

Zadatak 101 (Vedran, gimnazija)

Horizontalna šipka dugačka je 20 cm. Lijeva polovica je od aluminija, desna od željeza. Gdje se nalazi težište šipke ako je njezin presjek svugdje jednak? (gustoća aluminija $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$, gustoća željeza $\rho_2 = 7900 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 101

$$d = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad \rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 7900 \text{ kg/m}^3, \quad d_1 = ?, \quad d_2 = ?$$

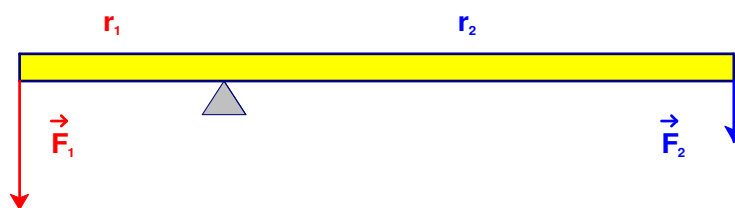
Moment M sile F u odnosu prema osi jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = r \cdot F.$$

Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sile koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sile koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga je u ravnoteži kad je

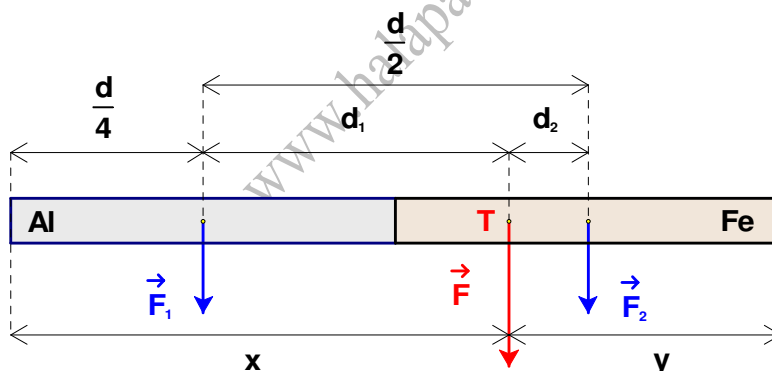
$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$



Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Na šipku djeluje sila teža $G = m \cdot g$. Sa slike vidi se:



$$\left. \begin{array}{l} F_1 = G_1 \\ F_2 = G_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zakon poluge} \\ F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \end{array} \right] \Rightarrow G_1 \cdot d_1 = G_2 \cdot d_2 \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot d_1 = m_2 \cdot g \cdot d_2 \quad /: g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2 \\ d_2 = \frac{d}{2} - d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_1 \cdot V \cdot d_1 = \rho_2 \cdot V \cdot \left(\frac{d}{2} - d_1 \right) \quad /: V \Rightarrow \rho_1 \cdot d_1 = \rho_2 \cdot \left(\frac{d}{2} - d_1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_1 \cdot d_1 = \rho_2 \cdot \frac{d}{2} - \rho_2 \cdot d_1 \Rightarrow \rho_1 \cdot d_1 + \rho_2 \cdot d_1 = \rho_2 \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow d_1 \cdot (\rho_1 + \rho_2) = \rho_2 \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot (\rho_1 + \rho_2) = \rho_2 \cdot \frac{d}{2} \quad /: \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} \Rightarrow d_1 = \frac{\rho_2 \cdot \frac{d}{2}}{\rho_1 + \rho_2} \Rightarrow d_1 = \frac{\rho_2 \cdot d}{2 \cdot (\rho_1 + \rho_2)} =$$

$$= \frac{7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.2 \text{ m}}{2 \cdot \left(2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)} = 0.0745 \text{ m} = 7.45 \text{ cm}.$$

Težište T horizontalne šipke nalazi se na udaljenosti x s lijeve strane šipke:

$$x = \frac{d}{4} + d_1 = \frac{20 \text{ cm}}{4} + 7.45 \text{ cm} = 12.45 \text{ cm}.$$

Težište T horizontalne šipke nalazi se na udaljenosti y s desne strane šipke:

$$y = d - x = 20 \text{ cm} - 12.45 \text{ cm} = 7.55 \text{ cm}.$$

Vježba 101

Horizontalna šipka dugačka je 200 mm. Lijeva polovica je od aluminija, desna od željeza. Gdje se nalazi težište šipke ako je njezin presjek svugdje jednak? (gustoća aluminija $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$, gustoća željeza $\rho_2 = 7900 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: $x = 124.5 \text{ mm}$ (slijeva) , $y = 75.5 \text{ mm}$ (zdesna).

Zadatak 102 (Ljilja, gimnazija)

Obruč i puni valjak imaju jednaku masu 2 kg i koturaju se jednakom brzinom 5 m/s. Nađi kinetičke energije obaju tijela.

Rješenje 102

$$m_1 = m_2 = m = 2 \text{ kg}, \quad v_1 = v_2 = v = 5 \text{ m/s}, \quad E_k = ?$$

Budući da se obruč kotrlja bez klizanja, njegova ukupna kinetička energija jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije.

Kinetička energija tijela mase m i brzine v je:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti). Moment ustrajnosti (tromosti) za obruč mase m i polumjera R, s obzirom na os koja prolazi okomito središtem je:

$$I = m \cdot R^2.$$

Obodna (linearna) brzina v je u smjeru staze i iznosi:

$$v = R \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}.$$

Sada je ukupna kinetička energija obruča:

$$\begin{aligned} E_k &= E_1 + E_2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = m \cdot R^2 \\ \omega = \frac{v}{R} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v}{R} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= m \cdot v^2 = 2 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 50 \text{ J}. \end{aligned}$$

Budući da se puni valjak kotrlja bez klizanja, njegova ukupna kinetička energija jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije.

Kinetička energija tijela mase m i brzine v je:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti). Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase m i polumjera baze r , s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Obodna (linearna) brzina v je u smjeru staze i iznosi:

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

Sada je ukupna kinetička energija punog valjka:

$$\begin{aligned} E_k &= E_1 + E_2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = \frac{v}{r} \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E_k &= \frac{3}{4} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{4} \cdot 2 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 37.5 \text{ J}. \end{aligned}$$

Vježba 102

Obruč i puni valjak imaju jednaku masu 200 dag i koturaju se jednakom brzinom 18 km/h. Nađi kinetičke energije obaju tijela.

Rezultat: Obruč: $E_k = 50 \text{ J}$, puni valjak: $E_k = 37.5 \text{ J}$.

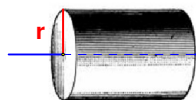
Zadatak 103 (Ljilja, gimnazija)

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa $2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ i učini 200 ophoda u minuti.

Rješenje 103

$d = 0.3 \text{ m} \Rightarrow r = [d : 2] = 0.15 \text{ m}$, $m = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}$,
 $n = 200 \text{ okr/min} \Rightarrow v = [200 : 60] = 3.33 \text{ Hz}$, $E_k = ?$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:



$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti).

Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase m i polumjera baze r , s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kutna brzina ω dana je izrazom:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je ν frekvencija (učestalost).

Kinetička energija valjka koji se vrti oko svoje osi iznosi:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \Rightarrow E_k = m \cdot r^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \Rightarrow E_k = m \cdot (r \cdot \pi \cdot \nu)^2 = \\ &= 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(0.15 \text{ m} \cdot \pi \cdot 3.33 \frac{1}{\text{s}} \right)^2 = 4924.94 \text{ J}. \end{aligned}$$

Vježba 103

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 30 cm, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa 2 t i učini 200 ophoda u minuti.

Rezultat: 4924.94 J.

Zadatak 104 (Igor, gimnazija)

Kolika mora biti brzina zrakoplova u lupingu polumjera 1 km da ni sjedište ni pojas ne čine na pilota nikakav pritisak kad se zrakoplov nalazi u najvišoj točki petlje? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 104

$$r = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

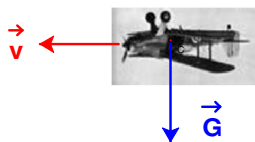
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži.

$$G = m \cdot g.$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je r polumjer kružnice.



Luping je akrobatski let zrakoplovom koji se sastoji u opisivanju okomite kružnice. To je let zrakoplovom u takvim zavojima da zrakoplovac leti i glavom dolje.

Budući da u lupingu ni sjedište ni pojas ne čine na pilota nikakav pritisak, kad se zrakoplov nalazi u najvišoj točki petlje, mora težina zrakoplova G biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} :

$$\begin{aligned} G = F_{cp} &\Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad | \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g} = \sqrt{1000 \text{ m} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \\ &= 99.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [99.05 \cdot 3.6] = 356.58 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

Vježba 104

Kolika mora biti brzina zrakoplova u lupingu polumjera 1 km da ni sjedište ni pojas ne čine na pilota nikakav pritisak kad se zrakoplov nalazi u najvišoj točki petlje? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 100 m/s.

Zadatak 105 (Matko, gimnazija)

Željezna valjkasta osovina polumjera 0.15 m, duljine 2 m, vrti se 300 okr/min. Nađi moment tromosti i kinetičku energiju. (gustoća željeza $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 105

$$r = 0.15 \text{ m}, \quad d = 2 \text{ m}, \quad n = 300 \text{ okr/min} \Rightarrow v = [300 : 60] = 5 \text{ Hz}, \quad \rho = 7900 \text{ kg/m}^3,$$

$$I = ?, \quad E_k = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Kutna brzina ω dana je izrazom:

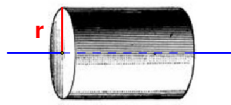
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je v frekvencija (učestalost).

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti).



Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase m i polumjera baze r , s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Budući da željezna osovina ima oblik valjka za moment tromosti vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V, \quad V = r^2 \cdot \pi \cdot d \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d \\ I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d \cdot r^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^4 \cdot \pi \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.15 \text{ m})^4 \cdot \pi \cdot 2 \text{ m} = 12.56 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Kinetička energija je:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V, \quad V = r^2 \cdot \pi \cdot d \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot d \cdot r^2 \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v, \quad I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^4 \cdot \pi \cdot d \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^4 \cdot \pi \cdot d \cdot (2 \cdot \pi \cdot v)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot r^4 \cdot \pi \cdot d \cdot 4 \cdot (\pi \cdot v)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot r^4 \cdot \pi \cdot d \cdot 4 \cdot (\pi \cdot v)^2 \Rightarrow E_k = \rho \cdot r^4 \cdot \pi \cdot d \cdot (\pi \cdot v)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \rho \cdot \pi \cdot d \cdot (r^2 \cdot \pi \cdot v)^2 = 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot 2 \text{ m} \cdot \left((0.15 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 5 \frac{1}{\text{s}} \right)^2 = 6200.286 \text{ J}.$$

Vježba 105

Željezna valjkasta osovina promjera 0.3 m, duljine 200 cm, vrti se 300 okr/min. Nađi moment tromosti i kinetičku energiju. (gustoća željeza $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: $I = 12.56 \text{ kgm}^2$, $E_k = 6200.286 \text{ J}$.

Zadatak 106 (Matko, gimnazija)

Kotač zamašnjak jednoliko povećava brzinu okretaja te nakon 10 sekundi ima 720 okreta u minuti. Izračunaj kutnu akceleraciju i linearnu akceleraciju točke koja je 1 metar udaljena od središta zamašnjaka.

Rješenje 106

$$t = 10 \text{ s}, \quad n = 720 \text{ okr/min} \Rightarrow v = [720 : 60] = 12 \text{ Hz}, \quad r = 1 \text{ m}, \quad \alpha = ?, \quad a = ?$$

Kutna brzina ω dana je izrazom:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je v frekvencija (učestalost).

Obodna (linearna) brzina v je u smjeru staze i iznosi:

$$v = r \cdot \omega.$$

Za jednoliko promjenjivu rotaciju vrijede izrazi koji su analogni izrazima za jednoliko promjenljivo gibanje po pravcu.

Jednoliko promjenjivo gibanje		Jednoliko promjenjiva vrtnja	
brzina	v	kutna brzina	ω
akceleracija	a	kutna akceleracija	α
Jednoliko ubrzano gibanje			
Bez početne brzine		Bez početne kutne brzine	
$v = a \cdot t$		$\omega = \alpha \cdot t$	

Za kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$\alpha = \frac{\omega}{t}.$$

Kutna akceleracija α točke na zamašnjaku je:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 12 \frac{1}{s}}{10 \text{ s}} = 2.4 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 7.54 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Za linearnu ili obodnu akceleraciju a vrijedi:



$$\left. \begin{array}{l} v = r \cdot \omega, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot t = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{r \cdot 2 \cdot \pi \cdot v}{t} = \frac{1 \text{ m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12 \frac{1}{s}}{10 \text{ s}} = 2.4 \cdot \pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7.54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 106

Kotač zamašnjak jednoliko povećava brzinu okretaja te nakon 10 sekundi ima 720 okreta u minuti. Izračunaj kutnu akceleraciju i linearnu akceleraciju točke koja je 2 metra udaljena od središta zamašnjaka.

Rezultat: $\alpha = 7.54 \text{ rad/s}^2$, $a = 15.08 \text{ m/s}^2$.

Zadatak 107 (Mia, srednja škola)

Kotač se vrti stalnom akceleracijom 8 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 sekundi?

Rješenje 107

$$\alpha = 8 \text{ rad/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad n = ?$$

Za kutnu akceleraciju α vrijedi izraz:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \Rightarrow \omega = \alpha \cdot t.$$

Ako se kotač jedanput okrene, onda je opisani kut 2π , a ako se okrene n puta kut iznosi:

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot n.$$

Kada se kotač jednoliko ubrzava ili usporava, kut se može računati po formuli

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t,$$

gdje je ω kutna brzina.

Broj okreta iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot n, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t \\ 2 \cdot \pi \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t \cdot t \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = \frac{\alpha \cdot t^2}{4 \cdot \pi} = \frac{8 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi} = 15.92 \text{ okr} \approx 16 \text{ okr.}$$

Vježba 107

Kotač se vrti stalnom akceleracijom 16 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 sekundi?

Rezultat: 32 okr.

Zadatak 108 (Željko, gimnazija)

Homogeni štap dug 1 m, mase 0.5 kg, okreće se u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi koja prolazi sredinom štapa. Koliku će kutnu akceleraciju imati štap ako je zakretni moment $9.8 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}$?

Rješenje 108

$$r = 1 \text{ m}, \quad m = 0.5 \text{ kg}, \quad M = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}, \quad \alpha = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije glasi:

$$M = \alpha \cdot I, \quad \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I},$$

tj. kutna akceleracija rotacije proporcionalna je s momentom sile koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Moment ustrajnosti (tromosti) homogenog štapa mase m i duljine r s obzirom na os koja prolazi njegovom sredinom i okomita je na njegovu duljinu:

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2.$$

Kutna kaceracija homogenog štapa iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2 \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2 \quad / \cdot 12 \Rightarrow 12 \cdot M = \alpha \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{12 \cdot M}{m \cdot r^2} =$$

$$= \frac{12 \cdot 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}}{0.5 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2} = 2.352 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 108

Homogeni štap dug 1 m, mase 1 kg, okreće se u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi koja prolazi sredinom štapa. Koliku će kutnu akceleraciju imati štap ako je zakretni moment 0.196 Nm ?

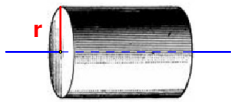
Rezultat: 2.352 rad/s^2 .

Zadatak 109 (Mile, srednja škola)

Valjak mase 100 kg, polumjera 0.1 m, okreće se oko svoje osi. Koliki mora biti zakretni moment da bi se valjak vrtio kutnom akceleracijom 2 rad/s^2 ?

Rješenje 109

$$m = 100 \text{ kg}, \quad r = 0.1 \text{ m}, \quad \alpha = 2 \text{ rad/s}^2, \quad M = ?$$



Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase m i polumjera baze r , s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije glasi:

$$M = \alpha \cdot I,$$

tj. kutna akceleracija rotacije proporcionalna je s momentom sile koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Zakretni moment mora iznositi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ kg} \cdot (0.1 \text{ m})^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Vježba 109

Valjak mase 200 kg, polumjera 0.1 m, okreće se oko svoje osi. Koliki mora biti zakretni moment da bi se valjak vrtio kutnom akceleracijom 2 rad/s^2 ?

Rezultat: 2 Nm.

Zadatak 110 (Mile, srednja škola)

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment 392 Nm. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju 0.4 rad/s^2 ? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

Rješenje 110

$$r = 1 \text{ m}, \quad M = 392 \text{ Nm}, \quad \alpha = 0.4 \text{ rad/s}^2, \quad m = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije glasi:

$$M = \alpha \cdot I,$$

tj. kutna akceleracija rotacije proporcionalna je s momentom sile koja zakreće tijelo, a obrnuto proporcionalna s momentom tromosti I tijela s obzirom na os rotacije.

Budući da je masa zamašnjaka raspoređena po njegovu obodu (rubu), možemo to poistovjetiti s tankim prstenom mase m i polumjera r . Moment tromosti tankog prstena mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi kroz središte prstena okomito na ravninu prstena je:

$$I = m \cdot r^2.$$

Masa zamašnjaka iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = m \cdot r^2 \\ M = \alpha \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow M = \alpha \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow M = \alpha \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot r^2} \Rightarrow m = \frac{M}{\alpha \cdot r^2} =$$

$$= \frac{392 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ m})^2} = 980 \text{ kg}.$$

Vježba 110

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment 784 Nm. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju 0.8 rad/s^2 ? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

Rezultat: 980 kg.

Zadatak 111 (Kiki, gimnazija)

Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća $5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Rješenje 111

$$r = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \rho = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad I = ?$$

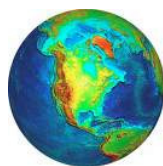
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Moment tromosti kugle mase m i polumjera r u odnosu na os koja prolazi kroz njezino središte

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Najprije odredimo masu Zemljine kugle:



$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Moment tromosti Zemljine kugle iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi =$$
$$= \frac{8}{15} \cdot 5.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^5 \cdot \pi = 9.895 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Vježba 111

Koliki je moment tromosti kugle ako uzmemo da su srednji polumjer kugle 1000 km i srednja gustoća $1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Rezultat: $1.676 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Zadatak 112 (Ante, tehnička škola)

Na tijelo koje ima učvršćenu os djeluju dvije sile $F_1 = 50 \text{ N}$ i $F_2 = 30 \text{ N}$ u smjeru obrnutom od kazaljke na satu i dvije sile $F_3 = 20 \text{ N}$ i $F_4 = 60 \text{ N}$ u smjeru kazaljke na satu. Krakovi odgovarajućih sila jesu $r_1 = 50 \text{ cm}$, $r_2 = 25 \text{ cm}$, $r_3 = 75 \text{ cm}$ i $r_4 = 20 \text{ cm}$. U kojem će se smjeru zakrenuti tijelo?

Rješenje 112

$$F_1 = 50 \text{ N}, \quad F_2 = 30 \text{ N}, \quad F_3 = -20 \text{ N}, \quad F_4 = -60 \text{ N}, \quad r_1 = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m},$$
$$r_2 = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}, \quad r_3 = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}, \quad r_4 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad M_1 = ?, \quad M_2 = ?, \quad M = ?$$

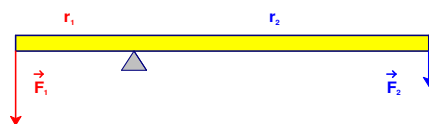
Moment M sile F u odnosu prema osi jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = r \cdot F.$$

Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje zakreću tijelo u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Dvostrana poluga je u ravnoteži kad je

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$



Tijelo će se zakrenuti u smjeru:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 \quad \text{smjer obrnut od kazaljke na satu} \\ M_2 &= F_3 \cdot r_3 + F_4 \cdot r_4 \quad \text{u smjeru kazaljke na satu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} M_1 &= 50 \text{ N} \cdot 0.5 \text{ m} + 30 \text{ N} \cdot 0.25 \text{ m} \\ M_2 &= -20 \text{ N} \cdot 0.75 \text{ m} + (-60 \text{ N}) \cdot 0.20 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M_1 &= 32.5 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_2 &= -27 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_1 > M_2.$$

Budući da je $M_1 > M_2$, tijelo se zakreće u smjeru obrnutom od kazaljke na satu.

Vježba 112

Na tijelo koje ima učvršćenu os djeluju dvije sile $F_1 = 60 \text{ N}$ i $F_2 = 30 \text{ N}$ u smjeru obrnutom od kazaljke na satu i dvije sile $F_3 = 20 \text{ N}$ i $F_4 = 50 \text{ N}$ u smjeru kazaljke na satu. Krakovi odgovarajućih sila jesu $r_1 = 50 \text{ cm}$, $r_2 = 25 \text{ cm}$, $r_3 = 75 \text{ cm}$ i $r_4 = 20 \text{ cm}$. U kojem će se smjeru zakrenuti tijelo?

Rezultat: Tijelo se zakreće u smjeru obrnutom od kazaljke na satu.

Zadatak 113 (Ante, tehnička škola)

Rastavite silu 1800 N na dvije usporedne sile u istom smjeru ako su njihova hvatišta udaljena 1.5 m i 0.9 m od hvatišta zadane sile.

Rješenje 113

$$F = 1800 \text{ N}, \quad r_1 = 1.5 \text{ m}, \quad r_2 = 0.9 \text{ m}, \quad F_1 = ?, \quad F_2 = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

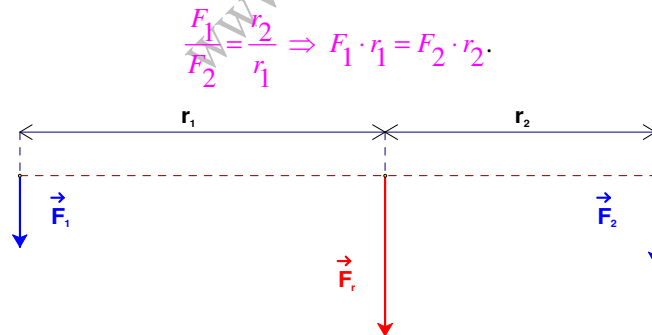
$$M = r \cdot F.$$

Ako na slobodno kruto tijelo djeluju dvije sile koje su usporedne u istom smjeru, ali imaju različita hvatišta, možemo ih zamijeniti rezultantom koja ima ova svojstva:

Veličinom je jednaka zbroju komponenata, a i istog je smjera

$$F_r = F_1 + F_2.$$

Hvatište rezultante jest u onoj točki na spojnici hvatišta komponenata koja dijeli spojnicu u obrnutom omjeru prema omjeru veličina komponenata.



Komponenta F_1 iznosi:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ F_1 \cdot r_1 &= F_2 \cdot r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_2 &= F - F_1 \\ F_1 \cdot r_1 &= F_2 \cdot r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_1 \cdot r_1 = (F - F_1) \cdot r_2 \Rightarrow F_1 \cdot r_1 = F \cdot r_2 - F_1 \cdot r_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 \cdot r_1 + F_1 \cdot r_2 = F \cdot r_2 \Rightarrow F_1 \cdot (r_1 + r_2) = F \cdot r_2 \Rightarrow F_1 \cdot (r_1 + r_2) = F \cdot r_2 \cdot \frac{1}{r_1 + r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{F \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1800 \text{ N} \cdot 0.9 \text{ m}}{1.5 \text{ m} + 0.9 \text{ m}} = 675 \text{ N}.$$

Komponenta F_2 iznosi:

$$F_2 = F - F_1 = 1800 \text{ N} - 675 \text{ N} = 1125 \text{ N}.$$

Vježba 113

Rastavite silu 1800 N na dvije usporedne sile u istom smjeru ako su njihova hvatišta udaljena 3 m i 1.8 m od hvatišta zadane sile.

Rezultat: $F_1 = 675 \text{ N}$, $F_2 = 1125 \text{ N}$.

Zadatak 114 (Tin, srednja škola)

Kolika je rezultanta dviju usporednih sila 50 N i 20 N ako su suprotnoga smjera, a hvatišta su im udaljena 45 cm?

Rješenje 114

$$F_1 = 50 \text{ N}, \quad F_2 = 20 \text{ N}, \quad r = 45 \text{ cm} = 0.45 \text{ m}, \quad F = ?, \quad x = ?$$

Moment M sile F u odnosu prema osi jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = r \cdot F.$$

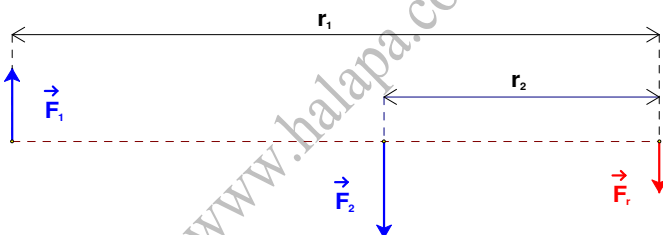
Ako na slobodno kruto tijelo djeluju dvije sile koje su usporedne i suprotnog smjera, ali imaju različita hvatišta, možemo ih zamijeniti rezultantom koja ima ova svojstva:

Veličinom je jednaka razlici komponenta, a smjer joj je jednak smjeru veće komponente

$$F_r = F_2 - F_1.$$

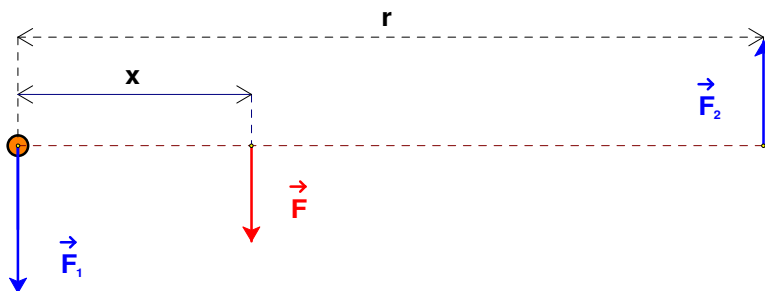
Hvatište joj se nalazi na pravcu što ga dobijemo kad produžimo dužinu koja spaja hvatišta komponenta preko hvatišta veće komponente. Za točku u kojoj se nalazi hvatište rezultante vrijedi da se krakovi komponenta odnose obrnuto prema veličinama komponenta

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$



Rezultanta iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = F_1 - F_2 \\ F \cdot x = F_2 \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow F \cdot x = F_2 \cdot r \Rightarrow x = \frac{F_2 \cdot r}{F_1 - F_2} = \frac{20 \text{ N} \cdot 0.45 \text{ m}}{50 \text{ N} - 20 \text{ N}} = 0.3 \text{ m} = 30 \text{ cm}.$$



Hvatište sile F je za 30 cm udaljeno od hvatišta veće sile, tj. sile F_1 .

Vježba 114

Kolika je rezultanta dviju usporednih sila 100 N i 40 N ako su suprotnoga smjera, a hvatišta su im udaljena 45 cm?

Rezultat: $F = 60 \text{ N}$, $x = 30 \text{ cm}$.

Zadatak 115 (Željka, maturantica)

Centripetalna sila iznosa 5.4 N djeluje na neko tijelo i vrti ga po kružnici polumjera 0.5 m. Kolika mora biti konstanta opruge k na kojoj će isto tijelo titrati periodom koja je jednaka ophodnom vremenu pri kruženju?

Rješenje 115

$$F_{cp} = 5.4 \text{ N}, \quad r = 0.5 \text{ m}, \quad k = ?$$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

koja ima smjer prema središtu vrtanje.

Ako tijelo obješeno o elastičnu oprugu izvučemo iz položaja ravnoteže za neki pomak i pustimo ga, ono će harmonički titrati. Pomoću konstante elastičnosti opruge k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Budući da je perioda titranja tijela jednaka ophodnom vremenu pri njegovom kruženju, slijedi:

$$\bullet \quad F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2} \Rightarrow F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2} \cdot \frac{T^2}{F_{cp}} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{F_{cp}}$$

$$\bullet \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k}$$

Konstanta opruge k iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{F_{cp}} \\ T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{F_{cp}} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{k} \cdot \frac{k \cdot F_{cp}}{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r} \Rightarrow k = \frac{F_{cp}}{r} = \frac{5.4 \text{ N}}{0.5 \text{ m}} = 10.8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Vježba 115

Centripetalna sila iznosa 16.2 N djeluje na neko tijelo i vrti ga po kružnici polumjera 1.5 m. Kolika mora biti konstanta opruge k na kojoj će isto tijelo titrati periodom koja je jednaka ophodnom vremenu pri kruženju?

Rezultat: 10.8 N/m.

Zadatak 116 (Željka, maturantica)

Uređaj, radeći uz snagu P_0 , pokrene metalnu ploču od mirovanja do rotacije od 16 okreta u sekundi za 1 minutu. Drugi uređaj snage P_1 tu istu ploču zarotira na 8 okretaja u sekundi za 4 minute. Koliki je omjer snaga P_0 i P_1 ?

Rješenje 116

$$v_0 = 16 \text{ Hz}, \quad t_0 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad v_1 = 8 \text{ Hz}, \quad t_1 = 4 \text{ min} = 240 \text{ s}, \quad P_0 : P_1 = ?$$

Kutna brzina ω tijela koje rotira je

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v,$$

gdje je v frekvencija (broj okreta u jedinici vremena, 1 s).

Pri rotaciji konstantnom kutnom akceleracijom kutna brzina mijenja se u vremenu prema izrazu

$$\omega = \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{t}$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω :

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment tromosti tijela s obzirom na os rotacije.

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremenu t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M, koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = I \cdot \alpha.$$

Snaga pri rotaciji krutog tijela jednaka je

$$P = M \cdot \omega.$$

1. inačica

Računamo omjer snaga P_0 i P_1 dvaju uređaja koji pokreću istu metalnu ploču čiji je moment tromosti I:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P_1} &= \frac{\frac{\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_0^2}{t_0}}{\frac{\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2}{t_1}} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_0^2}{\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1 \cdot \omega_0^2}{t_0 \cdot \omega_1^2} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot v_0}{2 \cdot \pi \cdot v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{240 \text{ s}}{60 \text{ s}} \cdot \left(\frac{16 \frac{1}{\text{s}}}{8 \frac{1}{\text{s}}} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = 16 \Rightarrow P_0 : P_1 = 16. \end{aligned}$$

2. inačica

Računamo omjer snaga P_0 i P_1 dvaju uređaja koji pokreću istu metalnu ploču čiji je moment tromosti I:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P_1} &= \frac{M_0 \cdot \omega_0}{M_1 \cdot \omega_1} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{I \cdot \alpha_0 \cdot \omega_0}{I \cdot \alpha_1 \cdot \omega_1} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{I \cdot \alpha_0 \cdot \omega_0}{I \cdot \alpha_1 \cdot \omega_1} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{\alpha_0 \cdot \omega_0}{\alpha_1 \cdot \omega_1} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{\frac{\omega_0 \cdot \omega_0}{t_0}}{\frac{\omega_1 \cdot \omega_1}{t_1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{\frac{\omega_0^2}{t_0}}{\frac{\omega_1^2}{t_1}} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1 \cdot \omega_0^2}{t_0 \cdot \omega_1^2} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot v_0}{2 \cdot \pi \cdot v_1} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot v_0}{2 \cdot \pi \cdot v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{240 \text{ s}}{60 \text{ s}} \cdot \left(\frac{16 \frac{1}{\text{s}}}{8 \frac{1}{\text{s}}} \right)^2 \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = 16. \end{aligned}$$

Vježba 116

Uređaj, radeći uz snagu P_0 , pokrene metalnu ploču od mirovanja do rotacije od 16 okreta u sekundi za 1 minutu. Drugi uređaj snage P_1 tu istu ploču zarotira na 8 okretaja u sekundi za 2 minute. Koliki je omjer snaga P_0 i P_1 ?

Rezultat: $P_0 : P_1 = 8$.

Zadatak 117 (Valentina, gimnazija)

Na niti visi uteg mase 2 kg. Nađi kolika je napetost niti:

- a) ako se nit s utegom diže akceleracijom 2 m/s^2
b) ako nit s utegom pada akceleracijom 2 m/s^2 . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 117

$$m = 2 \text{ kg}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$



- a) Nit s utegom diže se akceleracijom a

Budući da uteg na niti dižemo akceleracijom a , nit napinje ponajprije težina utega G , ali i inercijska sila koja se pritom javlja. Inercijska sila djeluje na uteg u istom smjeru kao i sila teže pa je napetost F niti jednaka:

$$F = G + m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g + a) = 2 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 24 \text{ N}.$$

- b) Nit s utegom pada akceleracijom a

Budući da nit s utegom pada akceleracijom a , inercijska sila djeluje na uteg u suprotnom smjeru od sile teže pa je napetost niti jednaka razlici sile teže i inercijske sile:

$$F = G - m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot g - m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g - a) = 2 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 16 \text{ N}.$$

Vježba 117

Na niti visi uteg mase 2 kg. Kolika je napetost niti ako se nit s utegom diže akceleracijom 5 m/s^2 . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 30 N.

Zadatak 118 (Darko, građevinska škola)

Čelična žica određene debljine izdrži napetost do 2000 N. Kojim najvećim ubrzanjem možemo tom žicom dizati uteg mase 150 kg? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 118

$$F = 2000 \text{ N}, \quad m = 150 \text{ kg}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Budući da uteg mase m dižemo akceleracijom a , čeličnu žicu napinje ponajprije težina utega, ali i inercijska sila koja se pritom javlja. Zato je napetost niti F jednaka zbroju težine utega G i inercijske sile $m \cdot a$.

Najveće ubrzanje a kojim možemo tom žicom dizati uteg mase m iznosi:

$$\begin{aligned} F &= G + m \cdot a \Rightarrow m \cdot a = F - G \Rightarrow m \cdot a = F - m \cdot g \quad / : m \Rightarrow a = \frac{F - m \cdot g}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \frac{F}{m} - \frac{m \cdot g}{m} \Rightarrow a = \frac{F}{m} - \frac{m \cdot g}{m} \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g = \frac{2000 \text{ N}}{150 \text{ kg}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3.33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Vježba 118

Čelična žica određene debljine izdrži napetost do 2000 N. Kojim najvećim ubrzanjem možemo tom žicom dizati uteg mase 150 kg? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 16.67 m/s^2 .

Zadatak 119 (Darko, građevinska škola)

Astronauti se privikavaju na velike akceleracije u specijalnim centrifugama.

- S koliko okretaja u sekundi mora raditi takva centrifuga da bi njezina akceleracija bila $12 \cdot g$? Polumjer okretaja je 7 m.
- Koliko će biti težak astronaut pri toj akceleraciji ako mu je masa 70 kg? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 119

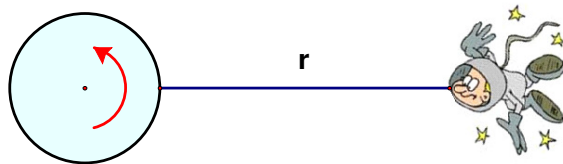
$$r = 7 \text{ m}, \quad a_{cp} = 12 \cdot g, \quad m = 70 \text{ kg}, \quad v = ?, \quad G = ?$$

Rotacija (vrtanja) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Akceleraciju tijela pri jednolikom kruženju zovemo centripetalna akceleracija. Ona ima stalnu vrijednost i u svakom trenutku ima smjer prema središtu kružnice. Centripetalna akceleracija dana je relacijom

$$a_{cp} = 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je r polumjer kružnice, v frekvencija (broj okretaja u jedinici vremena).

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.



Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

a) Iz relacije za centripetalnu akceleraciju dobije se broj okretaja centrifuge:

$$\left. \begin{aligned} a_{cp} &= 12 \cdot g \\ a_{cp} &= 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = 12 \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow v^2 = \frac{12 \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{3 \cdot g}{\pi^2 \cdot r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3 \cdot g}{\pi^2 \cdot r}} \Rightarrow v = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot g}{r}} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{7 m}} = 0.65896 \frac{1}{s} =$$

$$= [0.65896 \cdot 60] \approx 39 \frac{okr}{min}$$

b) Budući da astronaut rotira u centrifugi, na njega djeluje sila teža $m \cdot g$, ali i inercijska sila koja se pritom javlja. Zato je ukupna težina astronauta G jednaka zbroju njegove težine $m \cdot g$ i inercijske sile $m \cdot a$:

$$\left. \begin{aligned} a &= 12 \cdot g \\ G &= m \cdot g + m \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = m \cdot g + m \cdot 12 \cdot g \Rightarrow G = m \cdot g + 12 \cdot m \cdot g \Rightarrow G = 13 \cdot m \cdot g =$$

$$= 13 \cdot 70 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s^2} = 9100 \text{ N.}$$

Vježba 119

Astronauti se privikavaju na velike akceleracije u specijalnim centrifugama. Koliko će biti težak astronaut pri akceleraciji $10 \cdot g$ ako mu je masa 70 kg ?

Rezultat: 7700 N.

Zadatak 120 (Ljiljana, srednja škola)

Na konopcu duljine r visi uteg težine G . Premjestimo konopac u horizontalan položaj i ispustimo ga. Kolika je napetost niti kad uteg opet prođe vertikalnim položajem?

Rješenje 120

$$r, \quad G, \quad F = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano gibanje koje izvodi tijelo kada pada u blizini površine Zemlje stalnim ubrzanjem sile teže, g . Brzina tijela pri slobodnom padu na visini h dana je izrazom

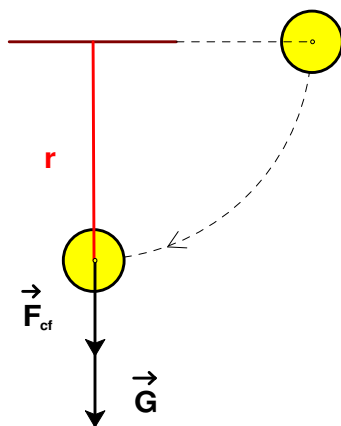
$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Osnovni zakoni mehanike vrijede s obzirom na koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ti zakoni ne vrijede ako tijelo promatramo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Tijelo na koje ne djeluje nikakva sila neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase m koje postavimo u takav sustav koji ima stalnu akceleraciju a , neće mirovati s obzirom na sustav, nego će imati akceleraciju $-a$. U sustavu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila $-m \cdot a$. Takvu silu zovemo inercijskom silom.

Na tijelo koje rotira zajedno sa sustavom, a promatrano sa stajališta tog sustava, djeluje akceleracija koja je jednaka akceleraciji koja izvodi rotaciju sustava, ali suprotnog smjera od nje. Zbog toga u

sustavu koji jednoliko rotira opažamo da na tijelo mase m djeluje sila $m \cdot a$ koja ima radijalni smjer od središta rotacije, a zovemo je centrifugalnom silom.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,



$$G = m \cdot g.$$

Budući da uteg na niti rotira, kad uteg prolazi položajem ravnoteže nit napinje ponajprije težina utega G , ali i centrifugalna sila F_{cf} koja se pritom javlja. Centrifugalna sila djeluje na uteg u istom smjeru kao i sila teža pa je napetost F niti jednaka zbroju težine utega G i centrifugalne sile F_{cf} :

$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \left[v^2 = 2 \cdot g \cdot r \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r}{r} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot r}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot 2 \cdot g \Rightarrow F = 3 \cdot m \cdot g \Rightarrow F = 3 \cdot G.$$

Vježba 120

Na konopcu duljine l visi uteg težine $2 \cdot G$. Premjestimo konopac u horizontalan položaj i ispustimo ga. Kolika je napetost niti kad uteg opet prođe vertikalnim položajem?

Rezultat: $4 \cdot G$.