

Zadatak 221 (Branko, strukovna škola)

Obruč i puni valjak imaju jednaku masu 2 kg i koturaju se jednakom brzinom 5 m / s. Nađi kinetičke energije obaju tijela.

Rješenje 221

$$m = 2 \text{ kg}, \quad v = 5 \text{ m / s}, \quad E_{ko} = ?, \quad E_{kv} = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju translacije:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti) tijela.

Moment tromosti obruča mase m i polumjera r s obzirom na os rotacije koja prolazi okomito na obruč njegovim središtem:

$$I = m \cdot r^2.$$

Moment tromosti homogenog valjka mase m i polumjera osnovke (baze) r s obzirom na os rotacije koja je identična s osi valjka:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Ukupna kinetička energija obruča koji se kotrlja brzinom v jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije.

$$\begin{aligned} E_{ko} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = m \cdot r^2 \\ \omega = \frac{v}{r} \end{array} \right] \Rightarrow E_{ko} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{ko} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow E_{ko} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{ko} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_{ko} = m \cdot v^2 = 2 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 50 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ukupna kinetička energija punog valjka koji se kotrlja brzinom v jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije.

$$\begin{aligned} E_{kv} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = \frac{v}{r} \end{array} \right] \Rightarrow E_{kv} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{kv} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow E_{kv} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{kv} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_{kv} = \frac{2+1}{4} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow E_{kv} = \frac{3}{4} \cdot m \cdot v^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 2 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 37.5 \text{ J}.$$

Vježba 221

Obruč i puni valjak imaju jednaku masu 200 dag i koturaju se jednakom brzinom 5 m / s. Nađi kinetičke energije obaju tijela.

Rezultat: 50 J, 37.5 J.

Zadatak 222 (Azra, medicinska škola)

Odredite kutnu brzinu za slučaj kazaljke na ručnom satu koja pokazuje broj sekundi u minuti.

A. $0.01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ B. $0.10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ C. $3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ D. $6.28 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ E. $60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Rješenje 222

$$\varphi = 2 \cdot \pi \text{ rad puni kut}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad \omega = ?$$

Kutna brzina ω mjeri se u rad / s i određena je izrazom

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t}.$$

Obično se uzima

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \Delta t = t$$

pa je

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 0.10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 222

Odredite kutnu brzinu za slučaj kazaljke na satu koja pokazuje broj minuta u satu.

A. $0.0017 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ B. $0.12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ C. $3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ D. $0.013 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Rezultat: A.

Zadatak 223 (Una, gimnazija)

Moment sile (zakretni moment) od 66 N · m djeluje na kotač čiji je moment tromosti (inercije) 175 kg · m². Ako kotač u početku miruje koliko mu treba vremena da napravi jedan okret?

Rješenje 223

$$M = 66 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad I = 175 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad N = 1 \text{ broj okretaja}, \quad t = ?$$

Pri rotaciji konstantnom kutnom akceleracijom kut φ mijenja se u vremenu prema izrazu

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je ω_0 početna kutna brzina. Ako je rotacija počela iz stanja mirovanja izraz glasi:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2.$$

Prijedeni kut φ i ukupni broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na nj djeluje stalni moment sile M , koji još zovemo zakretni moment. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}.$$

Računamo vrijeme potrebno za jedan okret.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{M}{I} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot t^2 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot t^2 = 2 \cdot \pi \cdot N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot t^2 = 2 \cdot \pi \cdot N \quad / \cdot \frac{2 \cdot I}{M} \Rightarrow t^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot N \cdot I}{M} \Rightarrow t^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot N \cdot I}{M} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot N \cdot I}{M}} \Rightarrow t = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot N \cdot I}{M}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 1.175 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{66 \text{ N} \cdot \text{m}}} = 5.77 \text{ s}.$$

Vježba 223

Moment sile (zakretni moment) od $132 \text{ N} \cdot \text{m}$ djeluje na kotač čiji je moment tromosti (inercije) $350 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Ako kotač u početku miruje koliko mu treba vremena da napravi jedan okret?

Rezultat: 5.77 s.

Zadatak 224 (Azra, medicinska škola)

Lopta se giba stalnom brzinom 4 m/s po kružnoj stazi polumjera 0.25 m . Odredite periodu gibanja.

- A. 0.1 s B. 0.2 s C. 0.4 s D. 0.7 s E. 0.9 s

Rješenje 224

$$v = 4 \text{ m/s}, \quad r = 0.25 \text{ m}, \quad T = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Brzina točke udaljene r od središta vrtnje (rotacije) iznosi

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je T perioda, trajanje jednog ophoda (okretaja) izraženo u sekundama.

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \quad / \cdot \frac{T}{v} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{v} = \frac{2 \cdot 0.25 \text{ m} \cdot \pi}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0.4 \text{ s}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 224

Lopta se giba stalnom brzinom 4 m/s po kružnoj stazi polumjera 25 cm . Odredite periodu gibanja.

- A. 0.1 s B. 0.2 s C. 0.4 s D. 0.7 s E. 0.9 s

Rezultat: C.

Zadatak 225 (Azra, medicinska škola)

Uteg mase 0.25 kg privezan je na nit duljine 0.5 m, koja kruži u horizontalnoj ravnini. Odredite napetost niti ako je frekvencija kruženja 2 okreta u sekundi.

Rješenje 225

$$m = 0.25 \text{ kg}, \quad r = 0.5 \text{ m}, \quad v = 2 \text{ Hz}, \quad F = ?$$

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

gdje je v frekvencija (broj okreta u jedinici vremena). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice. U sustavu koji se giba po kružnici pojavljuje se centrifugalna sila po iznosu jednaka

$$F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2,$$

a u smjeru od središta kružnice.

Napetost niti je po iznosu jednaka centrifugalnoj sili.

$$F = F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 = 0.25 \text{ kg} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0.5 \text{ m} \cdot \left(2 \frac{1}{s}\right)^2 = 19.74 \text{ N}.$$

Vježba 225

Uteg mase 25 dag privezan je na nit duljine 5 dm, koja kruži u horizontalnoj ravnini. Odredite napetost niti ako je frekvencija kruženja 2 okreta u sekundi.

Rezultat: 19.74 N.

Zadatak 226 (Azra, medicinska škola)

Kojom najvećom brzinom može voziti automobil na zavoju horizontalne ceste polumjera 50 m ako je faktor trenja između kotača i ceste 0.2? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 226

$$r = 50 \text{ m}, \quad \mu = 0.2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo težnom silom (silom težom). Pod djelovanjem težne sile sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G težna sila, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Da bi se tijelo, mase m , gibalo po kružnici, polumjera r , potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je F_{tr} trenje, μ faktor trenja, F_N veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Na vodoravnoj površini sila trenja za tijelo težine G iznosi:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Tu je trenje sila koja prisiljava automobil da se kreće kružnom cestom.

$$F_{tr} = F_{cp} \Rightarrow \mu \cdot G = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = \mu \cdot g \cdot r \Rightarrow v = \sqrt{\mu \cdot g \cdot r} =$$

$$= \sqrt{0.2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 50 m} = 9.90 \frac{m}{s}.$$

Vježba 226

Kojom najvećom brzinom može voziti automobil na zavoju horizontalne ceste polumjera 0.05 km ako je faktor trenja između kotača i ceste 0.2? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 9.90 m / s.

Zadatak 227 (Već, gimnazija)

Motor postigne kutnu brzinu 2800 okr / min za 30 s. Odredite kutno ubrzanje, prijedeni kut i učinjeni broj okretaja.

Rješenje 227

$$n = 2800 \text{ okretaja}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad t_1 = 30 \text{ s}, \quad \alpha = ?, \quad \varphi = ?, \quad N = ?$$

Vrtanja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtanju opisuje prijedeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Kutna brzina ω i broj okretaja n u vremenu t povezani su u formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Prijedeni kut φ i ukupan broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Za jednoliko promjenljivu vrtanju vrijede izrazi:

$$\omega = \alpha \cdot t, \quad \omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2,$$

gdje je ω kutna brzina, α kutna akceleracija, t vrijeme vrtanje, φ prijedeni kut.

Računamo kutno ubrzanje (akceleraciju) α .

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \alpha \cdot t_1 \\ \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot t_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \Rightarrow \alpha \cdot t_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \cdot \frac{1}{t_1} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t \cdot t_1} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot 2800}{60 \text{ s} \cdot 30 \text{ s}} = 9.77 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Računamo prijedeni kut φ .

1. inačica

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2 = \left[\begin{array}{l} \alpha = 9.77 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \\ t_1 = 30 \text{ s} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \cdot 9.77 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (30 \text{ s})^2 = 4396.5 \text{ rad}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \\ \omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \right)^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \right)^2 = \left[\begin{array}{l} \alpha = 9.77 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \\ n = 2800 \\ t = 60 \text{ s} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 9.77 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 2800}{60 \text{ s}} \right)^2 = 4399.96 \text{ rad.}$$

Razlika se javlja zbog zaokruživanja!
Računamo učinjeni broj okretaja N.

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \varphi \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \varphi \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} =$$

$$= \left[\varphi = 4396.5 \text{ rad} \right] = \frac{4396.5 \text{ rad}}{2 \cdot \pi} \approx 700 \text{ okretaja.}$$

Vježba 227

Motor postigne kutnu brzinu 2800 okr / min za pola minute. Odredite kutno ubrzanje.

Rezultat: $9.77 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$

Zadatak 228 (Veky, gimnazija)

Elektromotor kutne brzine 2400 okr / min zaustavi se učinivši 4500 okretaja. Koliko je trajalo zaustavljanje i koliko je kutno usporjenje?

Rješenje 228

$$n = 2400 \text{ okretaja, } t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s, } N = 4500 \text{ okretaja, } t_1 = ?, \alpha = ?$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtnju opisuje prijedeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Kutna brzina ω i broj okretaja n u vremenu t povezani su u formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Prijedeni kut φ i ukupan broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Za jednoliko promjenljivu vrtnju vrijede izrazi:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t, \quad \omega = \alpha \cdot t,$$

gdje je ω kutna brzina, α kutna akceleracija, t vrijeme vrtnje, φ prijedeni kut.

Računamo vrijeme zaustavljanja t_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_1 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 = 2 \cdot \pi \cdot N &\Rightarrow \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 = 2 \cdot \pi \cdot N \cdot \frac{t}{\pi \cdot n} \Rightarrow t_1 = \frac{2 \cdot N \cdot t}{n} = \\ &= \frac{2 \cdot 4500 \cdot 60 \text{ s}}{2400} = 225 \text{ s.} \end{aligned}$$

Računamo kutno usporenje α . (formule su analogne kao i za ubrzanje)

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \alpha \cdot t_1 \\ \omega &= \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot t_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \Rightarrow \alpha \cdot t_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \cdot \frac{1}{t_1} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t \cdot t_1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} n = 2400 \\ t = 60 \text{ s} \\ t_1 = 225 \text{ s} \end{array} \right] = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2400}{60 \text{ s} \cdot 225 \text{ s}} = 1.12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Vježba 228

Elektromotor kutne brzine 4800 okr / min zaustavi se učinivši 9000 okretaja. Koliko je trajalo zaustavljanje?

Rezultat: 225 s.

Zadatak 229 (Veky, gimnazija)

Kutna brzina ventilatora poveća se sa 250 okr / min na 750 okr / min za 50 s. Odredite kutno ubrzanje i učinjeni broj okretaja.

Rješenje 229

$$n_1 = 250 \text{ okretaja}, \quad t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad n_2 = 750 \text{ okretaja}, \quad t_2 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$

$$t = 50 \text{ s}, \quad \alpha = ?, \quad N = ?$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtanju opisuje prijedeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Kutna brzina ω i broj okretaja n u vremenu t povezani su u formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Prijedeni kut φ i ukupan broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Za jednoliko promjenljivu vrtanju s početnom kutnom brzinom ω_0 vrijede izrazi:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot t,$$

gdje je ω konačna kutna brzina nakon vremena t , α kutna akceleracija, t vrijeme vrtanje, φ prijedeni kut nakon vremena t .

Računamo kutno ubrzanje (akceleraciju) α .

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha \cdot t \Rightarrow \omega_1 + \alpha \cdot t = \omega_2 \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_2 - \omega_1 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \omega_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t_2} \\ \omega_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t_1} \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t_2} - \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi}{t} \cdot \left(\frac{n_2}{t_2} - \frac{n_1}{t_1} \right) = \frac{2 \cdot \pi}{50 \text{ s}} \cdot \left(\frac{750}{60 \text{ s}} - \frac{250}{60 \text{ s}} \right) = 1.047 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Računamo učinjeni broj okretaja N.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2 \cdot \pi \cdot N \\ \varphi &= \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t \Rightarrow \left[\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t_1} \\ \omega_2 &= \frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t_2} \end{aligned} \right] \Rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t_1} + \frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t_2} \right) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{n_1}{t_1} + \frac{n_2}{t_2} \right) \cdot t \Rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{n_1}{t_1} + \frac{n_2}{t_2} \right) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n_1}{t_1} + \frac{n_2}{t_2} \right) \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{250}{60 \text{ s}} + \frac{750}{60 \text{ s}} \right) \cdot 50 \text{ s} = 416.7 \text{ okretaja}.$$

Vježba 229

Kutna brzina ventilatora povećava se sa 500 okr / min na 1500 okr / min za 100 s. Odredite kutno ubrzanje.

Rezultat: $1.047 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$

Zadatak 230 (Većy, gimnazija)

Kotač zamašnjak motora izvrši rad od 392.4 J za vrijeme dok mu kutna brzina padne od 600 na 580 okretaja u minuti. Koliki je moment tromosti kotača?

Rješenje 230

$$W = 392.4 \text{ J}, \quad n_1 = 600 \text{ okretaja}, \quad n_2 = 580 \text{ okretaja}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad I = ?$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtnju opisuje prijedeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Kutna brzina ω i broj okretaja n u vremenu t povezani su u formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment tromosti tijela.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

Rad koji kotač zamašnjak izvrši u vremenskom intervalu u kojem mu kutna brzina padne od ω_1 na ω_2 jednak je razlici kinetičke energije rotacije pri tim kutnim brzinama.

$$\begin{aligned} W &= E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) &= W \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) = W \cdot \frac{2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \omega_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t} \\ \omega_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t} \end{array} \right] \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t} \right)^2 - \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t} \right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n_1^2}{t^2} - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n_2^2}{t^2}} \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\frac{4 \cdot \pi^2}{t^2} \cdot (n_1^2 - n_2^2)} \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W \cdot t^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot (n_1^2 - n_2^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{2 \cdot W \cdot t^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot (n_1^2 - n_2^2)} \Rightarrow I = \frac{W \cdot t^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot (n_1^2 - n_2^2)} =$$

$$= \frac{392.4 \text{ J} \cdot (60 \text{ s})^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot (600^2 - 580^2)} = 3.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Vježba 230

Kotač zamašnjak motora izvrši rad od 0.3924 kJ za vrijeme dok mu kutna brzina padne od 600 na 580 okretaja u minuti. Koliki je moment tromosti kotača?

Rezultat: $3.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Zadatak 231 (Ivana, gimnazija)

Osovina motora vrti se stalnom kutnom brzinom od 6000 okretaja u minuti. U jednom trenutku počinje jednoliko kočenje i kutna brzina osovine smanji se na 4800 okretaja u minuti za vrijeme od 4 sekunde. Koliko okretaja načini osovina do zaustavljanja?

Rješenje 231

$n_0 = 6000$ okretaja, $t_0 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, $n_1 = 4800$ okretaja, $t_1 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$,
 $t = 4 \text{ s}$, $N = ?$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Vrtnju opisuje prijedeni kut φ , kutna brzina ω , kutna akceleracija α .

Kutna brzina ω i broj okretaja n u vremenu t povezani su u formuli

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Prijedeni kut φ i ukupan broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

Trenutačna kutna brzina ω kod jednoliko usporene vrtnje (rotacije) dana je izrazom

$$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t,$$

gdje je ω_0 početna kutna brzina, α kutna akceleracija, t vrijeme vrtnje (rotacije).

Osovina motora počinje jednoliko usporavati pa njezina kutna akceleracija iznosi:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 - \omega_1 \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_0 - \omega_1 \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0 - \omega_1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_0}{t_0} \\ \omega_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t_1} \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n_0}{t_0} - \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t_1} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot \pi}{t} \cdot \left(\frac{n_0}{t_0} - \frac{n_1}{t_1} \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi}{4 \text{ s}} \cdot \left(\frac{6000}{60 \text{ s}} - \frac{4800}{60 \text{ s}} \right) = 31.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Određimo prijedeni kut φ osovine do zaustavljanja.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{osovina se zaustavi} \\ \omega = 0 \end{array} \right] \Rightarrow 0 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \omega_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha \cdot \varphi = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot \alpha}.$$

Broj okretaja N osovine do zaustavljanja je:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \\ \varphi = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot \alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\omega_0^2}{2 \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_0^2}{4 \cdot \pi \cdot \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_0}{t_0} \right] \Rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n_0}{t_0} \right)^2 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \alpha = 31.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \\ n_0 = 6000 \\ t_0 = 60 \text{ s} \end{array} \right] = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 31.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 6000}{60 \text{ s}} \right)^2 \approx 1000 \text{ okretaja.}$$

Vježba 231

Osovina motora vrti se stalnom kutnom brzinom od 3000 okretaja u pola minute. U jednom trenutku počinje jednoliko kočenje i kutna brzina osovine smanji se na 4800 okretaja u minuti za vrijeme od 4 sekunde. Koliko okretaja načini osovina do zaustavljanja?

Rezultat: 1000.

Zadatak 232 (Frenky, srednja škola)

Kružna ploča promjera 5 m zakrene se za 90° u 2 s. Kolika je obodna brzina tijela koje se nalazi na rubu ploče?

Rješenje 232

$$2 \cdot r = 5 \text{ m}, \quad \alpha = 90^\circ, \quad t = 2 \text{ s}, \quad v = ?$$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda, okretaja.

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).

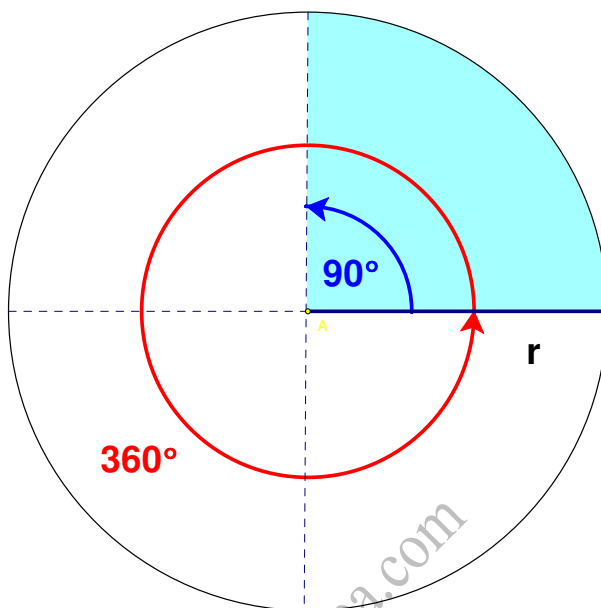
$$1 \text{ okret} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Budući da se kružna ploča zakrene za 90° u 2 s, za jedan okretaj (kut od 360°) trebat će joj

$$(360^\circ : 90^\circ = 4) \Rightarrow T = 4 \cdot t = 4 \cdot 2 \text{ s} = 8 \text{ s}$$

pa obodna brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{5 \text{ m} \cdot \pi}{8 \text{ s}} = 1.96 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Vježba 232

Kružna ploča promjera 10 m zakrene se za 90° u 4 s. Kolika je obodna brzina tijela koje se nalazi na rubu ploče?

Rezultat: $1.96 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zadatak 233 (Mario, gimnazija)

Dva tijela jednakih masa gibaju se po kružnim stazama polumjera r_1 i r_2 jednakim kutnim brzinama. Koja je od navedenih veličina jednaka za ta dva tijela?

- A. centripetalna sila B. obodna brzina
C. centripetalno ubrzanje D. frekvencija

Rješenje 233

$$m_1 = m_2, \quad r_1, \quad r_2, \quad \omega_1 = \omega_2$$

Vrtanja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Kutna brzina ω i broj okretaja po sekundi ν (frekvencija) povezani su u formuli:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \nu_1 = 2 \cdot \pi \cdot \nu_2 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \nu_1 = 2 \cdot \pi \cdot \nu_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \nu_1 = \nu_2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 233

Dva tijela različitih masa gibaju se po kružnim stazama polumjera r_1 i r_2 jednakim kutnim brzinama. Koja je od navedenih veličina jednaka za ta dva tijela?

- A. centripetalna sila B. obodna brzina
C. centripetalno ubrzanje D. frekvencija

Rezultat: D.

Zadatak 234 (Helena, gimnazija)

Kotač zamašnjak motora obavi rad 392.4 J za vrijeme dok mu kutna brzina padne od 600 na 580 okretaja u minuti. Koliki je moment tromosti kotača?

Rješenje 234

$$W = 392.4 \text{ J}, \quad n_1 = 600, \quad n_2 = 580, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad I = ?$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Kutna brzina ω i broj okretaja po minuti n povezani su u formuli:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}.$$

Kinetička je energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω :

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment tromosti tijela.

Računamo kutne brzine pri n_1 i n_2 okretaja:

- prva kutna brzina

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 600}{60 \text{ s}} = 62.83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- druga kutna brzina

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_2}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 580}{60 \text{ s}} = 60.74 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Rad koji obavi kotač zamašnjak u vremenskom intervalu u kojem mu kutna brzina padne od ω_1 na ω_2 jednak je razlici energija rotacije pri tim kutnim brzinama.

$$\begin{aligned} W = E_{k1} - E_{k2} &\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) &= W \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) = W \cdot \frac{2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \Rightarrow I = \frac{2 \cdot W}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 392.4 \text{ J}}{\left(62.83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \left(60.74 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} = 3.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

Vježba 234

Kotač zamašnjak motora obavi rad 392.4 J za vrijeme dok mu kutna brzina padne od 300 na 290 okretaja u pola minute. Koliki je moment tromosti kotača?

Rezultat: 3.04 kg · m².

Zadatak 235 (Branko, srednja škola)

Kotač se giba jednoliko usporeno. Koliko okretaja načini tijekom jedne minute ako mu se frekvencija okretanja u tom razdoblju smanji od početne vrijednosti 5 Hz na vrijednost 3 Hz?

Rješenje 235

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad v_1 = 5 \text{ Hz}, \quad v_2 = 3 \text{ Hz}, \quad N = ?$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Kutna brzina ω i broj okretaja po sekundi v povezani su u formuli:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v.$$

Za opisani kut φ kod jednoliko usporene rotacije s početnom kutnom brzinom ω_0 i konačnom ω vrijedi formula

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot t.$$

Prijeđeni kut φ i ukupni broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot v_1 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot v_2 \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot t \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot v_1 + 2 \cdot \pi \cdot v_2) \cdot t \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \pi \cdot (v_1 + v_2) \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{(v_1 + v_2) \cdot t}{2} =$$

$$= \frac{\left(5 \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s}\right) \cdot 60 \text{ s}}{2} = 240.$$

Vježba 235

Kotač se giba jednoliko usporeno. Koliko okretaja načini tijekom jedne minute ako mu se frekvencija okretanja u tom razdoblju smanji od početne vrijednosti 6 Hz na vrijednost 2 Hz?

Rezultat: 240.

Zadatak 236 (Branko, srednja škola)

Gramofonska ploča okreće se 33 puta u minuti, a treba joj 20 s da se zaustavi nakon isključenja gramofona. Koliko okreta napravi ploča prije negoli se zaustavi? (Pretpostavite jednoliko usporeno gibanje)

Rješenje 236

$$n = 33, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad t_1 = 20 \text{ s}, \quad N = ?$$

Vrtnja (rotacija) je gibanje tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz tijelo ili leži izvan njega. Frekvencija je broj okretaja u sekundi, a računa se po formuli

$$v = \frac{n}{t},$$

gdje je n broj okretaja, t vrijeme.

Kutna brzina ω i broj okretaja po sekundi v povezani su u formuli:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t}.$$

Za opisani kut φ kod jednoliko usporene (ubrzane) rotacije s početnom kutnom brzinom ω_0 vrijedi

formula

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot t.$$

Prijeđeni kut φ i ukupni broj okretaja N povezani su formulom

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N.$$



$$\left. \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot t_1 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \\ \varphi = 2 \cdot \pi \cdot N \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 = 2 \cdot \pi \cdot N \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\pi \cdot n}{t} \cdot t_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{n \cdot t_1}{2 \cdot t} = \frac{33 \cdot 20 \text{ s}}{2 \cdot 60 \text{ s}} = 5.5.$$

Vježba 236

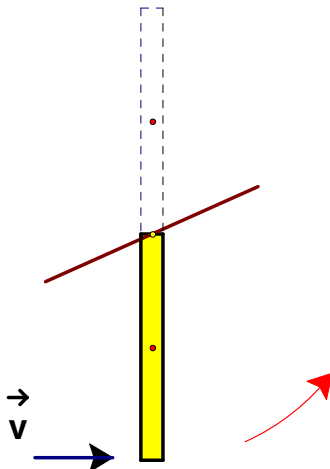
Gramofonska ploča okreće se 66 puta u minuti, a treba joj 10 s da se zaustavi nakon isključenja gramofona. Koliko okreta napravi ploča prije negoli se zaustavi? (Pretpostavite jednoliko usporeno gibanje)

Rezultat: 5.5.

Zadatak 237 (Mario, srednja škola)

Homogeni štاپ duljine 60 cm može rotirati oko horizontalne osi u vertikalnoj ravnini (crtež). Kolikom najmanjom brzinom treba gurnuti donji kraj štapa da bi on učinio puni okret oko osi?

Moment tromosti štapa mase m i duljine d s obzirom na os rotacije iznosi $I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot d^2$. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)



Rješenje 237

$$d = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}, \quad I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot d^2, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne v i kutne brzine ω neke čestice pri rotaciji vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega,$$

gdje je r polumjer kružne staze.

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je I moment ustrajnosti (tromosti) tijela.

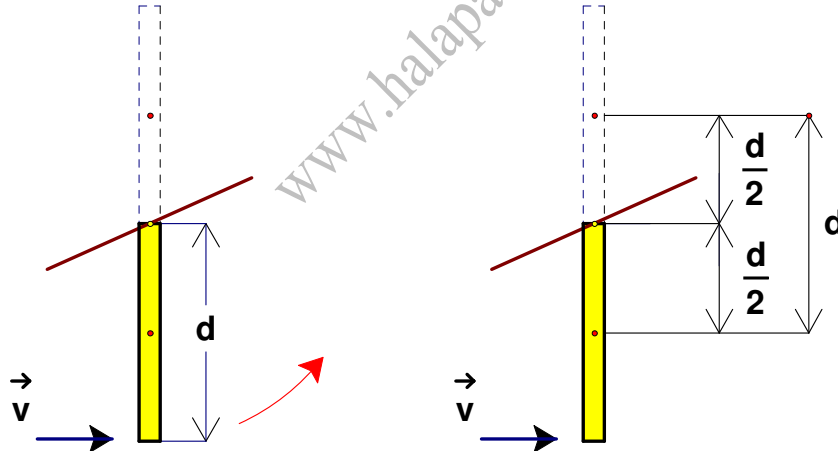
Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.



Središte mase homogenog štapa udaljeno je $\frac{d}{2}$ od osi rotacije pa kada on dođe iz najnižeg u najviši položaj središte mase podigne se za visinu d . Promjena gravitacijske potencijalne energije iznosi

$$\Delta E_{gp} = m \cdot g \cdot d.$$

Zbog zakona očuvanja energije kinetička energija rotacije E_k mora biti jednaka promjeni gravitacijske potencijalne energije ΔE_{gp} .

$$\begin{aligned} E_k = \Delta E_{gp} &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot d \Rightarrow \left[I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot d^2 \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot m \cdot d^2 \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot d \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot m \cdot (d \cdot \omega)^2 = m \cdot g \cdot d \Rightarrow [v = d \cdot \omega] \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot d \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot d \cdot \frac{6}{m} \Rightarrow v^2 = 6 \cdot g \cdot d \Rightarrow v^2 = 6 \cdot g \cdot d \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{6 \cdot g \cdot d} = \sqrt{6 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0.6 m} = 6 \frac{m}{s}.$$

Vježba 237

Homogeni štap duljine 6 dm može rotirati oko horizontalne osi u vertikalnoj ravnini (crtež). Kolikom najmanjom brzinom treba gurnuti donji kraj štapa da bi on učinio puni okret oko osi?

Moment tromosti štapa mase m i duljine d s obzirom na os rotacije iznosi $I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot d^2$. (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 6 m/s.

Zadatak 238 (Johnny, tehnička škola)

Od tanke žice načinjeno je tijelo mase 120 g u obliku jednakostraničnog trokuta sa stranicama duljine 60 cm. Trokut je oslonjen na oštar brid jednim kutom. Izračunajte moment tromosti oko vodoravne osi koja prolazi osloncem i okomita je na ravninu trokuta.

Rješenje 238

$$M = 120 \text{ g} = 0.12 \text{ kg}, \quad l = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}, \quad I = ?$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:

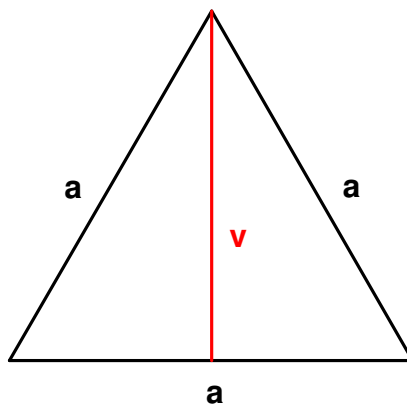
- 1) raznostraničan,
- 2) jednakokračan,
- 3) jednakostraničan.

Kod jednakostraničnog trokuta duljine sve tri stranice su jednake.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Visina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a računa se po formuli

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$



Moment tromosti materijalne točke mase m na udaljenosti r od osi rotacije:

$$I = m \cdot r^2.$$

Moment tromosti štapa duljine l s obzirom na os koja prolazi krajem štapa i okomita je na njegovu duljinu

$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2,$$

gdje je m masa štapa, l duljina štapa.

Moment tromosti štapa duljine l s obzirom na os koja prolazi njegovom sredinom i okomita je na njegovu duljinu

$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2,$$

gdje je m masa štapa, l duljina štapa.

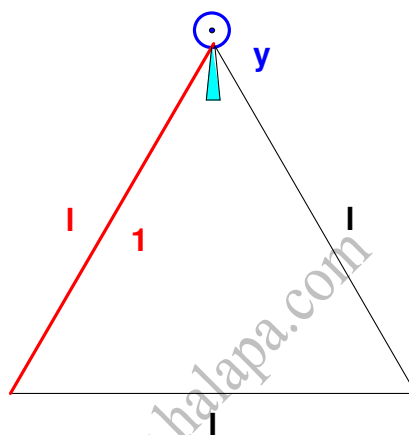
Steinerov teorem (teorem o usporednim osima)

Ako je I_0 moment tromosti u odnosu na os koja prolazi središtem mase tijela (težištem), tada je moment tromosti u odnosu na os usporednu toj osi, a udaljenu od nje za d :

$$I = I_0 + m \cdot d^2.$$

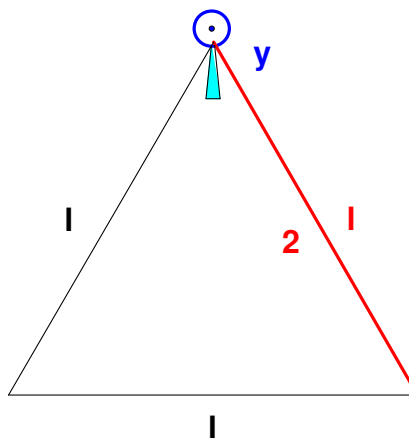
Trokut je jednakostraničan pa svaka stranica ima masu

$$m = \frac{1}{3} \cdot M = \frac{1}{3} \cdot 0.12 \text{ kg} = 0.04 \text{ kg}.$$



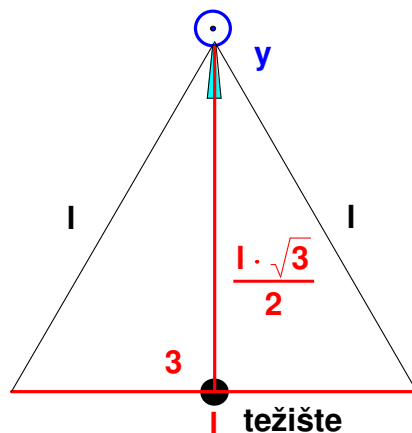
Moment tromosti stranice 1 oko osi y (izlazi okomito na ravninu slike) iznosi

$$I_1 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2.$$



Moment tromosti stranice 2 oko osi y (izlazi okomito na ravninu slike) iznosi

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2.$$



Moment tromosti stranice 3 oko osi y (izlazi okomito na ravninu slike) uz primjenu poučka o usporednim osima iznosi

$$I_3 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

Ukupni moment tromosti iznosi

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = \frac{2}{3} \cdot m \cdot l^2 + \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 + m \cdot \frac{3 \cdot l^2}{4} \Rightarrow I = m \cdot l^2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = m \cdot l^2 \cdot \frac{8+1+9}{12} \Rightarrow I = m \cdot l^2 \cdot \frac{18}{12} \Rightarrow I = m \cdot l^2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow I = \frac{3}{2} \cdot m \cdot l^2 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 0.04 \text{ kg} \cdot (0.6 \text{ m})^2 = 0.0216 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 21.6 \text{ g} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

Vježba 238

Od tanke žice načinjeno je tijelo mase 12 dag u obliku jednakostraničnog trokuta sa stranicama duljine 6 dm. Trokut je oslonjen na oštar brid jednim kutom. Izračunajte moment tromosti oko vodoravne osi koja prolazi osloncem i okomita je na ravninu trokuta.

Rezultat: $21.6 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.

Zadatak 239 (Tesla, tehnička škola)

Drvena greda mase 40 kg i duljine 2 m obješana je 45 cm daleko od jednoga svojeg kraja. Kolikom će silom drugi kraj pritiskati na našu ruku ako gredu držimo u horizontalnom položaju? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 239

$$m = 40 \text{ kg}, \quad l = 2 \text{ m}, \quad d = 45 \text{ cm} = 0.45 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

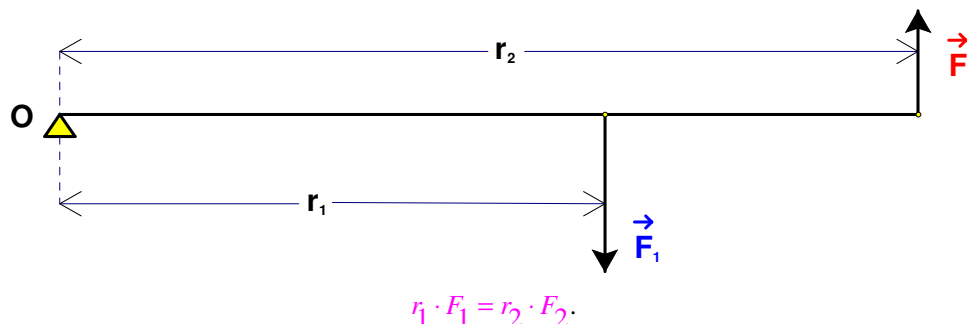
Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

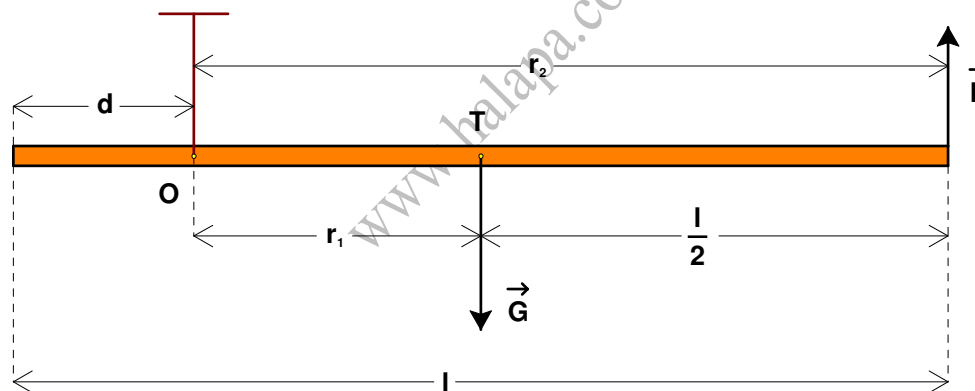
Težište tijela je točka sjecišta vertikala (težišnica) kroz dva ili više objesišta.

Algebarski zbroj momenata svih sila koje djeluju na tijelo mora biti jednak nuli. Pritom moment sile obično uzimamo pozitivnim ako sila (ili rezultanta sile) nastoji zakrenuti tijelo u smislu vrtnje kazaljke na satu, i obratno, ako sila nastoji (ili rezultanta sile) zakrenuti tijelo, obrnuto od kazaljke na satu, moment sile je negativan. **Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje ga zakreću u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.**

Za jednostranu polugu (slika) vrijedi:



Na gredu djeluju dvije sile: sila teža G s hvatištem u težištu T koje se nalazi na polovini duljine cijele grede i sila F kojom držimo gredu u horizontalnom položaju.



$$r_2 \cdot F = r_1 \cdot G \Rightarrow r_2 \cdot F = r_1 \cdot G \cdot \frac{1}{r_2} \Rightarrow F = \frac{r_1 \cdot G}{r_2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{l}{2} - d \\ r_2 = l - d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{\left(\frac{l}{2} - d\right) \cdot m \cdot g}{l - d} = \frac{\left(\frac{2 \text{ m}}{2} - 0.45 \text{ m}\right) \cdot 40 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ m} - 0.45 \text{ m}} = 141.94 \text{ N}.$$

Vježba 239

Drvena greda mase 40 kg i duljine 20 dm obješena je 4.5 dm daleko od jednoga svojeg kraja. Kolikom će silom drugi kraj pritiskati na našu ruku ako gredu držimo u horizontalnom položaju? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 141.94 N .

Zadatak 240 (Lucka, medicinska škola)

Polumjer Zemljine staze oko Sunca je 390 puta veći od polumjera Mjesečeve staze oko Zemlje. Mjesec obiđe Zemlju približno 13 puta u godini dana. Koliki je omjer brzine kruženja Zemlje oko Sunca (v_z) i brzine kruženja Mjeseca oko Zemlje (v_m)?

- A. $v_z : v_m = 1 : 13$ B. $v_z : v_m = 13 : 1$ C. $v_z : v_m = 1 : 30$ D. $v_z : v_m = 30 : 1$

Rješenje 240

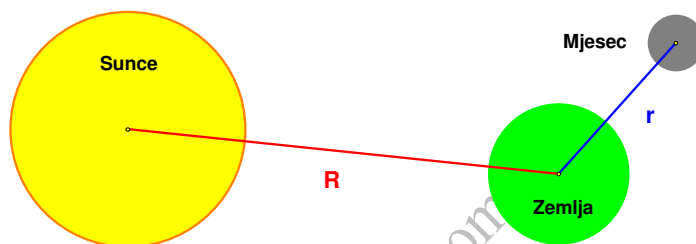
$R = 390 \cdot r$, R – polumjer Zemljine staze oko Sunca, r – polumjer Mjesečeve staze oko Zemlje, $T_z = 13 \cdot T_m$, T_z – perioda Zemlje, T_m – perioda Mjeseca, $v_z : v_m = ?$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda, okretaja.

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).



$$\left. \begin{aligned} v_z &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T_z} \\ v_m &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T_m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T_z}}{\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T_m}} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T_z}}{\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T_m}} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{R}{r} \cdot \frac{T_m}{T_z} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{R \cdot T_m}{r \cdot T_z} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390 \cdot r \cdot T_m}{r \cdot 13 \cdot T_m} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390 \cdot r \cdot T_m}{r \cdot 13 \cdot T_m} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390}{13} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390}{13} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{30}{1} \Rightarrow v_z : v_m = 30 : 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 240

Polumjer Zemljine staze oko Sunca je 390 puta veći od polumjera Mjesečeve staze oko Zemlje. Mjesec obiđe Zemlju približno 13 puta u godini dana. Koliki je omjer brzine kruženja Mjeseca oko Zemlje (v_m) i brzine kruženja Zemlje oko Sunca (v_z)?

- A. $v_m : v_z = 1 : 13$ B. $v_m : v_z = 13 : 1$ C. $v_m : v_z = 1 : 30$ D. $v_m : v_z = 30 : 1$

Rezultat: C.