2 s. Koliko je ubrzanje vlaka?

Rezultat: 0.35 m/s^2 .

Zadatak 493 (Tehničar, tehnička škola)

Kaskaderski automobil duljine 4 m zalijeće se s visine 3 m preskačući jarak širine 12 m. Kolika je najmanja brzina kojom automobil može preskočiti jarak? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 493

$$d = 4 \text{ m}, \quad h = 3 \text{ m}, \quad s = 12 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Horizontalni hitac je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom v_0 i slobodnog pada. Brzina v_0 računa se po formuli

$$v_0 = D \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot y}},$$

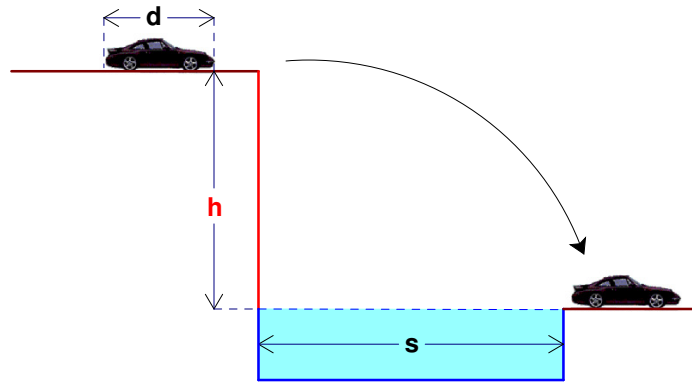
gdje je D domet hica, g ubrzanje slobodnog pada, y visina s koje je tijelo izbačeno u horizontalnom smjeru brzinom v_0 .

Budući da automobil mora preletjeti širinu jarka s uvećanu za vlastitu duljinu d, njegov domet D mora biti

$$D = s + d$$

pa najmanja brzina v_0 iznosi:

$$\left. \begin{aligned} D &= s + d, \quad y = h \\ v_0 &= D \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot y}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_0 = (s + d) \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}} = (12 \text{ m} + 4 \text{ m}) \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 3 \text{ m}}} = 20.46 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



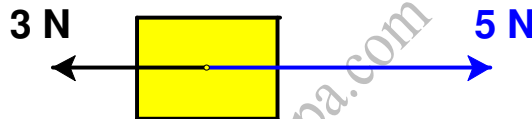
Vježba 493

Kaskaderski automobil duljine 4 m zalijeće se s visine 30 dm preskačući jarak širine 1200 cm. Kolika je najmanja brzina kojom automobil može preskočiti jarak? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 20.46 m/s.

Zadatak 494 (Ivan, strukovna škola)

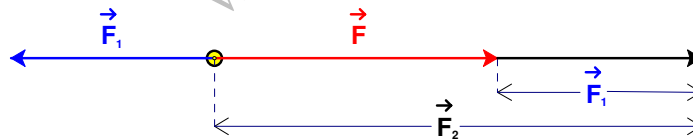
Na tijelo djeluju dvije sile iznosa 3 N i 5 N kao što je prikazano na crtežu. Masa tijela je 4 kg. Koliki je iznos akceleracije tijela?



Rješenje 494

$$F_1 = 3 \text{ N}, \quad F_2 = 5 \text{ N}, \quad a = ?$$

Ako dvije sile koje djeluju na tijelo nisu međusobno jednake, a djeluju na istom pravcu u suprotnim smjerovima onda će se tijelo ponašati kao da na nj djeluje rezultanta vektorskog zbroja objiju sila.



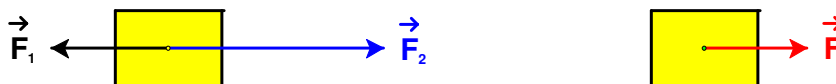
Sile koje zbrajamo zovemo komponentama, a rezultat rezultatnom silom ili naprosto rezultantom. Veličina rezultante F jednaka je razlici komponenata, a smjer joj je isti kao i smjer veće komponente.

$$F = F_2 - F_1.$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F . Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

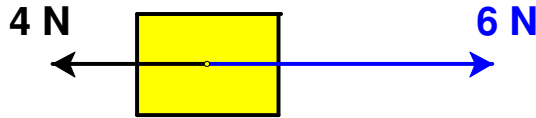


Računamo akceleraciju tijela.

$$\left. \begin{array}{l} F = F_2 - F_1 \\ a = \frac{F}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{F_2 - F_1}{m} = \frac{5 \text{ N} - 3 \text{ N}}{4 \text{ kg}} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 494

Na tijelo djeluju dvije sile iznosa 4 N i 6 N kao što je prikazano na crtežu. Masa tijela je 4 kg. Koliki je iznos akceleracije tijela?



Rezultat: 0.5 m/s^2 .

Zadatak 495 (Tony, gimnazija)

Fontana treba izbacivati mlazove vode maksimalne visine 1.6 m na udaljenost 1.4 m. Odredi nagib izlazne cijevi.

Rješenje 495

$$h = 1.6 \text{ m}, \quad d = 1.4 \text{ m}, \quad \alpha = ?$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom v_0 po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut α (kut elevacije) i slobodnog pada. Maksimalna visina koju tijelo postigne:

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}.$$

Domet (maksimalna udaljenost) tijela

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}.$$

Nagib cijevi odredit ćemo iz sustava jednačbi.

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \\ d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}}{\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}} \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cdot \sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \alpha}{2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sin \alpha}{4 \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sin \alpha}{4 \cdot \cos \alpha} \cdot 4 \Rightarrow \frac{4 \cdot h}{d} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{4 \cdot h}{d} = \text{tg } \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{4 \cdot h}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{4 \cdot h}{d} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{4 \cdot 1.6 \text{ m}}{1.4 \text{ m}} \right) = 77^\circ 39' 39''.$$



Vježba 495

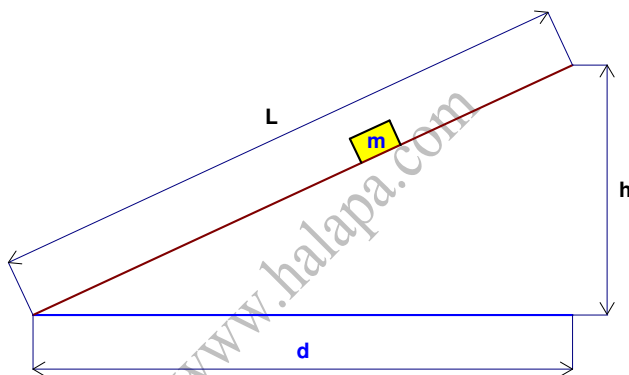
Fontana treba izbacivati mlazeve vode maksimalne visine 3.2 m na udaljenost 2.8 m. Odredi nagib izlazne cijevi.

Rezultat: $77^\circ 39' 39''$.

Zadatak 496 (Marija, gimnazija)

Tijelo mase m postavljeno je na ravnu gredu duljine L . Jedan kraj grede podigne se na visinu h od vodoravnoga tla, kao što je prikazano na crtežu. Koliki je iznos ukupne sile na tijelo? Oznakom d na crtežu označena je duljina osnovice kosine koju tvori greda. Zanemarite trenje. AA

A. $\frac{m \cdot g \cdot h}{L}$ B. $\frac{m \cdot g \cdot h}{d}$ C. $\frac{m \cdot g \cdot d}{h}$ D. $\frac{m \cdot g \cdot d}{L}$



Rješenje 496

$L, h, d, g, F_1 = ?$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

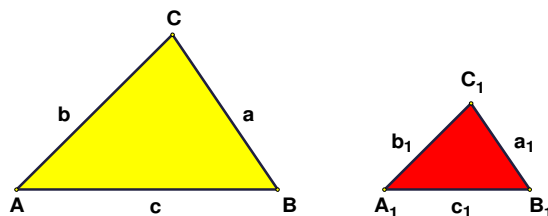
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent $a : b$, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b .

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c .

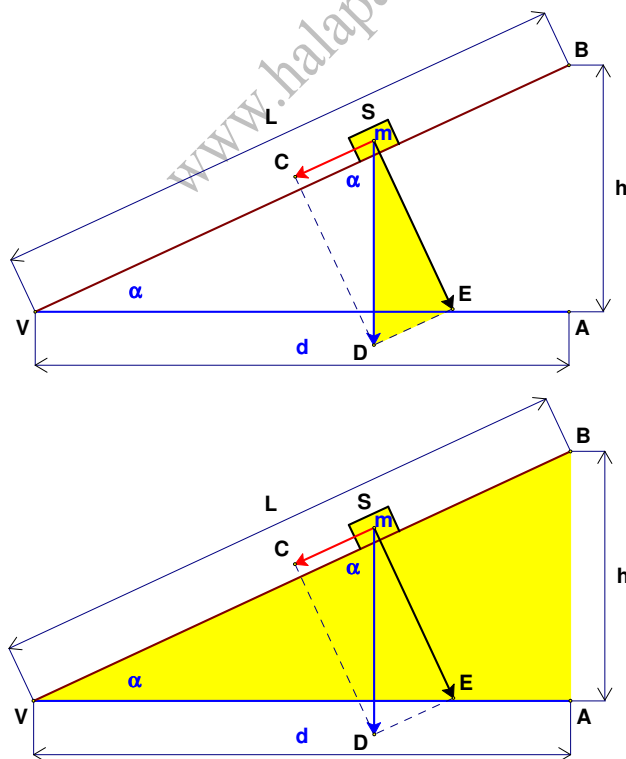
$$a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.



Pri razmatranju gibanja na kosini moramo rastaviti silu težu G na dvije komponente: silu F_1 usporodnu s kosinom koja ubrzava tijelo niz kosinu i silu F_2 okomitu na kosinu.

1. inačica

Uočimo da su pravokutni trokuti $\triangle SDE$ i $\triangle VAB$ slični (podudaraju se u dva kuta) pa vrijedi razmjer:

$$F_1 : G = h : L \Rightarrow F_1 \cdot L = G \cdot h \Rightarrow F_1 \cdot L = G \cdot h \cdot \frac{1}{L} \Rightarrow F_1 = \frac{G \cdot h}{L} \Rightarrow F_1 = \frac{m \cdot g \cdot h}{L}$$

Odgovor je pod A.

2. inačica

Uočimo da su pravokutni trokuti ΔSDE i ΔVAB slični (podudaraju se u dva kuta) pa za funkciju sinus vrijedi:

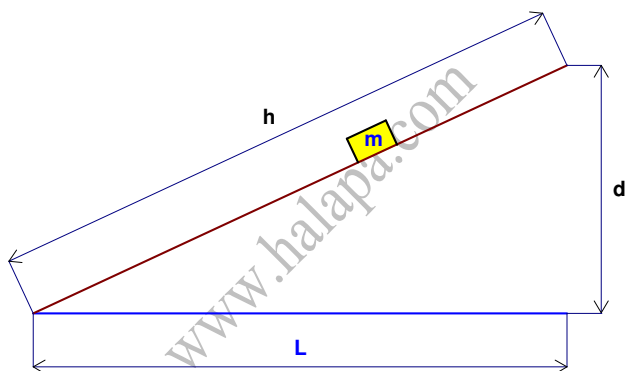
$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{F_1}{G} \text{ za } \Delta SDE \\ \sin \alpha = \frac{h}{L} \text{ za } \Delta VAB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_1}{G} = \frac{h}{L} \Rightarrow \frac{F_1}{G} = \frac{h}{L} \cdot G \Rightarrow F_1 = \frac{G \cdot h}{L} \Rightarrow F_1 = \frac{m \cdot g \cdot h}{L}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 496

Tijelo mase m postavljeno je na ravnu gredu duljine L . Jedan kraj grede podigne se na visinu h od vodoravnoga tla, kao što je prikazano na crtežu. Koliki je iznos ukupne sile na tijelo? Oznakom d na crtežu označena je duljina osnovice kosine koju tvori greda. Zanemarite trenje. AA

A. $\frac{m \cdot g \cdot h}{L}$ B. $\frac{m \cdot g \cdot h}{d}$ C. $\frac{m \cdot g \cdot d}{h}$ D. $\frac{m \cdot g \cdot d}{L}$



Rezultat: C.

Zadatak 497 (Ivan, strukovna škola)

Težina željeznog predmeta je 75 N. Koliki je njegov obujam? (gustoća željeza $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 497

$$G = 75 \text{ N}, \quad \rho = 7900 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad V = ?$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}, \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Gustoću ρ neke tvari definiramo kvocijentom mase m i obujma V tijela:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Računamo obujam predmeta uporabom formula za težinu i gustoću.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} G &= m \cdot g \\ \rho &= \frac{m}{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} G &= m \cdot g \cdot \frac{1}{g} \\ \rho &= \frac{m}{V} \cdot \frac{V}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m &= \frac{G}{g} \\ V &= \frac{m}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = \frac{G}{\rho} \Rightarrow V = \frac{G}{\frac{g}{1}} \Rightarrow V = \frac{G}{g \cdot \rho} = \\
 &= \frac{75 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.000968 \text{ m}^3 = 0.968 \text{ dm}^3.
 \end{aligned}$$

Vježba 497

Težina željeznog predmeta je 150 N, Koliki je njegov obujam? (gustoća željeza $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.936 dm³.

Zadatak 498 (Ivan, strukovna škola)

Izračunaj silu potrebnu da se gura ormar težine 750 N. Faktor trenja između ormara i poda je 30%. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 498

$$G = 750 \text{ N}, \quad \mu = 30\% = 0.30, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

$$\text{Na primjer, } 9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 0.3\% = \frac{0.3}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da se ormar giba jednoliko, sila F koja izvodi gibanje jednaka je sili trenja F_{tr} . Trenje je jednako umnošku faktora trenja i sile koja djeluje okomito na podlogu (u ovom slučaju to je težina ormara G)

$$\left. \begin{aligned} F &= F_{tr} \\ F_{tr} &= \mu \cdot G \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \mu \cdot G = 0.30 \cdot 750 \text{ N} = 225 \text{ N}.$$

Vježba 498

Izračunaj silu potrebnu da se gura ormar težine 375 N. Faktor trenja između ormara i poda je 60%. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 225 N.

Zadatak 499 (Ivan, strukovna škola)

Izračunajte koeficijent trenja između asfalta i kotača automobila mase 1.3 t, ako je sila trenja koja zaustavlja automobil 10400 N. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 499

$$m = 1.3 \text{ t} = 1300 \text{ kg}, \quad F_{tr} = 10400 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \mu = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

$$\text{Na primjer, } 9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 0.3\% = \frac{0.3}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

Trenje je sila koja zaustavlja automobil pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} G = m \cdot g \\ F_{tr} = \mu \cdot G \end{array} \right\} \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{1}{m \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{F_{tr}}{m \cdot g} =$$

$$= \frac{10400 \text{ N}}{1300 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.82 = \frac{82}{100} = 82\%.$$

Vježba 499

Izračunajte koeficijent trenja između asfalta i kotača automobila mase 2.6 t, ako je sila trenja koja zaustavlja automobil 20800 N. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 82%.

Zadatak 500 (Hrvoje, tehnička škola)

S tijela A mase 7 kg visi pričvršćeno uže i na njemu drugo tijelo B mase 5 kg. Masa užeta je 4 kg. Na tijelo A djeluje prema gore sila 188.8 N.

- Kolika je akceleracija tog sustava?
- Kolika je napetost užeta na njegovu gornjem kraju?
- Kolika je napetost užeta na polovici njegove duljine? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 500

$$m_A = 7 \text{ kg}, \quad m_B = 5 \text{ kg}, \quad m_u = 4 \text{ kg}, \quad F = 188.8 \text{ N}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?,$$

$$F_1 = ?, \quad F_2 = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

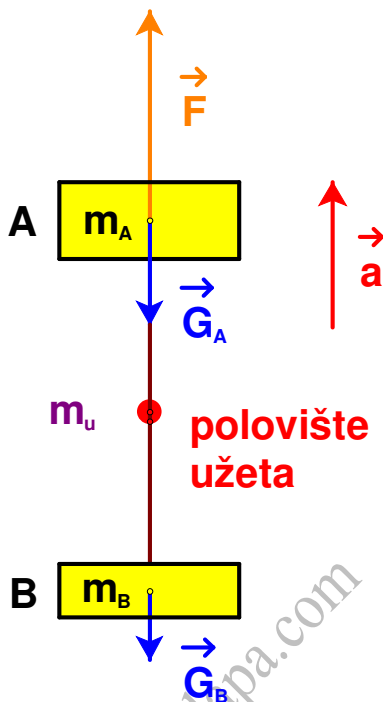
$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F.

Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po

pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $F = -m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.



a) Rezultantna sila F_r koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici sile F koja djeluje prema gore i zbroja sila teža na tijelo mase m_A , tijelo mase m_B i uže mase m_u .

$$F_r = F - (G_A + G_B + G_u) \Rightarrow F_r = F - (m_A \cdot g + m_B \cdot g + m_u \cdot g) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_r = F - (m_A + m_B + m_u) \cdot g.$$

Kako rezultantna sila F_r pokreće cijeli sustav, to je masa

$$m = m_A + m_B + m_u.$$

Akceleraciju ćemo naći iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F_r}{m} \Rightarrow a = \frac{F - (m_A + m_B + m_u) \cdot g}{m_A + m_B + m_u} = \\ = \frac{188.8 \text{ N} - (7 \text{ kg} + 5 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{7 \text{ kg} + 5 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 1.99 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Sustav se giba prema gore akceleracijom a . Uže, dakle, napinje ponajprije težina tereta G_B , težina užeta G_u , ali i inercijske sile koje se javljaju zato što tijelo i uže vučemo gore akceleracijom a . Sila F_1 koja napinje uže jest

$$F_1 = G_B + G_u + m_B \cdot a + m_u \cdot a \Rightarrow F_1 = m_B \cdot g + m_u \cdot g + m_B \cdot a + m_u \cdot a \Rightarrow \\ \Rightarrow F_1 = (m_B + m_u) \cdot g + (m_B + m_u) \cdot a \Rightarrow F_1 = (m_B + m_u) \cdot (g + a) =$$

$$= (5 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 106.29 \text{ N}.$$

c) Sustav se giba prema gore akceleracijom a . Uže, dakle, napinje ponajprije težina tereta G_B , težina polovice užeta $\frac{1}{2} \cdot G_u$, ali i inercijske sile koje se javljaju zato što tijelo i uže vučemo gore akceleracijom a . Sila F_2 koja napinje uže jest

$$\begin{aligned} F_2 &= G_B + \frac{1}{2} \cdot G_u + m_B \cdot a + \frac{1}{2} \cdot m_u \cdot a \Rightarrow F_2 = m_B \cdot g + \frac{1}{2} \cdot m_u \cdot g + m_B \cdot a + \frac{1}{2} \cdot m_u \cdot a \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_2 = \left(m_B + \frac{1}{2} \cdot m_u \right) \cdot g + \left(m_B + \frac{1}{2} \cdot m_u \right) \cdot a \Rightarrow F_2 = \left(m_B + \frac{1}{2} \cdot m_u \right) \cdot (g + a) = \\ &= \left(5 \text{ kg} + \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ kg} \right) \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 82.67 \text{ N}. \end{aligned}$$

Vježba 500

S tijela A mase 8 kg visi pričvršćeno uže i na njemu drugo tijelo B mase 6 kg. Masa užeta je 2 kg. Na tijelo A djeluje prema gore sila 188.8 N. Kolika je akceleracija tog sustava? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 2 m/s^2 .