

### Zadatak 561 (Josipa, kemija)

- Tijelo je bačeno vertikalno prema dolje početnom brzinom 10 m/s sa zgrade visoke 15 m.
- Koliko je vrijeme padanja?
  - Kolika je brzina tijela pri udaru o tlo?
  - Koliko bi dugo tijelo slobodno padalo? Otpor zraka zanemarite. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 561

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad h = 15 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad t = ?, \quad v = ?, \quad t_1 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je  $h$  visina pada.

Ako tijelo ima početnu brzinu  $v_0$  tada formule za brzinu kod slobodnog pada glase:

$$v = v_0 + g \cdot t, \quad v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $h$  visina pada.

a)

Da bismo odredili vrijeme trajanja hica moramo riješiti kvadratnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot h = 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 &= 2 \cdot h \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot t + g \cdot t^2 - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow g \cdot t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} g \cdot t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t - 2 \cdot h &= 0 \\ a = g, \quad b = 2 \cdot v_0, \quad c = -2 \cdot h \end{aligned} \right\} &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{(2 \cdot v_0)^2 - 4 \cdot g \cdot (-2 \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot v_0^2 + 8 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4 \cdot (v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h)}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \cdot v_0 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{-2 \cdot v_0 \pm 2 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} &= \frac{2 \cdot (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h})}{2 \cdot g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 15 m}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \frac{m}{s} \pm \sqrt{100 \frac{m^2}{s^2} + 294.3 \frac{m^2}{s^2}}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \frac{m}{s} \pm \sqrt{394.3 \frac{m^2}{s^2}}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \frac{m}{s} \pm 19.86 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{-10 \frac{m}{s} + 19.86 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \\ t_2 = \frac{-10 \frac{m}{s} - 19.86 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{9.86 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \\ t_2 = \frac{-29.86 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 1.01 s \\ t_2 = -3.04 s \text{ nema smisla} \end{array} \right\} \Rightarrow t = 1.01 s.$$

b)

Brzinu tijela pri udaru o tlo možemo izračunati na dva načina.

1. inačica

$$v = v_0 + g \cdot t = 10 \frac{m}{s} + 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1.01 s = 19.91 \frac{m}{s}.$$

2. inačica

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} =$$

$$= \sqrt{\left(10 \frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 15 m} = 19.86 \frac{m}{s}.$$



Bez panike! Rezultati se razlikuju zbog zaokruživanja.

c)

U slučaju slobodnog pada vrijeme padanja  $t_1$  iznosi:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1.75 \text{ s.}$$

### Vježba 561

Koliko vremena traje padanje predmeta s visine 240 m, ako je početna brzina 10 m / s? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 6 s.

### Zadatak 562 (Azra, medicinska škola)

Kruška u slobodnom padu, tijekom posljednje sekunde gibanja, prijeđe trećinu visine s koje pada. Vrijeme pada kruške je:

- A. 2.34 s      B. 3.24 s      C. 4.32 s      D. 5.45 s      E. 5.54 s

### Rješenje 562

$$\Delta t = 1 \text{ s}, \quad t = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Neka je h visina s koje je počela padati kruška, a t vrijeme padanja. Ako kruška tijekom posljednje sekunde ( $\Delta t$ ) prijeđe trećinu puta, znači da je za vrijeme  $t - \Delta t$  prevalila  $\frac{2}{3}$  puta. Uporabom relacije za slobodni pad i uzevši u obzir uvjete zadatka, dobivamo:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ \frac{2}{3} \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{h}{\frac{2}{3} \cdot h} = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\frac{2}{3} \cdot h} = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} \Rightarrow$$

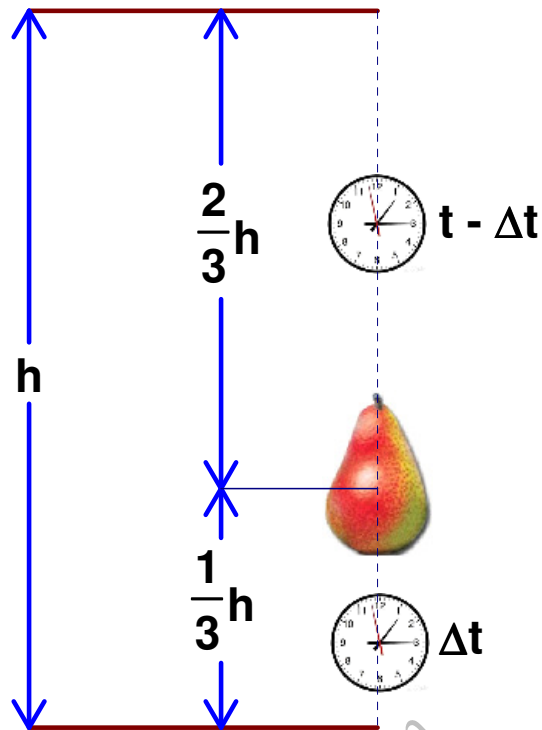
$$\Rightarrow 1.5 = \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} \Rightarrow \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} = 1.5 \Rightarrow \left( \frac{t}{t - \Delta t} \right)^2 = 1.5 \Rightarrow \left( \frac{t}{t - \Delta t} \right) = 1.5 \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t - \Delta t} = \sqrt{1.5} \Rightarrow \frac{t}{t - \Delta t} = \sqrt{1.5} \cdot (t - \Delta t) \Rightarrow t = (t - \Delta t) \cdot \sqrt{1.5} \Rightarrow (t - \Delta t) \cdot \sqrt{1.5} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \sqrt{1.5} - \Delta t \cdot \sqrt{1.5} = t \Rightarrow t \cdot \sqrt{1.5} - t = \Delta t \cdot \sqrt{1.5} \Rightarrow t \cdot (\sqrt{1.5} - 1) = \Delta t \cdot \sqrt{1.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (\sqrt{1.5} - 1) = \Delta t \cdot \sqrt{1.5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1.5} - 1} \Rightarrow t = \frac{\Delta t \cdot \sqrt{1.5}}{\sqrt{1.5} - 1} = \frac{1 \text{ s} \cdot \sqrt{1.5}}{\sqrt{1.5} - 1} = 5.45 \text{ s.}$$

Odgovor je pod D.



### Vježba 562

Jabuka ☺ u slobodnom padu, tijekom posljednje sekunde gibanja, prijeđe polovinu od ukupne duljine puta. Vrijeme pada jabuke je:

- A. 2.81 s      B. 3.41 s      C. 3.14 s      D. 3.45 s      E. 4.54 s

**Rezultat:** B.

### Zadatak 563 (Azra, medicinska škola)

Metak, ispaljen vertikalno uvis, padne na tlo 10 s nakon ispaljivanja. Koju maksimalnu visinu postigne metak:

- A. 50 m      B. 100 m      C. 125 m      D. 195 m      E. 200 m

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 563

$$t_u = 10 \text{ s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Najviši domet  $h$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom hicu jest put  $u$  času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Let do najviše točke traje koliko i pad s te točke, tj. za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Budući da je zadano ukupno vrijeme vertikalnog hica uvis  $t_u$ , vrijeme penjanja  $t$  do maksimalne visine  $h$  iznosi:

$$t = \frac{1}{2} \cdot t_u.$$

Maksimalna visina je:

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \cdot t_u \\ h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot t_u \right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot t_u^2 \Rightarrow h = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t_u^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (10 s)^2 = 125 m.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 563

Metak, ispaljen vertikalno uvis, padne na tlo 20 s nakon ispaljivanja. Koju maksimalnu visinu postigne metak:

- A. 150 m      B. 200 m      C. 225 m      D. 450 m      E. 500 m

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** E.

### Zadatak 564 (Azra, medicinska škola)

Tijelo u slobodnom padu za vrijeme treće sekunde padanja prijeđe put:

- A. 9.81 m      B. 29.43 m      C. 88.29 m      D. 4.91 m      E. 24.53 m

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

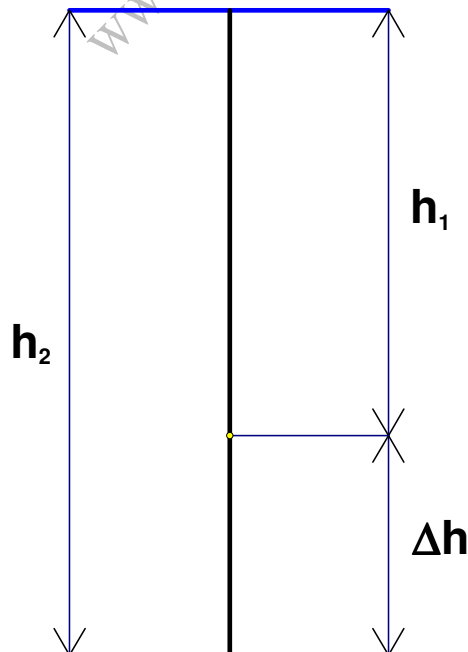
### Rješenje 564

$$t_1 = 2 \text{ s}, \quad t_2 = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta h = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $h$  visina pada.



Put u trećoj sekundi jednak je razlici puta za prve tri sekunde i puta za prve dvije sekunde.

$$\Delta h = h_2 - h_1 \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_2^2 - t_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot ((3 s)^2 - (2 s)^2) = 24.53 m.$$

Odgovor je pod E.

### Vježba 564

Tijelo u slobodnom padu za vrijeme druge sekunde padanja prijeđe put:

- A. 14.72 m      B. 14.88 m      C. 15.27 m      D. 16.11 m      E. 17.53 m

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** A.

### Zadatak 565 (Azra, medicinska škola)

Od zuba gustoće  $2500 \text{ kg/m}^3$  izrezana je kocka duljine brida 3 mm. Kolika je težina kocke?

- A. 662 N      B. 0.662 N      C. 662 mN      D. 0.662 mN      E. 6.62 N

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 565

$$\rho = 2500 \text{ kg/m}^3, \quad a = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad G = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid  $a$ , tada je obujam:

$$V = a^3.$$

$$G = m \cdot g \Rightarrow G = \rho \cdot V \cdot g \Rightarrow G = \rho \cdot a^3 \cdot g = 2500 \frac{kg}{m^3} \cdot (0.003 m)^3 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} =$$

$$= 0.000662 N \approx 0.662 mN.$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 565

Od zuba gustoće  $2500 \text{ kg/m}^3$  izrezana je kocka duljine brida 0.3 cm. Kolika je težina kocke? u slobodnom padu za vrijeme treće sekunde padanja prijeđe put:

- A. 662 N      B. 0.662 N      C. 662 mN      D. 0.662 mN      E. 6.62 N

(ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** D.

### Zadatak 566 (Tin, gimnazija)

Automobil se giba uzbrdo po kosini stalnom brzinom  $5 \text{ m/s}$ . Omjer baze  $b$  i hipotenuze  $L$  kosine jednak je  $0.9$ . Ako se giba nizbrdo jednakom snagom motora postiže stalnu brzinu  $20 \text{ m/s}$ . Kolikom će se brzinom gibati po horizontalno postavljenom putu, ako je snaga motora jednaka kao i prije? Faktor trenja je u svim slučajevima jednak. Pretpostavite da je vučna sila neovisna o brzini.

### Rješenje 566

$$v_1 = 5 \text{ m/s}, \quad \frac{b}{L} = 0.9, \quad v_2 = 20 \text{ m/s}, \quad P - \text{snaga motora jednaka u svim slučajevima,}$$

$\mu$  – faktor trenja jednak u svim slučajevima,  $v = ?$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

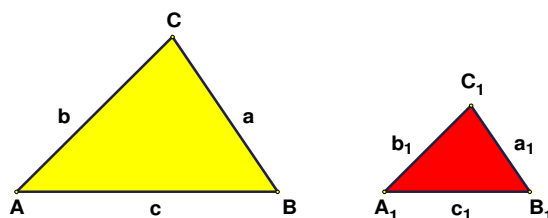
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

#### Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta  $k$  zovemo koeficijent sličnosti.



#### Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

#### Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

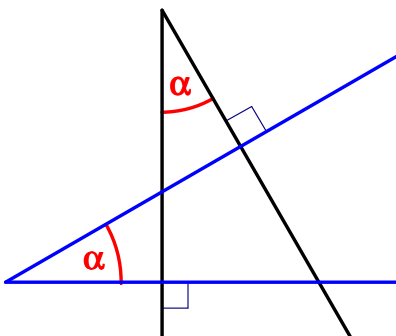
#### Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

#### Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Kutovi s međusobno okomitim kracima su sukladni.



Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek

počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine  $G$  iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Ako su  $a$  i  $b$  brojevi, kažemo da je kvocijent  $a : b$ ,  $b \neq 0$  omjer brojeva  $a$  i  $b$ . Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \text{ i } c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera  $a$  i  $d$  jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera  $b$  i  $c$ .

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

### Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

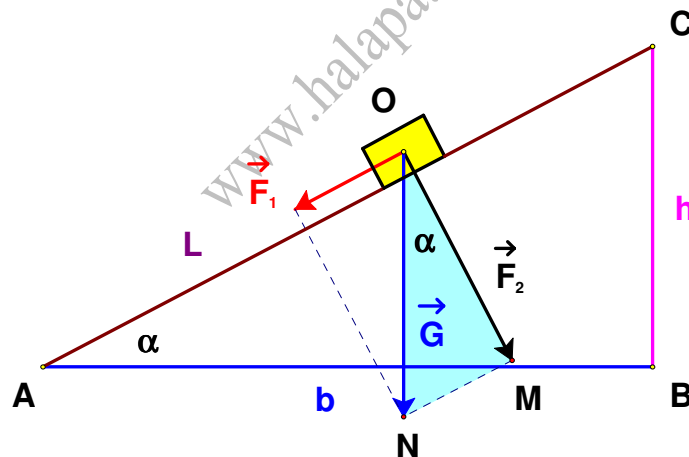
Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga se može izračunati izrazom

$$P = F \cdot v \Rightarrow F = \frac{P}{v},$$

gdje je  $F$  sila u smjeru gibanja tijela, a  $v$  brzina tijela.

Kada je tijelo na kosini njegovu težinu  $G$  rastavimo na dvije komponente:

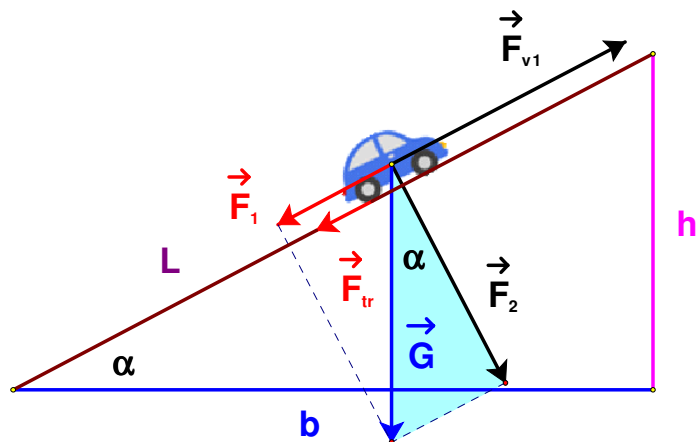
- silu  $F_1$  usporednu sa kosinom koja tijelo ubrzava niz kosinu
- silu  $F_2$  okomitu na kosinu koja pritišće kosinu.



Sa slike vidi se da su pravokutni trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle ONM$  slični pa vrijede razmjeri:

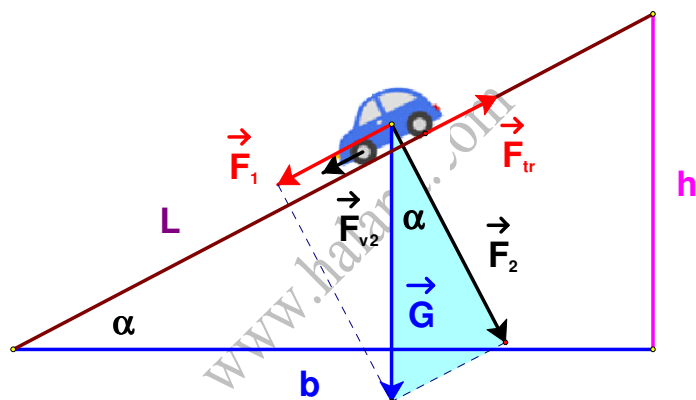
$$\left. \begin{array}{l} F_1 : G = h : L \\ F_2 : G = b : L \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 \cdot L = G \cdot h \\ F_2 \cdot L = G \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 \cdot L = G \cdot h \text{ } / : L \\ F_2 \cdot L = G \cdot b \text{ } / : L \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{h}{L} \\ F_2 = G \cdot \frac{b}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot g \cdot \frac{h}{L} \\ F_2 = m \cdot g \cdot \frac{b}{L} \end{array} \right\}.$$





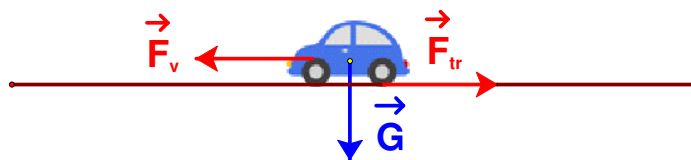
Kada se automobil giba uzbrdo po kosini stalnom brzinom  $v_1$  vučna sila  $F_{v1}$  motora jednaka je zbroju komponente sile teže  $F_1$  i sile trenja  $F_{tr}$ . Ona se troši na svladavanje komponente sile teže  $F_1$  i sile trenja  $F_{tr}$ .

$$F_{v1} = F_1 + F_{tr} \Rightarrow F_{v1} = F_1 + \mu \cdot F_2 \Rightarrow F_{v1} = m \cdot g \cdot \frac{h}{L} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L}.$$



Kada se automobil giba nizbrdo po kosini stalnom brzinom  $v_2$  vučna sila  $F_{v2}$  motora jednaka je razlici sile trenja  $F_{tr}$  i komponente sile teže  $F_1$ .

$$F_{v2} = F_{tr} - F_1 \Rightarrow F_{v2} = \mu \cdot F_2 - F_1 \Rightarrow F_{v2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} - m \cdot g \cdot \frac{h}{L}.$$



Na horizontalno postavljenom putu automobil se giba stalnom brzinom  $v$  pa je vučna sila  $F_v$  po iznosu jednaka sili trenja  $F_{tr}$ .

$$F_v = F_{tr} \Rightarrow F_v = \mu \cdot G \Rightarrow F_v = \mu \cdot m \cdot g.$$

Napišemo sustav jednačbi.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} F_{v1} &= m \cdot g \cdot \frac{h}{L} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} \\ F_{v2} &= \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} - m \cdot g \cdot \frac{h}{L} \\ F_v &= \mu \cdot m \cdot g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{zbrojimo prve} \\ \text{dvije jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{v1} + F_{v2} &= m \cdot g \cdot \frac{h}{L} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} - m \cdot g \cdot \frac{h}{L} \\ F_v &= \mu \cdot m \cdot g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{v1} + F_{v2} &= m \cdot g \cdot \frac{h}{L} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} - m \cdot g \cdot \frac{h}{L} \\ F_v &= \mu \cdot m \cdot g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{v1} + F_{v2} &= 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{L} \\ F_v &= \mu \cdot m \cdot g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow F_{v1} + F_{v2} = 2 \cdot F_v \cdot \frac{b}{L}.
\end{aligned}$$

Budući da je snaga motora u svim slučajevima jednaka, slijedi:

$$\begin{aligned}
F_{v1} + F_{v2} = 2 \cdot F_v \cdot \frac{b}{L} &\Rightarrow \frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2} = 2 \cdot \frac{P}{v} \cdot \frac{b}{L} \Rightarrow \frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2} = 2 \cdot \frac{P}{v} \cdot \frac{b}{L} \quad /: P \Rightarrow \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = 2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{b}{L} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{v_2 + v_1}{v_1 \cdot v_2} &= \frac{2 \cdot b}{v \cdot L} \Rightarrow \frac{v_1 + v_2}{v_1 \cdot v_2} = \frac{2 \cdot b}{v \cdot L} \Rightarrow \left[ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \right] \Rightarrow \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = \frac{v \cdot L}{2 \cdot b} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{v \cdot L}{2 \cdot b} &= \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow \frac{v \cdot L}{2 \cdot b} = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} \quad / \cdot \frac{2 \cdot b}{L} \Rightarrow v = 2 \cdot \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} \cdot \frac{b}{L} = \\
&= 2 \cdot \frac{5 \frac{m}{s} \cdot 20 \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s} + 20 \frac{m}{s}} \cdot 0.9 = 7.2 \frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

### Vježba 566

Automobil se giba uzbrdo po kosini stalnom brzinom 18 km / h. Omjer baze b i hipotenuze L kosine jednak je 0.9. Ako se giba nizbrdo jednakom snagom motora postiže stalnu brzinu 72 km / h. Kolikom će se brzinom gibati po horizontalno postavljenom putu, ako je snaga motora jednaka kao i prije? Faktor trenja je u svim slučajevima jednak. Pretpostavite da je vučna sila neovisna o brzini.

**Rezultat:** 7.2 m / s.

### Zadatak 567 (Danijel, gimnazija)

Kolika je vučna sila potrebna da automobil mase 1200 kg jednoliko ubrza od 0 do 20 m / s za 10 s, ako pretpostavimo da se 40% od ukupne vučne sile potroši na trenje i otpor?

### Rješenje 567

$$m = 1200 \text{ kg}, \quad v_1 = 0 \text{ m / s}, \quad v_2 = 20 \text{ m / s}, \quad t = 10 \text{ s}, \quad p = 40\% = 0.40, \quad F_v = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $F$ . Akceleracija  $a$  tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu (jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje) je gibanje tijela stalnom akceleracijom. Srednja akceleracija je kvocijent razlike brzina  $\Delta v$  u nekom vremenskom intervalu  $\Delta t$  i toga vremenskog intervala:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad , \quad \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Trenutna akceleracija  $a$  je omjer promjene brzine  $\Delta v$  u neizmjerljivo malom vremenskom intervalu (trenutku)  $\Delta t$  i toga trenutka. Kada razmatramo slučajeve gibanja pri kojima se vrijednost akceleracije neće mijenjati, onda je:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad , \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak  $p$  je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9\% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 547\% = \frac{547}{100} \quad , \quad p\% = \frac{p}{100}$$

Kako se računa "... p% od x...?"

$$\frac{p}{100} \cdot x$$

Kako zapisati da se  $x$  smanji za  $p\%$  ?

$$x - \frac{p}{100} \cdot x = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Budući da se  $p\%$  ukupne vučne sile potroši na trenje i otpor, sila koja automobil jednoliko ubrzava iznosi:

$$\begin{aligned} F &= F_V - p \cdot F_V \Rightarrow F = F_V - 0.40 \cdot F_V \Rightarrow F = 0.60 \cdot F_V \Rightarrow m \cdot a = 0.60 \cdot F_V \Rightarrow \\ \Rightarrow 0.60 \cdot F_V &= m \cdot a \Rightarrow 0.60 \cdot F_V = m \cdot a \quad / : 0.60 \Rightarrow F_V = \frac{m \cdot a}{0.60} \Rightarrow F_V = \frac{m \cdot (v_2 - v_1)}{0.60 \cdot t} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_V &= \frac{m \cdot (v_2 - v_1)}{0.60 \cdot t} = \frac{1200 \text{ kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{0.60 \cdot 10 \text{ s}} = 4000 \text{ N} = 4 \text{ kN} \end{aligned}$$

### Vježba 567

Kolika je vučna sila potrebna da automobil mase 1.2 t jednoliko ubrza od 0 do 72 km/h za 10 s, ako pretpostavimo da se 40% od ukupne vučne sile potroši na trenje i otpor?

**Rezultat:** 4 kN.

### Zadatak 568 (Danijel, gimnazija)

Na idealno glatkoj horizontalno postavljenoj podlozi leže dva tijela masa  $m_1 = 1 \text{ kg}$  i  $m_2 = 4 \text{ kg}$ , povezana užetom. Na tijela djeluju sile  $F_2 = 80 \text{ N}$  i  $F_1 = 30 \text{ N}$  kako je prikazano na crtežu.



- Kolika je akceleracija sustava?
- Kolika je sila napetosti užeta  $F_N$ ?

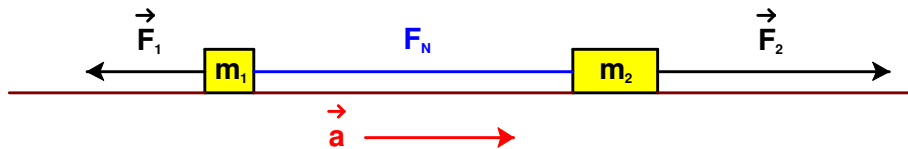
### Rješenje 568

$$m_1 = 1 \text{ kg}, \quad m_2 = 4 \text{ kg}, \quad F_2 = 80 \text{ N}, \quad F_1 = 30 \text{ N}, \quad a = ?, \quad F_N = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $F$ . Akceleracija  $a$  tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.



1. inačica

a)

Akceleraciju ćemo naći iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Sila  $F$  koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici sila  $F_2$  i  $F_1$ .

$$F = F_2 - F_1.$$

Kako sila  $F$  pokreće oba tijela, to je masa

$$m = m_1 + m_2.$$

Tako je

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2} = \frac{80 \text{ N} - 30 \text{ N}}{1 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b)

Cijeli sustav giba se u smjeru sile  $F_2$  pa za silu napetosti  $F_N$  vrijedi:

$$F_N = m_1 \cdot a + F_1 = 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 30 \text{ N} = 40 \text{ N}.$$

2. inačica

a)

Rezultantna sila koja djeluje na tijelo mase  $m_2$  je

$$m_2 \cdot a = F_2 - F_N,$$

a rezultantna sila na tijelo mase  $m_1$  je

$$m_1 \cdot a = F_N - F_1.$$

Iz sustava jednažbi slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} m_2 \cdot a = F_2 - F_N \\ m_1 \cdot a = F_N - F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednažbe} \end{array} \right] \Rightarrow m_2 \cdot a + m_1 \cdot a = F_2 - F_N + F_N - F_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \cdot (m_2 + m_1) = F_2 - F_N + F_N - F_1 \Rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = F_2 - F_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = F_2 - F_1 \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2} = \frac{80 \text{ N} - 30 \text{ N}}{1 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b)

Za silu napetosti vrijedi:

- $m_2 \cdot a = F_2 - F_N \Rightarrow F_N = F_2 - m_2 \cdot a = 80 \text{ N} - 4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 40 \text{ N}.$
- $m_1 \cdot a = F_N - F_1 \Rightarrow m_1 \cdot a + F_1 = F_N \Rightarrow F_N = m_1 \cdot a + F_1 = 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 30 \text{ N} = 40 \text{ N}.$

### Vježba 568

Na idealno glatkoj horizontalno postavljenoj ploči leže dva tijela masa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  i  $m_2 = 8 \text{ kg}$ , povezana užetom. Na tijela djeluju sile  $F_2 = 160 \text{ N}$  i  $F_1 = 60 \text{ N}$  kako je prikazano na crtežu.



- Kolika je akceleracija sustava?
- Kolika je sila napetosti užeta  $F_N$ ?

**Rezultat:**  $10 \text{ m/s}^2, 80 \text{ N}.$

### Zadatak 569 (Antonio, gimnazija)

Dvije kuglice bačene su jednakom početnom brzinom  $v_0$  iz jedne točke vertikalno uvis  $\Delta t$  sekundi jedna iza druge. U zraku se susretnu nakon  $t$  sekundi od izbacivanja prve kuglice. Odredite početnu brzinu kuglica. Zanemarite otpor zraka. (ubrzanje slobodnog pada  $g$ )

### Rješenje 569

$$\Delta t, \quad t, \quad g, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je put  $h$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Nakon vremena  $t$  prva kuglica nalazi se na visini

$$h_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Druga kuglica bačena je vertikalno uvis  $\Delta t$  sekundi kasnije od prve pa će nakon vremena  $t - \Delta t$  biti na visini

$$h_2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 &\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t - v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = -v_0 \cdot \Delta t + g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow v_0 \cdot \Delta t = g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_0 \cdot \Delta t = g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad / \cdot \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow v_0 = g \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t \Rightarrow v_0 = g \cdot \left( t - \frac{1}{2} \cdot \Delta t \right).$$

### Vježba 569

Dvije kuglice bačene su jednakom početnom brzinom  $v_0$  iz jedne točke vertikalno uvis 2 sekunde jedna iza druge. U zraku se susretnu nakon 6 sekundi od izbacivanja prve kuglice. Odredite početnu brzinu kuglica. Zanemarite otpor zraka.

**Rezultat:**  $v_0 = 5 \cdot g$ .

### Zadatak 570 (Azra, tehnička škola)

Sa površine Zemlje bačena je lopta pod kutom  $30^\circ$  prema horizontalnom smjeru početnom brzinom  $v_0$ . Nakon 0.5 s lopta dostigne maksimalnu visinu. Odredite njezinu početnu brzinu. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $4.91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $12.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $19.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       E.  $39.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### Rješenje 570

$$\alpha = 30^\circ, \quad t = 0.5 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Kosi hitac sastoji se od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  po pravcu koji s horizontalnim smjerom zatvara kut  $\alpha$  (kut elevacije) i slobodnog pada. Vrijeme za koje tijelo postigne maksimalnu visinu (vrijeme penjanja, uspona) računa se po formuli:

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = t \Rightarrow \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = t \cdot \frac{g}{\sin \alpha} \Rightarrow v_0 = \frac{t \cdot g}{\sin \alpha} = \frac{0.5 \text{ s} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin 30^\circ} = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 570

Sa površine Zemlje bačena je lopta pod kutom  $30^\circ$  prema horizontalnom smjeru početnom brzinom  $v_0$ . Nakon 1 s lopta dostigne maksimalnu visinu. Odredite njezinu početnu brzinu. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $4.91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       B.  $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       C.  $12.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       D.  $19.62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       E.  $39.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Rezultat:** D.

### Zadatak 571 (Igor, tehnička škola)

Tijelo je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom  $10 \text{ m/s}$ . U trenutku kada dosegne najvišu točku svoga gibanja, baci se drugo tijelo vertikalni uvis, istom početnom brzinom. Na kojoj će se visini tijela sudariti? Otpor zraka zanemariti. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 571

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h_1 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je put  $s$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

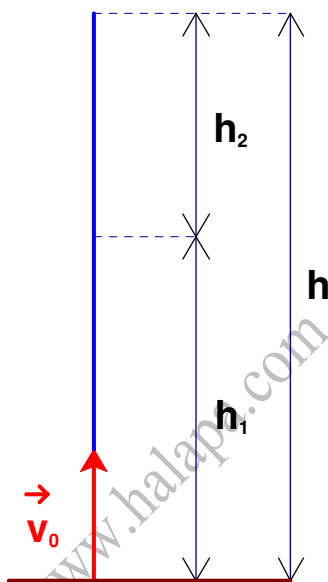
Najviši domet  $h$  što ga tijelo može postići pri vertikalnom huc jest put u času kad je  $v = 0$ . Onda je

$$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $h$  visina pada.



Ako je tijelo bačeno vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$  maksimalna visina iznosit će

$$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

U trenutku kada dosegne maksimalnu visinu, baci se drugo tijelo vertikalno uvis, istom početnom brzinom. Tijela će se susresti na nekoj visini  $h_1$ . Tada je:

$$h = h_2 + h_1,$$

gdje je  $h$  maksimalna visina,  $h_2$  put što ga prevali prvo tijelo za vrijeme  $t$ ,

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \text{ (slobodni pad),}$$

$h_1$  put što ga prevali drugo tijelo za isto vrijeme  $t$ ,

$$h_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se  $h_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 = v_0 \cdot t - h_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h_1 + h_2 = v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow [h = h_1 + h_2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ h &= v_0 \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ \frac{v_0^2}{2 \cdot g} &= v_0 \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ v_0 \cdot t &= \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ v_0 \cdot t &= \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \quad /: v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ t &= \frac{v_0}{2 \cdot g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( \frac{v_0}{2 \cdot g} \right)^2 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{4 \cdot g^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{4 \cdot g^2} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{4 \cdot g} \Rightarrow h_2 = \frac{v_0^2}{8 \cdot g}.$$

Tražena visina  $h_1$  iznosi:

$$h_1 + h_2 = h \Rightarrow h_1 = h - h_2 \Rightarrow \left[ \begin{aligned} h &= \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \\ h_2 &= \frac{v_0^2}{8 \cdot g} \end{aligned} \right] \Rightarrow h_1 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} - \frac{v_0^2}{8 \cdot g} \Rightarrow h_1 = \frac{4 \cdot v_0^2 - v_0^2}{8 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{3 \cdot v_0^2}{8 \cdot g} = \frac{3 \cdot \left( 10 \frac{m}{s} \right)^2}{8 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 3.823 \text{ m}.$$

### Vježba 571

Tijelo je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom 20 m / s. U trenutku kada dosegne najvišu točku svoga gibanja, baci se drugo tijelo vertikalni uvis, istom početnom brzinom. Na kojoj će se visini tijela sudariti? Otpor zraka zanemariti. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 15.29 m.

### Zadatak 572 (Azra, medicinska škola)

Dječak baci lopticu vertikalno uvis. Loptica se vrati na mjesto odakle je izbačena za 3.4 s. Odredi brzinu kojom je loptica bačena uvis. Otpor zraka zanemariti. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

$$A. 0 \frac{m}{s} \quad B. 13.4 \frac{m}{s} \quad C. 16.7 \frac{m}{s} \quad D. 22.1 \frac{m}{s} \quad E. 36.3 \frac{m}{s}$$

### Rješenje 572

$$t = 3.4 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad v_0 = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato mu je brzina  $v$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dana ovim izrazom:

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

Najviši domet što ga tijelo može postići pri vertikalnom hici jest u času kad je  $v = 0$ . Ona je

$$v_0 = g \cdot t.$$

Let do najviše točke traje koliko i pad s te točke, tj. za slobodni pad tijelo treba isto toliko vremena koliko je trebalo da dostigne najvišu točku.

Neka je  $t_0$  vrijeme za koje loptica postigne maksimalnu visinu. Tada je:



$$\left. \begin{array}{l} t_0 = \frac{1}{2} \cdot t \\ v_0 = g \cdot t_0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = g \cdot \frac{1}{2} \cdot t = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3.4 s = 16.7 \frac{m}{s}.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 572

Dječak baci lopticu vertikalno uvis. Loptica se vrati na mjesto odakle je izbačena za 6.8 s. Odredi brzinu kojom je loptica bačena uvis. Otpor zraka zanemariti. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $33.35 \frac{m}{s}$       B.  $30.4 \frac{m}{s}$       C.  $25.72 \frac{m}{s}$       D.  $36.63 \frac{m}{s}$       E.  $36.3 \frac{m}{s}$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 573 (Mario, gimnazija)

Tijelo, mase 2 kg, giba se vertikalno uvis pod djelovanjem stalne sile. Do visine 1 m ona obavi rad 80 J. Koliko je ubrzanje tijela? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 573

$$m = 2 \text{ kg}, \quad h = 1 \text{ m}, \quad W = 80 \text{ J}, \quad g = 9.80 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F.

Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

Tijekom gibanja na tijelo djeluju dvije sile:

- G – sila teža koja djeluje okomito prema dolje
- F – stalna sila koja djeluje okomito uvis.

Rezultantna sila koja podiže tijelo uvis jednaka je razlici sila F i G pa prema drugom Newtonovu poučku slijedi:

$$m \cdot a = F - G \Rightarrow m \cdot a = F - m \cdot g \Rightarrow m \cdot a = F - m \cdot g \quad /: m \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g.$$

Budući da sila F na putu h obavi rad W, vrijedi:

$$W = F \cdot h \Rightarrow F \cdot h = W \Rightarrow F \cdot h = W \quad /: h \Rightarrow F = \frac{W}{h}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se akceleracija a.

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{W}{h} \\ a = \frac{F}{m} - g \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{W}{h} - g \Rightarrow a = \frac{W}{\frac{h}{m}} - g \Rightarrow a = \frac{W}{m \cdot h} - g = \frac{80 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}} - 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 30.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

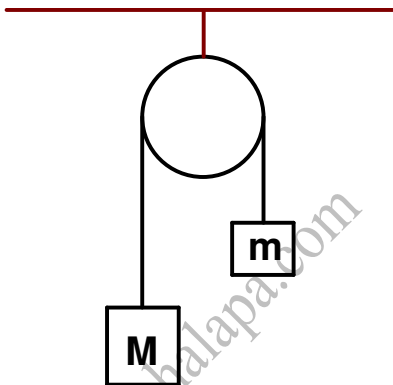
### Vježba 573

Tijelo, mase 200 dag, giba se vertikalno uvis pod djelovanjem stalne sile. Do visine 100 cm ona obavi rad 80 J. Koliko je ubrzanje tijela? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $30.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

### Zadatak 574 (Dado, gimnazija)

Dva tijela različitih masa,  $M > m$ , povezana su nerastezljivom niti i ovješena preko nepomične koloture kao što je prikazano na slici. Koji izraz opisuje ubrzanje tijela mase  $M$ ? Masa koloture te trenje između koloture i niti su zanemarivi.



- A.  $\frac{M}{m} \cdot g$       B.  $\frac{M - m}{M + m} \cdot g$       C.  $g$       D.  $\frac{M \cdot m}{M + m} \cdot g$

### Rješenje 574

$M, m, g, a = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

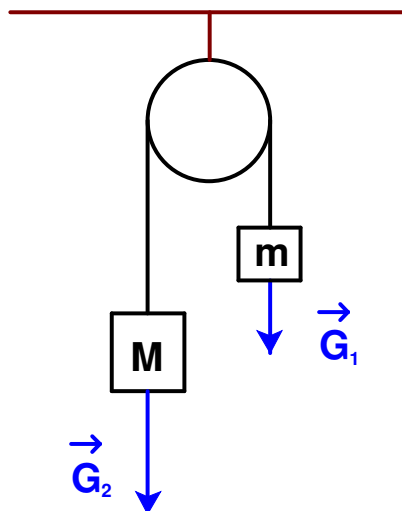
$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $F$ . Akceleracija  $a$  tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.



Sila  $F$  koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici djelovanja sile teže na tijelo mase  $M$  i tijelo mase  $m$ .

$$F = G_2 - G_1 \Rightarrow \begin{cases} G_2 = M \cdot g \\ G_1 = m \cdot g \end{cases} \Rightarrow F = M \cdot g - m \cdot g \Rightarrow F = (M - m) \cdot g.$$

Budući da sila  $F$  pokreće oba tijela, masa sustava je

$$m_s = M + m.$$

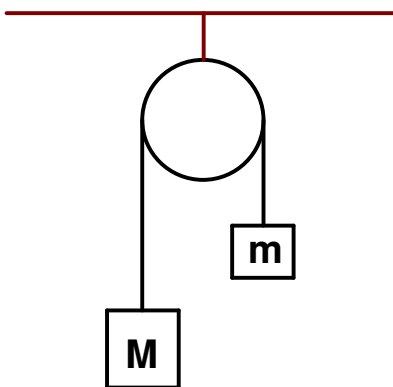
Akceleraciju  $a$  naći ćemo iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m_s} \Rightarrow \begin{cases} F = (M - m) \cdot g \\ m_s = M + m \end{cases} \Rightarrow a = \frac{(M - m) \cdot g}{M + m} \Rightarrow a = \frac{M - m}{M + m} \cdot g.$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 574

Dva tijela različitih masa,  $M > m$ , povezana su nerastezljivom niti i ovješena preko nepomične koloture kao što je prikazano na slici. Koji izraz opisuje ubrzanje tijela mase  $m$ ? Masa koloture te trenje između koloture i niti su zanemarivi.



- A.  $\frac{M}{m} \cdot g$       B.  $\frac{M - m}{M + m} \cdot g$       C.  $g$       D.  $\frac{M \cdot m}{M + m} \cdot g$

**Rezultat:** B.

### Zadatak 575 (Maja, gimnazija)

Na horizontalnoj se ravnini nalazi vreća mase 50 kg. Konopac preko kojeg djeluje sila izdrži  $F_0 = 200$  N. Prilikom trzaja vreća se pomakne za 2 cm. Odredi vrijeme trzaja tako da konopac ne pukne.

#### Rješenje 575

$$m = 50 \text{ kg}, \quad F_0 = 200 \text{ N}, \quad s = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad t = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

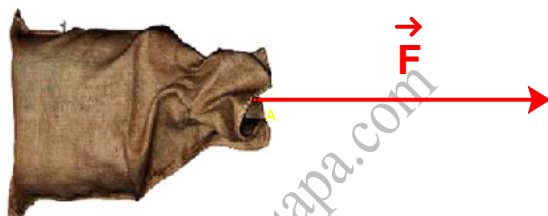
$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $F$ . Akceleracija  $a$  tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2},$$

gdje je  $s$  put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .



Budući da sila  $F$  kojom djelujemo na vreću mora biti manja od sile  $F_0$  da konopac ne pukne, slijedi:

$$\begin{aligned} F < F_0 &\Rightarrow m \cdot a < F_0 \Rightarrow \left[ a = \frac{2 \cdot s}{t^2} \right] \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} < F_0 \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2} < F_0 \cdot \frac{t^2}{F_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot m \cdot s}{F_0} < t^2 \Rightarrow t^2 > \frac{2 \cdot m \cdot s}{F_0} \Rightarrow t^2 > \frac{2 \cdot m \cdot s}{F_0} \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow t > \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot s}{F_0}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t > \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 0.02 \text{ m}}{200 \text{ N}}} \Rightarrow t > 0.1 \text{ s}. \end{aligned}$$

Ako je  $t < 0.1$  s konopac će puknuti.

#### Vježba 575

Na horizontalnoj se ravnini nalazi vreća mase 50 kg. Konopac preko kojeg djeluje sila izdrži  $F_0 = 0.2$  kN. Prilikom trzaja vreća se pomakne za 20 mm. Odredi vrijeme trzaja tako da konopac ne pukne.

**Rezultat:**  $t > 0.1$  s.

### Zadatak 576 (Tihomir, gimnazija)

Kod vertikalnog podizanja tereta prema gore ubrzanjem  $a$  uže izdrži teret mase  $m_1$ , a kod vertikalnog spuštanja jednakim ubrzanjem  $a$  teret mase  $m_2$ . Nadite iznos ubrzanja  $a$ .

#### Rješenje 576

$$m_1, \quad m_2, \quad a = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima

akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F. Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a, neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila  $F = -m \cdot a$ . Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Kada teret mase  $m_1$  podižemo vertikalno uvis ubrzanjem a napetost užeta jednaka je zbroju težine tereta  $G_1$  i inercijske sile  $m_1 \cdot a$  koja se javlja zbog toga što se teret diže akceleracijom a.

$$F = G_1 + m_1 \cdot a \Rightarrow F = m_1 \cdot g + m_1 \cdot a \Rightarrow F = m_1 \cdot (g + a).$$

Istu napetost užeta postizemo spuštanjem tereta mase  $m_2$  jednakim ubrzanjem a.

Kada teret mase  $m_2$  spuštamo vertikalno dolje ubrzanjem a napetost užeta jednaka je razlici težine tereta  $G_2$  i inercijske sile  $m_2 \cdot a$  koja se javlja zbog toga što se teret spušta akceleracijom a.

$$F = G_2 - m_2 \cdot a \Rightarrow F = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \Rightarrow F = m_2 \cdot (g - a).$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo ubrzanje a.

$$\left. \begin{aligned} F &= m_1 \cdot (g + a) \\ F &= m_2 \cdot (g - a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot (g + a) = m_2 \cdot (g - a) \Rightarrow m_1 \cdot g + m_1 \cdot a = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \Rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = (m_2 - m_1) \cdot g \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

### Vježba 576

Kod vertikalnog podizanja tereta prema gore ubrzanjem a uže izdrži teret mase 3 kg, a kod vertikalnog spuštanja jednakim ubrzanjem a teret mase 7 kg. Nadite iznos ubrzanja a.

**Rezultat:**  $a = \frac{2}{5} \cdot g.$

### Zadatak 577 (Tihomir, gimnazija)

Kod vertikalnog podizanja tereta prema gore ubrzanjem a uže izdrži teret mase  $m_1$ , a kod vertikalnog spuštanja jednakim ubrzanjem a teret mase  $m_2$ . Koliku se masu tim užetom može podizati jednoliko?

### Rješenje 577

$$m_1, \quad m_2, \quad a, \quad m_3 = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F.

Akceleracija a tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a, neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila  $F = -m \cdot a$ . Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Kada teret mase  $m_1$  podižemo vertikalno uvis ubrzanjem a napetost užeta jednaka je zbroju težine tereta  $G_1$  i inercijske sile  $m_1 \cdot a$  koja se javlja zbog toga što se teret diže akceleracijom a.

$$F = G_1 + m_1 \cdot a \Rightarrow F = m_1 \cdot g + m_1 \cdot a \Rightarrow F = m_1 \cdot (g + a).$$

Istu napetost užeta postizemo spuštanjem tereta mase  $m_2$  jednakim ubrzanjem a.

Kada teret mase  $m_2$  spuštamo vertikalno dolje ubrzanjem a napetost užeta jednaka je razlici težine tereta  $G_2$  i inercijske sile  $m_2 \cdot a$  koja se javlja zbog toga što se teret spušta akceleracijom a.

$$F = G_2 - m_2 \cdot a \Rightarrow F = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \Rightarrow F = m_2 \cdot (g - a).$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo ubrzanje a.

$$\left. \begin{array}{l} F = m_1 \cdot (g + a) \\ F = m_2 \cdot (g - a) \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot (g + a) = m_2 \cdot (g - a) \Rightarrow m_1 \cdot g + m_1 \cdot a = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \Rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = (m_2 - m_1) \cdot g \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Istim užetom možemo teret mase  $m_3$  podizati jednoliko pa je napetost užeta

$$F = m_3 \cdot g.$$

Računamo masu  $m_3$ .

1.način

$$\left. \begin{array}{l} F = m_1 \cdot (g + a) \\ F = m_3 \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow m_3 \cdot g = m_1 \cdot (g + a) \Rightarrow \left[ a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 \cdot g = m_1 \cdot \left( g + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \right) \Rightarrow m_3 \cdot g = m_1 \cdot g \cdot \left( 1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_3 \cdot g &= m_1 \cdot g \cdot \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \quad /: g \Rightarrow m_3 = m_1 \cdot \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 &= m_1 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow m_3 = m_1 \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 &= m_1 \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_3 = m_1 \cdot \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_3 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

2. način

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} F = m_2 \cdot (g - a) \\ F = m_3 \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow m_3 \cdot g &= m_2 \cdot (g - a) \Rightarrow \left[ a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 \cdot g &= m_2 \cdot \left(g - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g\right) \Rightarrow m_3 \cdot g = m_2 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 \cdot g &= m_2 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \quad /: g \Rightarrow m_3 = m_2 \cdot \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 &= m_2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow m_3 = m_2 \cdot \frac{m_1 + m_2 - (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 &= m_2 \cdot \frac{m_1 + m_2 - m_2 + m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_3 = m_2 \cdot \frac{m_1 + m_2 - m_2 + m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_3 &= m_2 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_3 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

### Vježba 577

Kod vertikalnog podizanja tereta prema gore ubrzanjem  $a$  uže izdrži teret mase 3 kg, a kod vertikalnog spuštanja jednakim ubrzanjem  $a$  teret mase 7 kg. Koliku se masu tim užetom može podizati jednoliko?

**Rezultat:** 4.2 kg.

### Zadatak 578 (Dora, gimnazija)

Vlak mase 4000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije postaje započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je  $2 \cdot 10^5$  N. Koliki put prijeđe vlak za vrijeme prve minute kočenja?

A. 720 m      B. 930 m      C. 510 m      D. 420 m

### Rješenje 578

$m = 4000 \text{ t} = 4 \cdot 10^6 \text{ kg}$ ,       $v_0 = 36 \text{ km / h} = [30 : 3.6] = 10 \text{ m / s}$ ,       $F = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$ ,  
 $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ,       $s = ?$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $F$ . Akceleracija  $a$  tijela je razmjerna sili  $F$  i ima smjer sile.

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za put  $s$ :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je  $s$  put koji je tijelo prešlo pošto se počelo usporavati akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .



$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{F}{m} \\ s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 = 10 \frac{m}{s} \cdot 60 s - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5 N}{4 \cdot 10^6 kg} \cdot \left(60 \frac{m}{s}\right)^2 = 510 m.$$

Odgovor je pod C

### Vježba 578

Vlak mase 4000 t vozi brzinom 36 km / h. Prije postaje započinje jednoliko kočiti. Sila kočenja je 200 kN. Koliki put prijeđe vlak za vrijeme prve minute kočenja?

- A. 720 m      B. 930 m      C. 510 m      D. 420 m

**Rezultat:** C.

### Zadatak 579 (Ante, tehnička škola)

Dizalo se pokrene i uspinje stalnom akceleracijom u tijeku 2 s pri čemu dosegne brzinu 4 m / s, kojom produži uspinjanje sljedeće 4 s. Zatim se u zadnje 3 s jednoliko usporava i zaustavi. Na koju se visinu popelo dizalo?

- A. 20 m      B. 26 m      C. 22 m      D. 28 m

### Rješenje 579

$$t_1 = 2 \text{ s}, \quad v = 4 \text{ m / s}, \quad t_2 = 4 \text{ s}, \quad t_3 = 3 \text{ s}, \quad s = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je  $v$  stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Za jednoliko usporeno pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijede formule za put  $s$  i konačnu brzinu  $v$ :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = v_0 - a \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo pošto se počelo usporavati i gibati jednoliko usporeno akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Kada se tijelo zaustavi tada je:

$$\left. \begin{array}{l} v = 0 \\ v = v_0 - a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = v_0 - a \cdot t \Rightarrow a \cdot t = v_0 \Rightarrow a \cdot t = v_0 / \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow a = \frac{v_0}{t}.$$

Dizalo iz mirovanja počinje jednoliko ubrzavati akceleracijom  $a$ . Tijekom vremenskog intervala  $t_1$



doseglo je brzinu  $v$  i prevalo put  $s_1$ .

$$\left. \begin{array}{l} v = a \cdot t_1 \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot t_1 = v \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot t_1 = v \cdot \frac{1}{t_1} \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{v}{t_1} \\ s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t_1} \cdot t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t_1} \cdot t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t_1.$$

U vremenskom razmaku  $t_2$  dizalo se giba jednoliko dosegnutom brzinom  $v$  pa je prešlo put  $s_2$ .

$$s_2 = v \cdot t_2.$$

U vremenskom intervalu  $t_3$  dizalo jednoliko usporava akceleracijom  $a$ , pri čemu je  $v$  početna brzina, a  $s_3$  prijeđeni put do zaustavljanja.

$$\left. \begin{array}{l} v = a \cdot t_3 \\ s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot t_3 = v \\ s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot t_3 = v \cdot \frac{1}{t_3} \\ s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{v}{t_3} \\ s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t_3} \cdot t_3^2 \Rightarrow s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t_3} \cdot t_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_3 = v \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot v \cdot t_3 \Rightarrow s_3 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t_3.$$

Dizalo se popelo na visinu  $s$ .

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t_1 + v \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot v \cdot t_3 \Rightarrow s = v \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot t_1 + t_2 + \frac{1}{2} \cdot t_3 \right) =$$

$$= 4 \frac{m}{s} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ s} + 4 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ s} \right) = 26 \text{ m}.$$

Odgovor je pod B.



### Vježba 579

Dizalo se u prve dvije sekunde podiže jednoliko ubrzano i postigne brzinu  $2 \text{ m/s}$  kojom nastavlja gibanje u sljedeće 4 sekunde. Posljednje 2 sekunde dizalo se podiže jednoliko usporeno jednakom akceleracijom koju je imalo u prve dvije sekunde, ali suprotnog predznaka. Na koju se visinu popelo dizalo?

- A.  $10 \text{ m}$       B.  $11 \text{ m}$       C.  $12 \text{ m}$       D.  $13 \text{ m}$

**Rezultat:** C.

### Zadatak 580 (Valerija, gimnazija)

Masa dizala i tereta iznosi 8 t. Ono se spušta brzinom 420 m / min. Koliki je najkraći put na kojem se dizalo smije zaustaviti, ako njegovo uže može izdržati silu od 140 kN? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

#### Rješenje 580

$$m = 8 \text{ t} = 8 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad v = 420 \text{ m / min} = [420 : 60] = 7 \text{ m / s}, \quad F = 140 \text{ kN} = 1.4 \cdot 10^5 \text{ N}, \\ g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad s = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Drugi Newtonov poučak opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $F$ .

Akceleracija  $a$  tijela je razmjerna sili i ima smjer sile.

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase  $m$  koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju  $a$ , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila  $F = -m \cdot a$ . Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s},$$

gdje je  $v$  brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ . Ista formula vrijedi i kod jednoliko usporenog gibanja.

Put na kome će se dizalo zaustaviti ovisi o iznosu sile koja usporava dizalo. Budući da dizalo kočenjem smanjuje brzinu, javlja se inercijska sila koja je po veličini jednaka umnošku mase dizala i tereta i akceleracije  $a$  usporavanja dizala. Dizalo se spušta brzinom  $v$  pa sila kočenja ima smjer uvis. U tom slučaju inercijska sila ima smjer kao i težina pa uže treba izdržati silu  $F$ .

$$F = G + m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot a,$$

gdje je  $a$  akceleracija kojom dizalo usporava.

Na kraju gibanja dizalo se zaustavilo (konačna brzina jednaka je 0) pa za njegovu početnu brzinu  $v$  vrijedi:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se najkraći put  $s$ .

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{v^2}{2 \cdot s} \\ F = m \cdot g + m \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} \Rightarrow F - m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot s} \cdot \frac{s}{F - m \cdot g} \Rightarrow s = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot (F - m \cdot g)} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot \left(1.4 \cdot 10^5 \text{ N} - 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 3.186 \text{ m} \approx 3.2 \text{ m}.$$

### Vježba 580

Masa dizala i tereta iznosi 8 t. Ono se spušta brzinom 25.2 km / h. Koliki je najkraći put na kojem se dizalo smije zaustaviti, ako njegovo uže može izdržati silu od 140 kN? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2$ )

**Rezultat:** 3.2 m.