

Zadatak 181 (Marko, srednja škola)

Tijelo se giba jednoliko po kružnici polumjera r_1 . Koliki treba biti polumjer r_2 kružnice po kojoj bi se isto tijelo, uz jednaku centripetalnu silu, gibalo s dvostruko manjim periodom?

A. $r_2 = 0.25 \cdot r_1$ B. $r_2 = 0.5 \cdot r_1$ C. $r_2 = 2 \cdot r_1$ D. $r_2 = 4 \cdot r_1$

Rješenje 181

$$r_1, \quad F_{cp}, \quad T_1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \cdot T_1, \quad r_2 = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

1. inačica

$$\left. \begin{aligned} F_{cp} &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} \\ F_{cp} &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} \cdot \frac{T_2^2}{m \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot r_1 \Rightarrow r_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \cdot r_1 \Rightarrow r_2 = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot T_1}{T_1} \right)^2 \cdot r_1 \Rightarrow r_2 = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot T_1}{T_1} \right)^2 \cdot r_1 \Rightarrow r_2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{1}{4} \cdot r_1 \Rightarrow r_2 = 0.25 \cdot r_1.$$

Odgovor je pod A.

2. inačica

Prema uvjetima iz zadatka F_{cp} i m stalne su veličine pa se iz formule vidi:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow \frac{r}{T^2} = konst.$$

Veličine r i T^2 su upravo razmjerne jer im je količnik konstantan. (Koliko se puta jedna veličina smanji, toliko puta smanji se i druga. Koliko se puta jedna veličina poveća, toliko puta se i druga veličina poveća.)

Budući da se T smanji 2 puta, T^2 će se smanjiti 4 puta pa će i polumjer biti 4 puta manji.

$$r_2 = \frac{1}{4} \cdot r_1 \Rightarrow r_2 = 0.25 \cdot r_1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 181

Tijelo se giba jednoliko po kružnici polumjera r_1 . Koliki treba biti polumjer r_2 kružnice po kojoj bi se isto tijelo, uz jednaku centripetalnu silu, gibalo s dvostruko većim periodom?

A. $r_2 = 0.25 \cdot r_1$ B. $r_2 = 0.5 \cdot r_1$ C. $r_2 = 2 \cdot r_1$ D. $r_2 = 4 \cdot r_1$

Rezultat: D.

Zadatak 182 (Tom³, srednja škola)

Na kotač u obliku diska polumjera 25 cm, koji može rotirati oko osi O, počinje djelovati stalna tangencijalna sila od 2 N i za 20 s kutna brzina naraste od nule do $3 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$. Odredite:

- moment tromosti
- masu kotača
- ukupni broj okretaja koji kotač napravi za 20 s.

Rješenje 182

$$r = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}, \quad F = 2 \text{ N}, \quad t = 20 \text{ s}, \quad \omega = 3 \cdot \pi \text{ s}^{-1}, \quad I = ?, \quad m = ?, \quad N = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut $2\pi \text{ rad}$ ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Kut φ koji tijelo opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow n = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna je brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka i iznosi

$$\omega = \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{t},$$

gdje je α kutna akceleracija, t vrijeme.

Kut φ koji tijelo opiše nakon vremena t dan je formulama:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je ω kutna brzina, α kutna akceleracija.

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile M , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

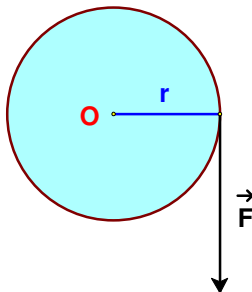
$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}.$$

Moment sile M koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti I tijela i kutne akceleracije α . Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase m i polumjera r , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Moment M sile F u odnosu prema osi jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$



- Na kotač djeluje stalna sila F , odnosno njezin moment

$$M = r \cdot F$$

pa se on vrti jednoliko ubrzano i nakon vremena t postigne kutnu brzinu ω . Iz jednadžbe rotacije

$$M = \alpha \cdot I$$

i veze kutne brzine i akceleracije

$$\omega = \alpha \cdot t,$$

dobije se moment tromosti I kotača.

$$\left. \begin{array}{l} M = I \cdot \alpha \\ M = r \cdot F \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I \cdot \alpha = r \cdot F \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I \cdot \alpha = r \cdot F \\ \omega = \alpha \cdot t \cdot \frac{1}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I \cdot \alpha = r \cdot F \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow I \cdot \frac{\omega}{t} = r \cdot F \Rightarrow I \cdot \frac{\omega}{t} = r \cdot F \cdot \frac{t}{\omega} \Rightarrow I = \frac{r \cdot F \cdot t}{\omega} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 2 \text{ N} \cdot 20 \text{ s}}{3 \cdot \pi \frac{1}{s}} = 1.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- Moment tromosti kotača u obliku diska (okrugla ploča) je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

pa njegova masa m iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ M = I \cdot \alpha \\ M = r \cdot F \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha \\ M = r \cdot F \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha = r \cdot F \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha = r \cdot F \cdot \frac{2}{\alpha \cdot r^2} \\ \omega = \alpha \cdot t \cdot \frac{1}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{2 \cdot F}{\alpha \cdot r} \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow m = \frac{2 \cdot F}{\frac{\omega}{t} \cdot r} \Rightarrow m = \frac{2 \cdot F \cdot t}{\omega \cdot r} = \frac{2 \cdot 2 \text{ N} \cdot 20 \text{ s}}{3 \cdot \pi \frac{1}{s} \cdot 0.25 \text{ m}} = 33.95 \text{ kg} \approx 34 \text{ kg}.$$

- Ukupan broj okretaja N kotača za vrijeme t iznosi:

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N = \frac{\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2}{2 \cdot \pi} \\ \omega = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N = \frac{\alpha \cdot t^2}{4 \cdot \pi} \\ \omega = \alpha \cdot t \cdot \frac{1}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N = \frac{\alpha \cdot t^2}{4 \cdot \pi} \\ \alpha = \frac{\omega}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow N = \frac{\frac{\omega}{t} \cdot t^2}{4 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{\omega \cdot t}{4 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot \pi \frac{1}{s} \cdot 20 \text{ s}}{4 \cdot \pi} = 15 \text{ okreta}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow N = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \Rightarrow N = \frac{\omega \cdot t}{4 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ s}}{4 \cdot \pi} = 15 \text{ okreta.}$$

Vježba 182

Na kotač u obliku diska polumjera 50 cm, koji može rotirati oko osi O, počinje djelovati stalna tangencijalna sila od 1 N i za 20 s kutna brzina naraste od nule do $3 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$. Odredite moment tromosti.

Rezultat: $1.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Zadatak 183 (Mario, srednja škola)

Kolika je ukupna kinetička energija prstena koji se kotrlja ako mu je kinetička energija rotacije 250 J?

Rješenje 183

$$E_{kr} = 250 \text{ J}, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_{kt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2.$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti), ω kutna brzina.

Moment tromosti prstena mase m i polumjera r koji rotira oko osi kroz svoje središte je

$$I = m \cdot r^2.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r , veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow v = r \cdot \omega.$$

Budući da se ukupna kinetička energija pri kotrljanju sastoji od kinetičke energije translacija i kinetičke energije rotacije, vrijedi:

$$\begin{aligned} E_k &= E_{kt} + E_{kr} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow [v = r \cdot \omega] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \omega)^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{prsten} \\ I = m \cdot r^2 \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \right] \Rightarrow E_k = 2 \cdot E_{kr} = 2 \cdot 250 \text{ J} = 500 \text{ J}. \end{aligned}$$

Vježba 183

Kolika je ukupna kinetička energija prstena koji se kotrlja ako mu je kinetička energija rotacije 125 J?

Rezultat: 250 J .

Zadatak 184 (Marija, srednja škola)

Automobil se giba brzinom 108 km/h. Polumjer kotača je 40 cm. Treba odrediti kut za koji se kotač zakrene za 0.05 s.

Rješenje 184

$$v = 108 \text{ km/h} = [108 : 3.6] = 30 \text{ m/s}, \quad r = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}, \quad t = 0.05 \text{ s}, \quad \varphi = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r , veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina ω omjer je promjene kuta $\Delta\varphi$ i intervala vremena Δt :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Pri jednolikoj je rotaciji:

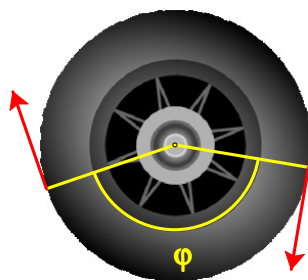
$$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \varphi = \omega \cdot t.$$

Obodna (linearna) brzina kotača jednaka je brzini automobila jer nema klizanja. Budući da se automobil giba stalnom brzinom, rotacija kotača jednolika je pa mjera kuta za koji se kotač zakrene iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \omega \cdot t \\ \omega = \frac{v}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{v}{r} \cdot t = \frac{30 \frac{m}{s}}{0.4 m} \cdot 0.05 s = 3.75 \text{ rad}.$$

Mjera kuta u stupnjevima je:

$$\varphi = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot 3.75 = 214.86^{\circ}.$$



Vježba 184

Automobil se giba brzinom 108 km/h. Polumjer kotača je 40 cm. Treba odrediti kut za koji se kotač zakrene za 0.02 s.

Rezultat: 1.5 rad ili 85.94°.

Zadatak 185 (Any, gimnazija)

Odredi ukupnu kinetičku energiju nogometne lopte mase 420 g koja se kotrlja brzinom 10 m/s.

Rješenje 185

$$m = 420 \text{ g} = 0.42 \text{ kg}, \quad v = 10 \text{ m/s}, \quad E_k = ?$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_{kt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti), ω kutna brzina.

Moment tromosti sfere tankih stijenki mase m i polumjera r koja rotira oko osi kroz svoje središte je

$$I = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r , veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow v = r \cdot \omega.$$

Budući da se ukupna kinetička energija pri kotrljanju nogometne lopte sastoji od kinetičke energije rotacije i kinetičke energije translacija, vrijedi:

$$\begin{aligned} E_k &= E_{kr} + E_{kt} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_k = \frac{1}{3} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{2+3}{6} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_k = \frac{5}{6} \cdot m \cdot v^2 = \\ &= \frac{5}{6} \cdot 0.42 \text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 35 \text{ J}. \end{aligned}$$



Vježba 185

Odredi ukupnu kinetičku energiju nogometne lopte mase 840 g koja se kotrlja brzinom 10 m/s.

Rezultat: 70 J.

Zadatak 186 (Any, gimnazija)

Kugla se kotrlja niz kosinu duljine 7 m i nagiba 30° . Odredite brzinu kugle na kraju kosine. Trenje zanemarite. (akceleracija sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 186

$$l = 7 \text{ m}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju (translacije)

$$E_{kt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti), ω kutna brzina.

Zakon očuvanja energije:

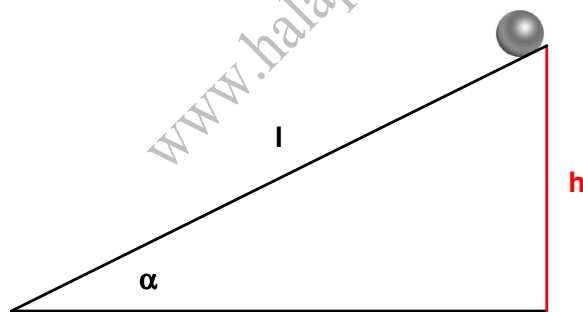
- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Moment tromosti pune kugle mase m i polumjera r koja rotira oko osi kroz svoje središte je

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Dok je kutna brzina ω za sve čestice tijela u istome trenutku jednaka, obodna (linearna) brzina v pojedine čestice to je veća što je čestica dalje od osi rotacije. Označimo li udaljenost čestice od osi rotacije sa r , veza između kutne i obodne brzine je

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow v = r \cdot \omega.$$



Najprije odredimo visinu kosine:

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{h}{l} / l \Rightarrow h = l \cdot \sin \alpha.$$

Prema zakonu očuvanja energije gravitacijska potencijalna energija kugle na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičkih energija rotacije i translacije na dnu kosine.

$$\begin{aligned} E_{gp} &= E_{kr} + E_{kt} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha &= \frac{2+5}{10} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{7}{10} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{10}{7 \cdot m} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{10 \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha}{7} \Rightarrow v^2 = \frac{10 \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha}{7} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha}{7}} = \\ &= \sqrt{\frac{10 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 7 \cdot m \cdot \sin 30^\circ}{7}} = 7 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

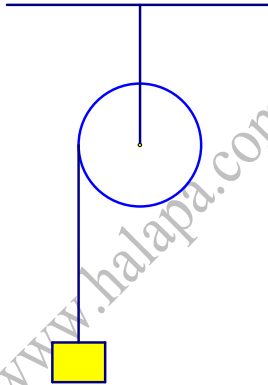
Vježba 186

Kugla se kotrlja niz kosinu duljine 28 m i nagiba 30° . Odredite brzinu kugle na kraju kosine. Trenje zanemarite. (akceleracija sile teže $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 14 m/s.

Zadatak 187 (Luka, tehnička škola)

Oko nepomične koloture polumjera 20 cm (vidi sliku) namotana je nit na kojoj visi uteg. Utteg najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom 2 cm/s^2 pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 100 cm.



Rješenje 187

$$r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad a = 2 \text{ cm/s}^2 = 0.02 \text{ m/s}^2, \quad s = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}, \quad \omega = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je r polumjer kružnice, ν frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je ν frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne (linearne) brzine v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera r vrijedi odnos

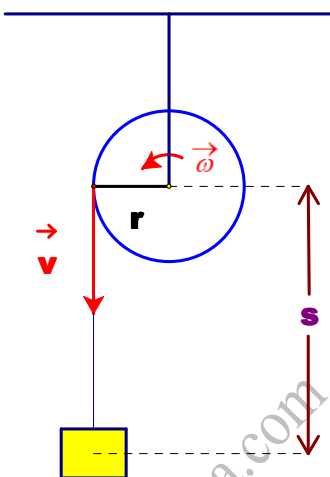
$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

Računamo kutnu brzinu koloture.

U času kad je uteg prešao put s akceleracijom a postigao je brzinu v . To je ujedno obodna brzina koloture polumjera r . Budući da je brzina padanja utega jednaka obodnoj (linearnoj) brzini točkica na rubovima koloture, vrijedi:

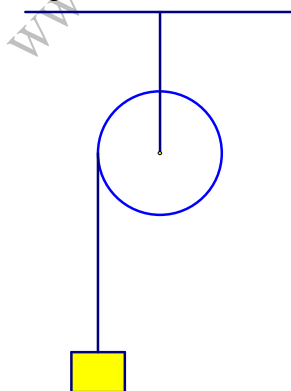
$$\left. \begin{aligned} v &= r \cdot \omega \\ v &= \sqrt{2 \cdot a \cdot s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow r \cdot \omega = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} \Rightarrow r \cdot \omega = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2 \cdot a \cdot s}}{r} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0.02 \frac{m}{s^2} \cdot 1 m}}{0.2 m} = 1 \frac{rad}{s}.$$



Vježba 187

Oko nepomične koloture polumjera 2 dm (vidi sliku) namotana je nit na kojoj visi uteg. Utog najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom 0.2 dm/s^2 pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 10 dm.



Rezultat: 1 rad/s.

Zadatak 188 (Josip, strukovna škola)

Gibajući se jednoliko po kružnici materijalna točka 340 puta obiđe kružnicu za 2.2 minute. Nađi kutnu brzinu materijalne točke.

Rješenje 188

$$n = 340, \quad t = 2.2 \text{ min} = [2.2 \cdot 60] = 132 \text{ s}, \quad \omega = ?$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo

kut 2π rad ili 360° . Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je ν frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj okreta, t vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Kutna brzina materijalne točke iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{n}{t} \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{340}{132 \text{ s}} = 16.18 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Vježba 188

Gibajući se jednoliko po kružnici materijalna točka 680 puta obiđe kružnicu za 4.4 minute. Nađi kutnu brzinu materijalne točke.

Rezultat: 16.18 rad/s.

Zadatak 189 (Silvija, gimnazija)

Kotač zamašnjak benzinskog motora obavi rad od 392.4 J za vrijeme dok mu kutna brzina padne od 600 na 580 okret u minuti. Koliki je moment tromosti kotača?

Rješenje 189

$$W = 392.4 \text{ J}, \quad n_1 = 600, \quad n_2 = 580, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad I = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi):

$$\nu = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj okreta, t vrijeme za koje su okreti učinjeni.

Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je ν frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena).

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti), ω kutna brzina.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Najprije odredimo kutne brzine za broj okreta.

- n_1 okreta

$$\left. \begin{array}{l} \nu_1 = \frac{n_1}{t} \\ \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot \nu_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_1}{t}$$

- n_2 okreta

$$\left. \begin{array}{l} v_2 = \frac{n_2}{t} \\ \omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_2}{t}$$

Rad W koji obavi kotač zamašnjaka u vremenskom intervalu u kojem mu kutna brzina padne od ω_1 na ω_2 jednak je razlici kinetičkih energija rotacija pri tim kutnim brzinama.

$$\begin{aligned} W = E_{k1} - E_{k2} &\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot W = I \cdot \omega_1^2 - I \cdot \omega_2^2 &\Rightarrow 2 \cdot W = I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) \Rightarrow 2 \cdot W = I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) \quad / \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_1}{t} \\ \omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_2}{t} \end{array} \right] \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n_1}{t}\right)^2 - \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n_2}{t}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n_1}{t}\right)^2 - 4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n_2}{t}\right)^2} \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\left(\frac{n_1}{t}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{t}\right)^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\left(\frac{n_1}{t}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{t}\right)^2\right)} \Rightarrow I = \frac{W}{2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\left(\frac{n_1}{t}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{t}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{392.4 \text{ J}}{2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\left(\frac{600}{60 \text{ s}}\right)^2 - \left(\frac{580}{60 \text{ s}}\right)^2\right)} = 3.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Vježba 189

Kotač zamašnjak benzinskog motora obavi rad od 784.8 J za vrijeme dok mu kutna brzina padne od 600 na 580 okreta u minuti. Koliki je moment tromosti kotača?

Rezultat: 6.06 kg · m².

Zadatak 190 (Matea, strukovna škola)

Čestica kruži po stazi polumjera 0.1 m brzinom $9.6 \cdot 10^4$ m/s. Kolika je frekvencija kruženja čestice?

Rješenje 190

$$r = 0.1 \text{ m}, \quad v = 9.6 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \quad \nu = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Frekvencija ili učestalost je broj okreta u jedinici vremena (u 1 sekundi).

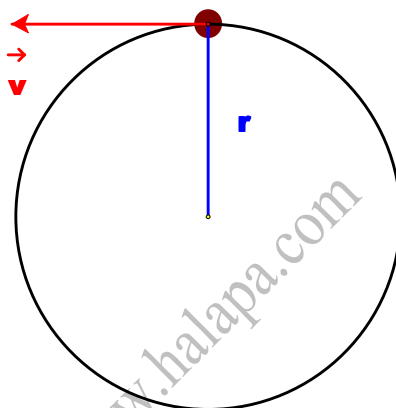
Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je r polumjer kružnice, ν frekvencija (broj okreta u jedinici vremena).

Frekvencija kruženja čestice iznosi:

$$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = \frac{v}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{9.6 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0.1 \text{ m} \cdot \pi} = 1.53 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{s}} = 1.53 \cdot 10^5 \text{ Hz}.$$



Vježba 190

Čestica kruži po stazi polumjera 0.2 m brzinom $1.92 \cdot 10^5$ m/s. Kolika je frekvencija kruženja čestice?

Rezultat: $1.53 \cdot 10^5$ Hz.

Zadatak 191 (Ivan, gimnazija)

Metarski štap položen je na dasku stola tako da četvrtinom duljine viri izvan stola. Najveći uteg m_1 , koji možemo objesiti na vanjski kraj štapa a da se pritom štap ne preokrene, jest uteg od 250 g. Kolika je masa štapa?

Rješenje 191

$$m_1 = 250 \text{ g} = 0.25 \text{ kg}, \quad m = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Težište tijela je točka sjecišta vertikala (težišnica) kroz dva ili više objesišta.

Algebarski zbroj momenata svih sila koje djeluju na tijelo mora biti jednak nuli. Pritom moment sile

obično uzimamo pozitivnim ako sila (ili rezultanta sila) nastoji zakrenuti tijelo u smislu vrtnje kazaljke na satu, i obratno, ako sila nastoji (ili rezultanta sila) zakrenuti tijelo, obrnuto od kazaljke na satu, moment sile je negativan. **Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje ga zakreću u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.**

Uvjet ravnoteže krutog tijela s učvršćenom osi možemo iskazati ovako:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n M_i = 0.$$

Pretpostavimo da je metarski štap homogen. Neka je m njegova masa. Sila teža koja na nj djeluje je

$$G = m \cdot g.$$

Iznos sile teže G_1 koja djeluje na uteg mase m_1 , obješen na vanjski kraj štapa, je

$$G_1 = m_1 \cdot g.$$

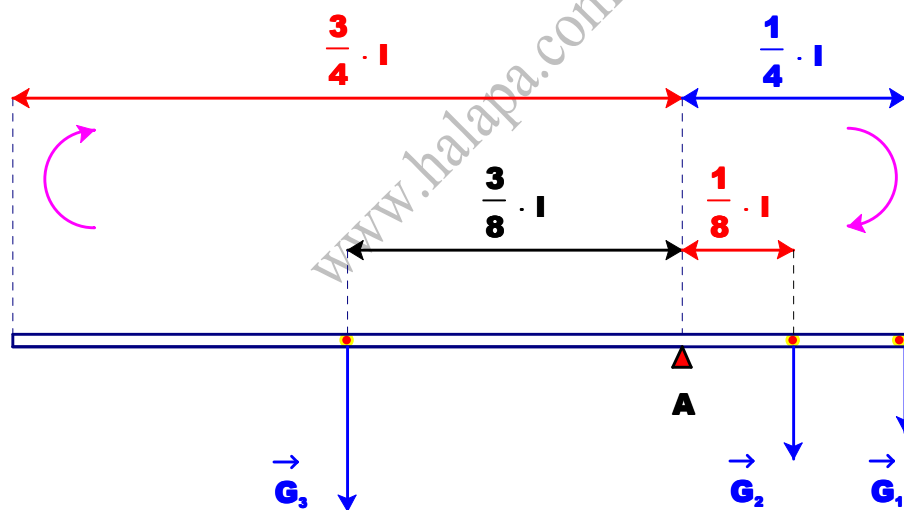
Iznos sile teže G_2 koja djeluje na dio štapa koji viri izvan stola je

$$G_2 = \frac{1}{4} \cdot G \Rightarrow G_2 = \frac{1}{4} \cdot m \cdot g.$$

Iznos sile teže G_3 koja djeluje na dio štapa koji je položena na dasku stola je

$$G_3 = \frac{3}{4} \cdot G \Rightarrow G_3 = \frac{3}{4} \cdot m \cdot g.$$

Budući da je metarski štap homogen tada se težišta dijela štapa, koji viri izvan stola i dijela koji leži na stolu, nalaze u njihovim geometrijskim središtima.



Moment sile možemo računati s obzirom na bilo koju točku na štapu. Izabiremo točku A.

Odredimo li prvo moment sile M_1 , a zatim moment sile M_2 , zbrajajući ta dva momenta, dobit ćemo ukupni moment sile M_{12} na desnoj strani štapa.

$$M_{12} = M_1 + M_2 \Rightarrow M_{12} = G_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot l + G_2 \cdot \frac{1}{8} \cdot l.$$

Moment sile M_3 na lijevoj strani štapa zadan je izrazom

$$M_3 = G_3 \cdot \frac{3}{8} \cdot l.$$

Pri ravnoteži zadovoljena je jednakost:

$$M_3 = M_{12} \Rightarrow G_3 \cdot \frac{3}{8} \cdot l = G_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot l + G_2 \cdot \frac{1}{8} \cdot l \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot m \cdot g \cdot \frac{3}{8} \cdot l = m_1 \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot l + \frac{1}{4} \cdot m \cdot g \cdot \frac{1}{8} \cdot l \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot m \cdot g \cdot \frac{3}{8} \cdot l &= m_1 \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot l + \frac{1}{4} \cdot m \cdot g \cdot \frac{1}{8} \cdot l \quad / \cdot \frac{1}{g \cdot l} \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot m \cdot \frac{3}{8} = m_1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot m \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{9}{32} \cdot m &= \frac{1}{4} \cdot m_1 + \frac{1}{32} \cdot m \Rightarrow \frac{9}{32} \cdot m = \frac{1}{4} \cdot m_1 + \frac{1}{32} \cdot m \quad / \cdot 32 \Rightarrow 9 \cdot m = 8 \cdot m_1 + m \Rightarrow \\ \Rightarrow 9 \cdot m - m &= 8 \cdot m_1 \Rightarrow 8 \cdot m = 8 \cdot m_1 \Rightarrow 8 \cdot m = 8 \cdot m_1 \quad / : 8 \Rightarrow m = m_1 = 250 \text{ g} = 0.25 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Vježba 191

Metarski štap položen je na dasku stola tako da četvrtinom duljine viri izvan stola. Najveći uteg m_1 , koji možemo objesiti na vanjski kraj štapa a da se pritom štap ne preokrene, jest uteg od 140 g. Kolika je masa štapa?

Rezultat: 0.14 kg.

Zadatak 192 (Ivan, tehnička škola)

Kotač se vrti stalnom akceleracijom 8 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 s?

Rješenje 192

$$\alpha = 8 \text{ rad/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad n = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kut φ koji tijelo opiše nakon vremena t dan je formulom:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je α kutna akceleracija.

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Kutove pri rotaciji izražavamo redovito u radijanima. Ako se tijelo jednom okrene oko čvrste osi kažemo da je načinilo jedan okret ili " opisalo kut 2π rad ili 360° ". Vrijedi:

$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Kut φ koji tijelo opiše nakon n okreta iznosi:

$$\varphi = n \cdot 2 \cdot \pi.$$



Broj okreta n iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= n \cdot 2 \cdot \pi \\ \varphi &= \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow n \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow n = \frac{\alpha \cdot t^2}{4 \cdot \pi} =$$

$$= \frac{8 \frac{1}{2} \cdot (5 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi} = 15.92 \approx 16.$$

Vježba 192

Kotač se vrti stalnom akceleracijom 10 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 s?

Rezultat: 20.

Zadatak 193 (Maja, srednja škola)

Polumjer R kružne putanje satelita koji se giba brzinom v tik uz površinu Zemlje može se izračunati iz formule:

$$A. R = \frac{v}{g}, \quad B. R = \frac{v^2}{g}, \quad C. R = \frac{v^2}{2g}, \quad D. R = v \cdot g$$

Rješenje 193

$$g, \quad v, \quad R = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Budući da je sila teža uzrok kružnog gibanja satelita, jer djeluje kao centripetalna sila koja mijenja smjer brzine, mora sila teža G biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} .

$$G = F_{cp} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R} / \cdot \frac{R}{m \cdot g} \Rightarrow R = \frac{v^2}{g}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 193

Koliku bismo brzinu morali dati satelitu da obleti Zemlju usporedno s njezinom površinom i blizu nje, ako zanemarimo otpor zraka. Polumjer Zemlje je R .

$$A. v = R \cdot g, \quad B. v = R^2 \cdot g, \quad C. v = \frac{R^2}{g}, \quad D. v = \sqrt{R \cdot g}$$

Rezultat: D.

Zadatak 194 (Tina, gimnazija)

Odredite omjer najvećih brzina pri kojima automobil može sigurno svladati isti zavoj na horizontalnoj položenoj cesti pri suhom vremenu i po snijegu. Faktor statičkog trenja u uvjetima suhog vremena je 0.9, a u snježnim uvjetima 0.1.

Rješenje 194

$$\mu_1 = 0.9, \quad \mu_2 = 0.1, \quad \frac{v_1}{v_2} = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Budući da je trenje sila koja prisiljava automobil da se giba kružnom cestom (zavojem), slijedi:

$$\begin{aligned} F_{cp} = F_{tr} &\Rightarrow F_{cp} = \mu \cdot G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^2 = \mu \cdot g \cdot r \Rightarrow v = \sqrt{\mu \cdot g \cdot r}. \end{aligned}$$

Računamo omjer brzina

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\mu_1 \cdot g \cdot r} \quad \text{i} \quad v_2 = \sqrt{\mu_2 \cdot g \cdot r}. \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{\sqrt{\mu_1 \cdot g \cdot r}}{\sqrt{\mu_2 \cdot g \cdot r}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \cdot g \cdot r}{\mu_2 \cdot g \cdot r}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \cdot g \cdot r}{\mu_2 \cdot g \cdot r}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{0.9}{0.1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{9} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 3. \end{aligned}$$

Vježba 194

Odredite omjer najvećih brzina pri kojima automobil može sigurno svladati isti zavoj na horizontalnoj položenoj cesti pri suhom vremenu i po snijegu. Faktor statičkog trenja u uvjetima suhog vremena je 0.8, a u snježnim uvjetima 0.2.

Rezultat: 2.

Zadatak 195 (TNT, gimnazija)

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnici različitih polumjera r i R . Pritom je $R = 2 \cdot r$. Obodna brzina oba kamena je jednaka. Kakav je odnos sila napetosti užeta u drugom i prvom slučaju?

$$A. F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1 \quad , \quad B. F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1 \quad , \quad C. F_2 = F_1 \quad , \quad D. F_2 = 2 \cdot F_1$$

Rješenje 195

$$m_1 = m_2 = m, \quad r, \quad R = 2 \cdot r, \quad v_1 = v_2 = v, \quad \frac{F_2}{F_1} = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

1. inačica

Iz formule za centripetalnu silu vidi se da je sila F obrnuto razmjerna polumjeru r , ako su masa m i brzina v stalne.

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F \sim \frac{1}{r}.$$

Budući da se polumjer u drugom slučaju povećao dva puta, nova sila bit će manja dva puta od prijašnje sile, tj. vrijedi:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1.$$

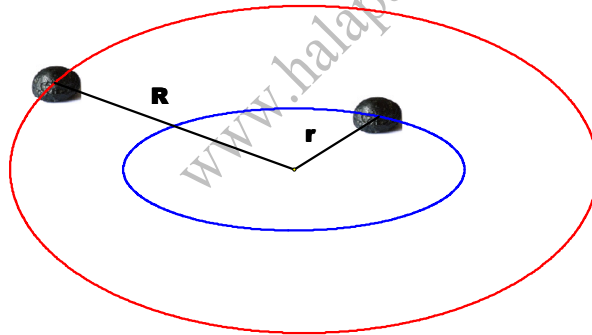
Odgovor je pod B.

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{r} \\ F_2 = m_2 \cdot \frac{v_2^2}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_1 = m \cdot \frac{v^2}{r} \\ F_2 = m \cdot \frac{v^2}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{m \cdot \frac{v^2}{r}} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot r}}{m \cdot \frac{v^2}{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot r}}{m \cdot \frac{v^2}{r}} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2} \cdot F_1 \Rightarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 195

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnici različitih polumjera r i R . Pritom je $R = 0.5 \cdot r$. Obodna brzina oba kamena je jednaka. Kakav je odnos sila napetosti užeta u drugom i prvom slučaju?

A. $F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1$, B. $F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1$, C. $F_2 = F_1$, D. $F_2 = 2 \cdot F_1$

Rezultat: D.

Zadatak 196 (Nataša, medicinska škola)

Tijelo mase $m = 1$ kg giba se jednoliko po kružnici polumjera $r = 0.25$ m. Kolika je centripetalna sila ako je frekvencija kruženja $\nu = 2$ Hz?

Rješenje 196

$m = 1$ kg, $r = 0.25$ m, $\nu = 2$ Hz, $F = ?$

Centripetalna sila F_{cp} uzrokuje jednoliko kružno gibanje tijela, a djeluje okomito na smjer brzine gibanja prema središtu kružne putanje. Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje

centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je m masa tijela, r polumjer kružnice po kojoj tijelo rotira, v frekvencija (broj okretaja u jedinici vremena).

Centripetalna sila iznosi:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = 1 \text{ kg} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0.25 \text{ m} \cdot \left(2 \frac{1}{s}\right)^2 = 39.48 \text{ N}.$$

Vježba 196

Tijelo mase $m = 0.5 \text{ kg}$ giba se jednoliko po kružnici polumjera $r = 0.5 \text{ m}$. Kolika je centripetalna sila ako je frekvencija kruženja $v = 2 \text{ Hz}$?

Rezultat: 39.48 N.

Zadatak 197 (Bruno, tehnička škola)

Na tijelo koje se nalazi 12 cm od osi vrtnje djeluje centripetalna sila 100000 puta veća od težine tijela. Koliko okretaja oko osi učini tijelo svake sekunde? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 197

$$r = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}, \quad n = 100000, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Centripetalna sila F_{cp} uzrokuje jednoliko kružno gibanje tijela, a djeluje okomito na smjer brzine gibanja prema središtu kružne putanje. Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je m masa tijela, r polumjer kružnice po kojoj tijelo rotira, v frekvencija (broj okretaja u jedinici vremena).

Budući da je centripetalna sila n puta veća od težine tijela, vrijedi:

$$\begin{aligned} F_{cp} &= n \cdot G \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r \cdot v^2 = 100000 \cdot m \cdot g \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r \cdot v^2 &= 100000 \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r} \Rightarrow v^2 = \frac{100000 \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{100000 \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{100000 \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r}} \Rightarrow v = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{100000 \cdot g}{r}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{100000 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{0.12 \text{ m}}} = 455 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Vježba 197

Na tijelo koje se nalazi 24 cm od osi vrtnje djeluje centripetalna sila 200000 puta veća od težine tijela. Koliko okretaja oko osi učini tijelo svake sekunde? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 455 Hz.

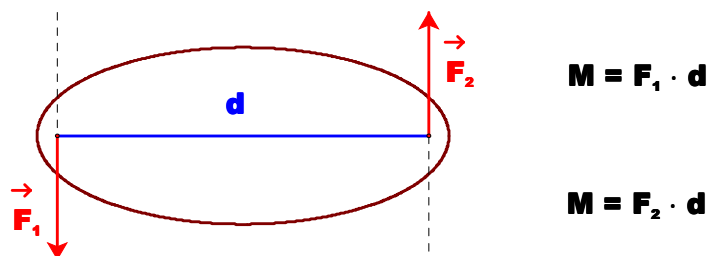
Zadatak 198 (Nadija, kemijska škola)

Koliki je moment para sila pri zakretanju upravljača automobila ako promjer upravljača iznosi 35 cm, a sila svake ruke 3 N?

Rješenje 198

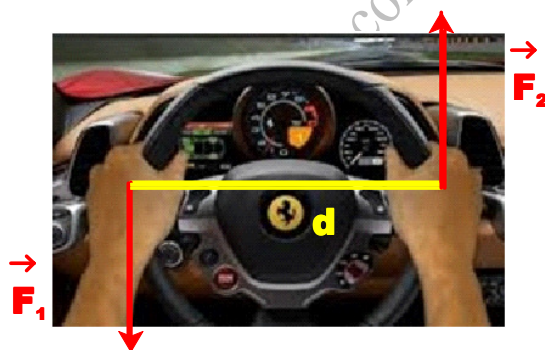
$$d = 35 \text{ cm} = 0.35 \text{ m}, \quad F = 3 \text{ N}, \quad M = ?$$

Par ili spreg sila je poseban slučaj dviju antiparalelnih sila (sile su jednake veličine, usporedne su, ali suprotnog smjera). Moment para sila jednak je umnošku jedne od sila i udaljenosti između njihovih hvatišta.



Računamo moment para sila pri zakretanju upravljača automobila.

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = F \\ F_2 = F \end{array} \right\} \Rightarrow M = F \cdot d = 3 \text{ N} \cdot 0.35 \text{ m} = 1.05 \text{ N} \cdot \text{m}.$$



Vježba 198

Koliki je moment para sila pri zakretanju upravljača automobila ako promjer upravljača iznosi 30 cm, a sila svake ruke 3 N?

Rezultat: 0.9 Nm.

Zadatak 199 (Sanja, gimnazija)

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnicama različitih polumjera r_1 i r_2 . Pritom je $r_2 = 2 \cdot r_1$. Ophodno vrijeme (perioda) oba kamena je isto. Koliki je omjer sila napetosti užeta u drugom i prvom slučaju?

$$A. F_2 = \frac{1}{4} \cdot F_1 \quad B. F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_1 \quad C. F_2 = F_1 \quad D. F_2 = 2 \cdot F_1$$

Rješenje 199

$$m_1 = m_2 = m, \quad r_2 = 2 \cdot r_1, \quad T_1 = T_2 = T, \quad \frac{F_2}{F_1} = ?$$

Da bi se tijelo mase m gibalo periodom T po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Za dvije promjenjive međusobno zavisne veličine x i y kažemo da su upravo razmjerne ili direktno proporcionalne s koeficijentom proporcionalnosti (razmjernosti) k, $k \neq 0$, ako je

$$\frac{y}{x} = k \text{ ili } y = k \cdot x.$$

Svako povećanje (smanjenje) jedne veličine dovodi jednako toliko puta do povećanja (smanjenja) druge veličine.

1. inačica

Računamo omjer sila F_2 i F_1 .

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_1^2} \cdot r_1 \\ F_2 &= m_2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2} \cdot r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_1 &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_1 \\ F_2 &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_2}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_2}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow [r_2 = 2 \cdot r_1] \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{2 \cdot r_1}{r_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{2 \cdot r_1}{r_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 2 \cdot F_1 \Rightarrow F_2 = 2 \cdot F_1.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

Uočimo da su centripetalna sila F_{cp} koja djeluje na tijelo i polumjer r kružnice po kojoj se ono giba upravo razmjerni uz stalnu periodu T .

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r \Rightarrow F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r \Rightarrow F_{cp} \sim r.$$

Ako polumjer povećamo dva puta centripetalna sila povećat će se dva puta uz stalnu periodu.

Ako polumjer povećamo tri puta centripetalna sila povećat će se tri puta uz stalnu periodu.

Ako polumjer povećamo n puta centripetalna sila povećat će se n puta uz stalnu periodu.

Budući da je polumjer r_2 dva puta veći od polumjera r_1

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{2 \cdot r_1}{r_1} = \frac{2 \cdot r_1}{r_1} = 2,$$

centripetalna sila F_2 dva puta je veća od sile F_1 . Odgovor je pod D.

Vježba 199

Dva kamena jednakih masa kruže u horizontalnoj ravnini po kružnicama različitih polumjera r_1 i r_2 . Pritom je $r_2 = 3 \cdot r_1$. Ophodno vrijeme (perioda) oba kamena je isto. Koliki je omjer sila napetosti užeta u drugom i prvom slučaju?

A. $F_2 = 3 \cdot F_1$ B. $F_2 = \frac{1}{3} \cdot F_1$ C. $F_2 = F_1$ D. $F_2 = 6 \cdot F_1$

Rezultat: A.

Zadatak 200 (Sanja, gimnazija)

Put koji prijeđe vrh sekundne kazaljke sata koja ima duljinu 2 cm tijekom 24 sata približno je jednak:

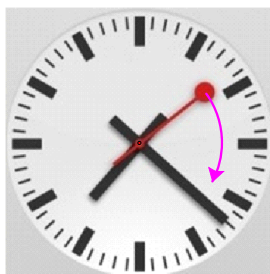
- A. 1.81 m B. 18.1 m C. 181 m D. 1810 m

Rješenje 200

$$r = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad t = 24 \text{ h} = [24 \cdot 3600] = 86400 \text{ s}, \quad s = ?$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Opseg kružnice polumjera r računa se po formuli:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$



Kada se sekundna kazaljka sata jednom okrene oko svoje osi (kada opiše puni kut) prošlo je točno

$$t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$

a njezin vrh prešao je put s_1 koji je jednak opsegu kružnice polumjera r :

$$s_1 = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Tijekom 24 sata sekundna kazaljka okrene se

$$n = \frac{t}{t_1} = \frac{86400 \text{ s}}{60 \text{ s}} = 1440$$

puta, a njezin vrh prevali put s jednak:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = 2 \cdot r \cdot \pi \\ s = n \cdot s_1 \end{array} \right\} \Rightarrow s = n \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 1440 \cdot 2 \cdot 0.02 \text{ m} \cdot \pi = 180.96 \text{ m} \approx 181 \text{ m}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 200

Put koji prijeđe vrh sekundne kazaljke sata koja ima duljinu 20 mm tijekom jednog dana približno je jednak:

- A. 1.81 m B. 18.1 m C. 181 m D. 1810 m

Rezultat: C.