Zadatak 261 (Mimi, gimnazija)

Uteg težak 3 N visi na jednom kraju elastične opruge i titra periodom 1.5 s. Kolika će biti perioda titranja utega od 12 N koji harmonički titra obješen na istoj opruzi?

Rješenje 261

$G_1 = 3$ N, $T_1 = 1.5$ s, $G_2 = 12$ N, $T_2 = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.
Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = m_1 \cdot g \\ G_2 = m_2 \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 \cdot g = G_1 \\ m_2 \cdot g = G_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 \cdot g = G_1 \quad / : g \\ m_2 \cdot g = G_2 \quad / : g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{G_1}{g} \\ m_2 = \dfrac{G_2}{g} \end{array}\right\}.$$

Sada računamo periodu T_2.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k}}}{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}}{\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{m_2}{k}}{\dfrac{m_1}{k}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{m_2}{\cancel{k}}}{\dfrac{m_1}{\cancel{k}}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{G_1}{g} \\ m_2 = \dfrac{G_2}{g} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{G_2}{g}}{\dfrac{G_1}{g}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\dfrac{G_2}{\cancel{g}}}{\dfrac{G_1}{\cancel{g}}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} \quad / \cdot T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} =$$

$$= 1.5 \ s \cdot \sqrt{\frac{12 \ N}{3 \ N}} = 3 \ s.$$

Vježba 261

Uteg težak 6 N visi na jednom kraju elastične opruge i titra periodom 1.5 s. Kolika će biti perioda titranja utega od 24 N koji harmonički titra obješen na istoj opruzi?

Rezultat: 3 s.

Zadatak 262 (Mimi, gimnazija)

Koliki put prevali u 1 sekundi čestica žice koja titra frekvencijom od 300 Hz, ako je amplituda titranja 0.5 mm?

Rješenje 262

t = 1 s, ν = 300 Hz, A = 0.5 mm = 0.05 cm, s = ?

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi).
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

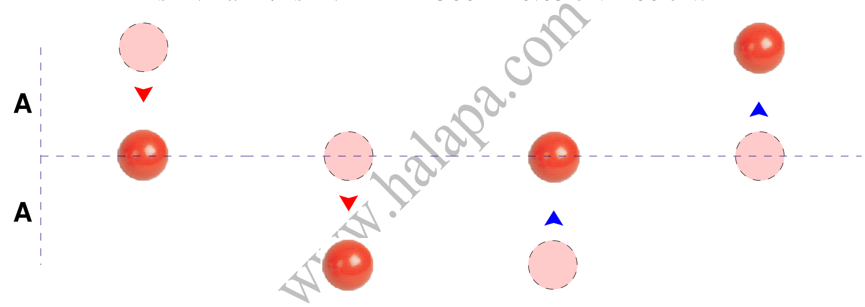
$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže.
Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova.
U jednom titraju čestica prijeđe put d koji je jednak

$$d = 4 \cdot A.$$

Budući da je čestica zatitrala 300 puta u jednoj sekundi, prevalila je put s koji iznosi:

$$s = \nu \cdot d \Rightarrow s = \nu \cdot 4 \cdot A = 300 \cdot 4 \cdot 0.05\ cm = 60\ cm.$$



Vježba 262

Koliki put prevali u 1 sekundi čestica žice koja titra frekvencijom od 600 Hz, ako je amplituda titranja 0.25 mm?

Rezultat: 60 cm.

Zadatak 263 (Iva, gimnazija)

Na oprugu konstante opiranja 10 N / m koja slobodno visi, objesimo uteg mase 0.1 kg. Kolika će biti najveća brzina utega? (ubrzanje slobodnog pada g = 10 m / s^2)

Rješenje 263

k = 10 N / m, m = 0.1 kg, g = 10 m / s^2, v = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak

minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge. Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova.
Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Maksimalna brzina pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računa se pomoću izraza:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{T},$$

gdje je A amplituda, T perioda.
Težina tijela je elastična sila koja djeluje na oprugu.

$$F = G \Rightarrow k \cdot x = m \cdot g \Rightarrow k \cdot x = m \cdot g \; / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} - \text{amplituda}.$$

Maksimalna brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{T} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{m \cdot g}{k} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{bmatrix} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{m \cdot g}{k}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{m \cdot g}{k}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{\frac{m \cdot g}{k}}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow v = \frac{m \cdot g}{k \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow v = \frac{m \cdot g}{\sqrt{k^2 \cdot \frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{m \cdot g}{\sqrt{k^2 \cdot \frac{m}{k}}} \Rightarrow v = \frac{m \cdot g}{\sqrt{k \cdot m}} =$$

$$= \frac{0.1\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2}}{\sqrt{10\,\frac{N}{m} \cdot 0.1\,kg}} = 1\,\frac{m}{s}.$$

Vježba 263

Na oprugu konstante opiranja 10 N / m koja slobodno visi, objesimo uteg mase 100 g. Kolika će biti najveća brzina utega? (ubrzanje slobodnog pada g = 10 m / s^2)

Rezultat: 1 m / s.

Zadatak 264 (Iva, gimnazija)

Perioda titranja matematičkog njihala je 3.6 s. Odredite vrijeme potrebno da se njihalo od ravnotežnog položaja udalji za pola amplitude.

Rješenje 264

T = 3.6 s, $x = \frac{1}{2} \cdot A$, t = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja.

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) \Rightarrow A\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) = x \Rightarrow A\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}\cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}\cdot A \;/\cdot\frac{1}{A} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t = \frac{\pi}{6} \;/\cdot\frac{T}{2\cdot\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{T}{12} = \frac{3.6\ s}{12} = 0.3\ s.$$

Vježba 264

Na oprugu konstante opiranja 10 N / m koja slobodno visi, objesimo uteg mase 100 g. Kolika će biti najveća brzina utega? (ubrzanje slobodnog pada g = 10 m / s^2)

Rezultat: 0.3 s.

Zadatak 265 (Goran, gimnazija)

Sat sa njihalom radi točno na Zemlji. Koliko bi kasnio tijekom 24 sata da se nalazi na Mjesecu? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji g_1 = 9.81 m / s^2, ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu g_2 = 1.65 m / s^2)

Rješenje 265

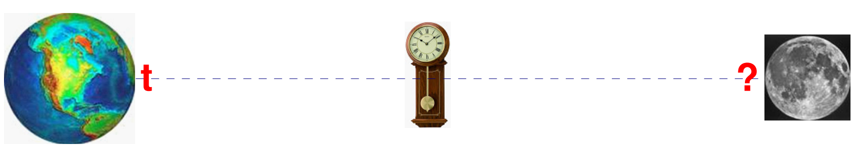
t = 24 h, g_1 = 9.81 m / s^2, g_2 = 1.65 m / s^2, Δt = ?

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$, $81\ \% = \frac{81}{100}$, $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$, $p\ \% = \frac{p}{100}$.



Perioda sata iznosi:

- na Zemlji

$$T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

- na Mjesecu

$$T_2 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_2}}.$$

Relativna pogreška sata jednaka je:

$$r = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow r = \frac{T_1}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow r = \frac{T_1}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow r = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 1 - \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_2}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow r = 1 - \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_2}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow r = 1 - \frac{\sqrt{\frac{l}{g_2}}}{\sqrt{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow r = 1 - \sqrt{\frac{\frac{l}{g_2}}{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 1 - \sqrt{\frac{\frac{l}{g_2}}{\frac{l}{g_1}}} \Rightarrow r = 1 - \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = 1 - \sqrt{\frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{1.65 \frac{m}{s^2}}} = -1.44 = -\frac{144}{100} = -144\%.$$

Uočimo ako je perioda njihala sata na Zemlji $T_1 = 1$ s na Mjesecu ona iznosi:

$$T_2 = 1\ s + 1.44\ s = 2.44\ s.$$

Sat na Mjesecu poslije 24 h pokazivat će vrijeme

$$t_1 = \frac{t}{2.44} = \frac{24}{2.44}\ h = 9.8\ h.$$

Njegova je pogreška

$$\Delta t = t - t_1 = 24\ h - 9.8\ h = 14.2\ h.$$

Vježba 265

Sat sa njihalom radi točno na Zemlji. Koliko bi kasnio tijekom jednog dana da se nalazi na Mjesecu? (ubrzanje slobodnog pada na Zemlji $g_1 = 9.81$ m / s^2, ubrzanje slobodnog pada na Mjesecu $g_2 = 1.65$ m / s^2)

Rezultat: 14.2 h.

Zadatak 266 (Niksy, gimnazija)

Uteg mase 0.2 kg ovješen o vertikalno postavljenu oprugu zanemarive mase, harmonički titra frekvencijom 2 Hz. Titranje se izvodi u razmaku od 0.2 m do 0.25 m od ovjesišta. Odredi duljinu neopterećene opruge i maksimalnu kinetičku energiju ovješenog utega.

Rješenje 266

m = 0.2 kg, ν = 2 Hz, $l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.25$ m, l = ?, E_k = ?

Frekvencija ν je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi).
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže.
Amplituda je maksimalan pomak, najveći otklon iz ravnotežnoga položaja čestice pri titranju ili čestice medija pri širenju valova. Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.
Maksimalna brzina pri harmoničkom titranju koje počinje iz položaja ravnoteže računa se pomoću izraza:

$$v_o = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu,$$

gdje je A amplituda, ν frekvencija.
Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

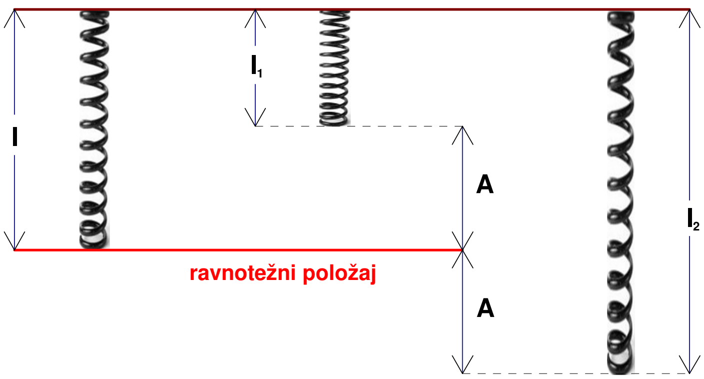
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Duljina neopterećene opruge je:

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{0.2\ m + 0.25\ m}{2} = 0.225\ m.$$

Računamo amplitudu A kada uteg harmonički titra na opruzi (na tri načina):

- $A = l - l_1 = 0.225\ m - 0.2\ m = 0.025\ m$
- $A = l_2 - l = 0.25\ m - 0.225\ m = 0.025\ m$
- $A = \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{0.25\ m - 0.2\ m}{2} = 0.025\ m.$



Maksimalna kinetička energiju ovješenog utega iznosi:

$$\left.\begin{aligned} v &= 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \pi \cdot A \cdot \nu)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.2\ kg \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot 0.025\ m \cdot 2\ \frac{1}{s}\right)^2 =$$

$$= 9.87 \cdot 10^{-3}\ J = 9.87\ mJ.$$

Vježba 266

Uteg mase 20 dag ovješen o vertikalno postavljenu oprugu zanemarive mase, harmonički titra frekvencijom 2 Hz. Titranje se izvodi u razmaku od 2 dm do 2.5 dm od ovjesišta. Odredi duljinu neopterećene opruge i maksimalnu kinetičku energiju ovješenog utega.

Rezultat: 0.225 m, 9.87 mJ.

Zadatak 267 (Dodo, gimnazija)

Njihalo duljine l_1 ima periodu 1.753 s, a produženo za 84 cm ima periodu 2.54 s. Odredite ubrzanje sile teže.

Rješenje 267

l_1, $T_1 = 1.753$ s, $\Delta l = 84$ cm $= 0.84$ m, $T_2 = 2.54$ s, $g = ?$

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \\ T_2 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{T_1}{2 \cdot \pi} &= \sqrt{\frac{l_1}{g}} \\ \frac{T_2}{2 \cdot \pi} &= \sqrt{\frac{l_2}{g}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{T_1}{2\cdot\pi} &= \sqrt{\frac{l_1}{g}} \;/^2 \\ \frac{T_2}{2\cdot\pi} &= \sqrt{\frac{l_2}{g}} \;/^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \left(\frac{T_1}{2\cdot\pi}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{l_1}{g}}\right)^2 \\ \left(\frac{T_2}{2\cdot\pi}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{l_2}{g}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \left(\frac{T_1}{2\cdot\pi}\right)^2 &= \frac{l_1}{g} \\ \left(\frac{T_2}{2\cdot\pi}\right)^2 &= \frac{l_2}{g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{l_1}{g} &= \left(\frac{T_1}{2\cdot\pi}\right)^2 \\ \frac{l_2}{g} &= \left(\frac{T_2}{2\cdot\pi}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{l_1}{g} &= \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2} \\ \frac{l_2}{g} &= \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{l_1}{g} &= \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2} \;/\cdot g \\ \frac{l_2}{g} &= \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2} \;/\cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2}\cdot g \\ l_2 &= \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2}\cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\Delta l = l_2 - l_1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{T_2^2}{4\cdot\pi^2}\cdot g - \frac{T_1^2}{4\cdot\pi^2}\cdot g \Rightarrow \Delta l = \frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(T_2^2 - T_1^2\right) \Rightarrow \frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(T_2^2 - T_1^2\right) = \Delta l \;/\cdot\frac{4\cdot\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \Rightarrow g = \frac{4\cdot\pi^2\cdot\Delta l}{T_2^2 - T_1^2} =$$

$$= \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0.84\ m}{(2.54\ s)^2 - (1.753\ s)^2} = 9.815\ \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 267

Njihalo duljine l_1 ima periodu 1.753 s, a produženo za 840 mm ima periodu 2.54 s. Odredite ubrzanje sile teže.

Rezultat: 9.815 m / s^2.

Zadatak 268 (Dodo, gimnazija)

Sat s matematičkim njihalom zaostaje 3 minute na dan. Što treba učiniti s njihalom da bi sat išao točno?

Rješenje 268

t = 3 min = [3 · 60] = 180 s, , T = 1 s perioda točnog sata, l – duljina njihala točnog sata, l_1 – duljina njihala sata koji zaostaje

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.

Periode titranja točnog i sporog sata dane su formulama:

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \\ T_1 &= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{l_1}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{l_1}{l}} \; / \; ^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{l_1}{l}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \frac{l_1}{l} \Rightarrow \frac{l_1}{l} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2.$$

Perioda titranja točnog sata iznosi 1 s.

$$T = 1 \; s.$$

Perioda titranja sporog sata je veća od T.
Tijekom jednog dana (24 h):

- točan sat učini

$$86\,400 \text{ titraja}$$
$$\left(24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400\right)$$

- spori sat zaostaje t sekundi pa učini

$$86\,400 - t \text{ titraja.}$$

Zato je perioda titranja sporog sata jednaka

$$T_1 = \frac{86\,400}{86\,400 - t} = \frac{86\,400}{86\,400 - 180} = 1.002088 \; s.$$

Sada je:

$$\frac{l_1}{l} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l} = \left(\frac{1.002088 \; s}{1 \; s}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l} = 1.00418 \Rightarrow \frac{l_1}{l} = 1.00418 \; / \cdot l \Rightarrow l_1 = 1.00418 \cdot l.$$

Njihalo duljine l_1 treba skratiti na duljinu l da bi sat išao točno.

Vježba 268

Sat s matematičkim njihalom zaostaje 180 sekundi na dan. Što treba učiniti s njihalom da bi sat išao točno?

Rezultat: Skratiti ga.

Zadatak 269 (Dodo, gimnazija)

Sat s matematičkim njihalom brza 3 minute na dan. Što treba učiniti s njihalom da bi sat išao točno?

Rješenje 269

t = 3 min = [3 · 60] = 180 s, , T = 1 s perioda točnog sata, l – duljina njihala točnog sata, l_1 – duljina njihala sata koji brza

Perioda T je vrijeme jednog ophoda (titraja).

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastezljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmonijske titraje. Perioda titranja matematičkog njihala jest

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Periode titranja točnog sata i brzog sata dane su formulama:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{l_1}{l}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{l_1}{l}} \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{l_1}{l}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \frac{l_1}{l} \Rightarrow \frac{l_1}{l} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2.$$

Perioda titranja točnog sata iznosi 1 s.

$$T = 1 \; s.$$

Perioda titranja brzog sata je manja od T.
Tijekom jednog dana (24 h):

- točan sat učini

$$86\,400 \text{ titraja}$$
$$(24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400)$$

- brzi sat ide naprijed t sekundi pa učini

$$86\,400 + t \text{ titraja.}$$

Zato je perioda titranja brzog sata jednaka

$$T_1 = \frac{86\,400}{86\,400 + t} = \frac{86\,400}{86\,400 + 180} = 0.99792 \; s.$$

Sada je:

$$\frac{l_1}{l} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l} = \left(\frac{0.99792 \; s}{1 \; s}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_1}{l} = 0.99584 \Rightarrow \frac{l_1}{l} = 0.99584 \; / \cdot l \Rightarrow l_1 = 0.99584 \cdot l.$$

Njihalo duljine l_1 treba produžiti na duljinu l da bi sat išao točno.

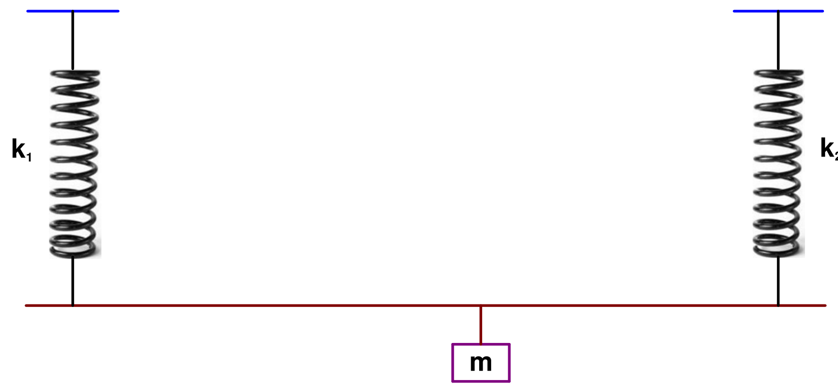
Vježba 269

Sat s matematičkim njihalom brza 180 sekundi na dan. Što treba učiniti s njihalom da bi sat išao točno?

Rezultat: Produžiti ga.

Zadatak 270 (Ivan, gimnazija)

Štap, zanemarive mase, visi na dvije opruge jednakih duljina (slika). Konstanta prve opruge je 20 N / cm, a druge 30 N / cm. Na kojem mjestu na štapu moramo objesiti uteg da štap ostane u vodoravnom položaju?



Rješenje 270

$k_1 = 20 \text{ N / cm} = 2000 \text{ N / m}, \qquad k_2 = 30 \text{ N / cm} = 3000 \text{ N / m}, \qquad x = ?$

Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.

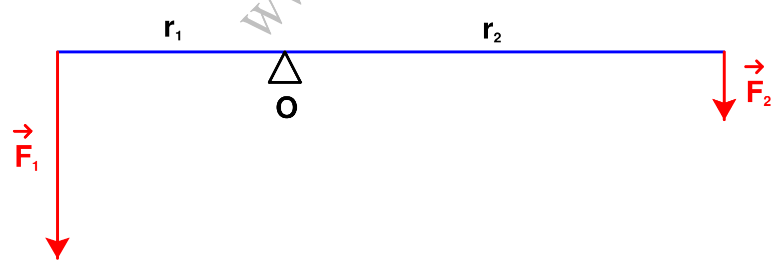
Moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti r pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Težište tijela je točka sjecišta vertikala (težišnica) kroz dva ili više objesišta.

Algebarski zbroj momenata svih sila koje djeluju na tijelo mora biti jednak nuli. Pritom moment sile obično uzimamo pozitivnim ako sila (ili rezultanta sila) nastoji zakrenuti tijelo u smislu vrtnje kazaljke na satu, i obratno, ako sila nastoji (ili rezultanta sila) zakrenuti tijelo, obrnuto od kazaljke na satu, moment sile je negativan. Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj momenata sila koje ga zakreću u jednom smjeru jednak zbroju momenata sila koje ga zakreću u suprotnom smjeru.

Za dvostranu polugu (slika) vrijedi:



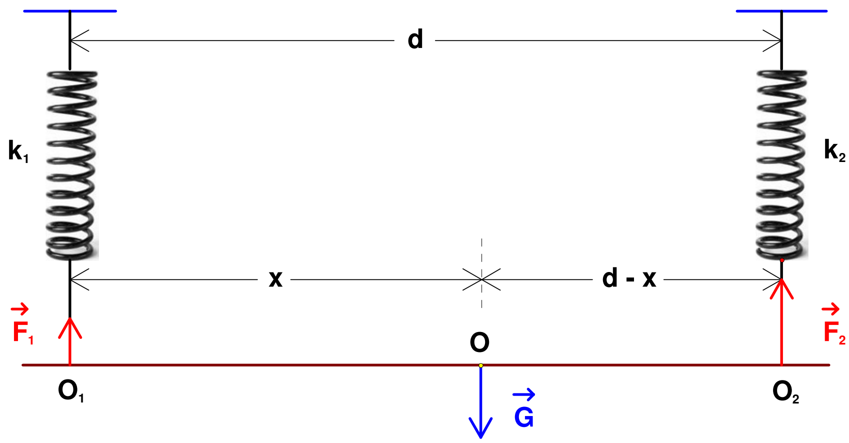
$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2.$$

Neka je d duljina štapa. Objesimo li uteg na nj, opruge će se produljiti za

$$\Delta l_1 \text{ i } \Delta l_2.$$

Budući da štap mora ostati u vodoravnom položaju, opruge će se jednako produljiti,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l.$$



Štap je u ravnoteži jer su momenti elastičnih sila F_1 i F_2 u odnosu na točku oslonca O jednaki

$$x \cdot F_1 = (d - x) \cdot F_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 = k_1 \cdot \Delta l \\ F_2 = k_2 \cdot \Delta l \end{bmatrix} \Rightarrow x \cdot k_1 \cdot \Delta l = (d - x) \cdot k_2 \cdot \Delta l \Rightarrow$$

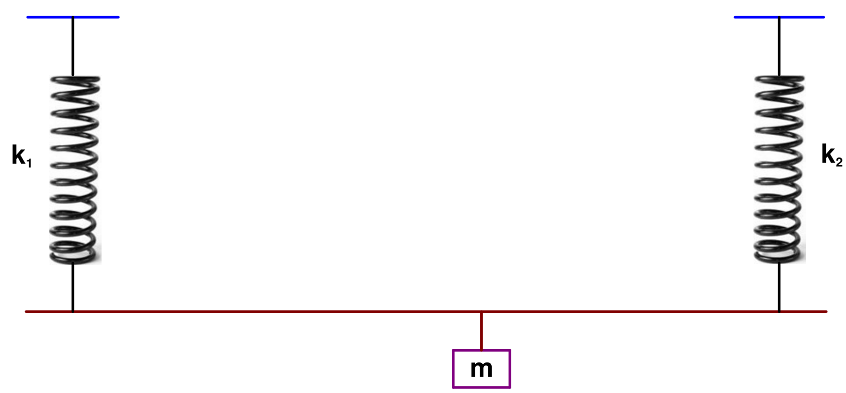
$$\Rightarrow x \cdot k_1 \cdot \Delta l = (d - x) \cdot k_2 \cdot \Delta l \; / \cdot \frac{1}{\Delta l} \Rightarrow x \cdot k_1 = (d - x) \cdot k_2 \Rightarrow x \cdot k_1 = d \cdot k_2 - x \cdot k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot k_1 + x \cdot k_2 = d \cdot k_2 \Rightarrow x \cdot (k_1 + k_2) = d \cdot k_2 \Rightarrow x \cdot (k_1 + k_2) = d \cdot k_2 \; / \cdot \frac{1}{k_1 + k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{d \cdot k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow x = \frac{d \cdot 3000 \frac{N}{m}}{2000 \frac{N}{m} + 3000 \frac{N}{m}} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \cdot d.$$

Vježba 270

Štap, zanemarive mase, visi na dvije opruge jednakih duljina (slika). Konstanta prve opruge je 200 N / dm, a druge 300 N / dm. Na kojem mjestu na štapu moramo objesiti uteg da štap ostane u vodoravnom položaju?



Rezultat: $x = \frac{3}{5} \cdot d.$

Zadatak 271 (Ivona, gimnazija)

Izračunaj valne duljine prvih triju mogućih stojnih valova na žici duljine 1.5 m i skiciraj ih, ako je žica učvršćena na oba kraja.

Rješenje 271

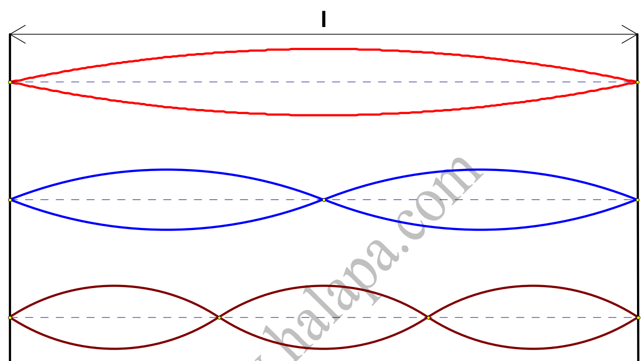
$l = 1.5$ m, $\lambda_1 = ?$, $\lambda_2 = ?$, $\lambda_3 = ?$

Valna duljina λ je najmanja udaljenost između dviju čestica koje titraju istom fazom. Ako je žica (uže) duljine l učvršćena na oba kraja interferencijom upadnog vala čiji je izvor u ishodištu i reflektiranog vala od drugog učvršćenog kraja, nastat će stojni val. Žica je na krajevima učvršćena i to su čvorovi stojnog vala. Tada su moguće samo određene valne duljine, tzv. diskretne valne duljine i za duljinu žice l iznose:

$$\lambda_m = \frac{2 \cdot l}{m}, \; m = 1, \; 2, \; 3, \; ...$$

Tražene valne duljine su:

- $\lambda_m = \frac{2 \cdot l}{m} \Rightarrow \left[m = 1 \right] \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2 \cdot l}{1} = \frac{2 \cdot 1.5 \; m}{1} = 3 \; m$
- $\lambda_m = \frac{2 \cdot l}{m} \Rightarrow \left[m = 2 \right] \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2 \cdot l}{2} = \frac{2 \cdot 1.5 \; m}{2} = 1.5 \; m$
- $\lambda_m = \frac{2 \cdot l}{m} \Rightarrow \left[m = 3 \right] \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2 \cdot l}{3} = \frac{2 \cdot 1.5 \; m}{3} = 1 \; m.$



Vježba 271

Izračunaj valne duljine prvih triju mogućih stojnih valova na žici duljine 3 m, ako je žica učvršćena na oba kraja.

Rezultat: 6 m, 3 m, 2 m.

Zadatak 272 (Ivona, gimnazija)

Brodski ultrazvučni radar ima frekvenciju 35 kHz. Gibajući se prema obali na brodu se registriraju reflektirani valovi od obale frekvencijom 36.55 kHz. Kolika je brzina broda, ako je brzina zvuka 340 m / s?

Rješenje 272

$\nu = 35$ kHz $= 3.5 \cdot 10^4$ Hz, $\nu' = 36.55$ kHz $= 3.655 \cdot 10^4$ Hz, $v_z = 340$ m / s, $v = ?$

Ako se neki izvor valova i opažač međusobno približavaju, čini se da se frekvencija izvora povećava, odnosno smanjuje kad se izvor i opažač međusobno udaljavaju. To je Dopplerov učinak. Neka je ν prava frekvencija izvora, ν' frekvencija koju prima uho, v_z brzina zvuka, v brzina tijela koje se giba. Ako se izvor zvuka giba u odnosu prema mirnom opažaču tada frekvencija iznosi:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1}{1 \mp \frac{v}{v_z}},$$

gdje negativni i pozitivni predznak odgovaraju približavanju odnosno udaljavanju od opažača. Budući da se brod približava obali, njegova brzina iznosi:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{v_z}} \Rightarrow \nu' = \nu \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{v_z}} \; / \cdot \left(1 - \frac{v}{v_z}\right) \Rightarrow \nu' \cdot \left(1 - \frac{v}{v_z}\right) = \nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu' \cdot \left(1 - \frac{v}{v_z}\right) = \nu \; / \cdot \frac{1}{\nu'} \Rightarrow 1 - \frac{v}{v_z} = \frac{\nu}{\nu'} \Rightarrow -\frac{v}{v_z} = \frac{\nu}{\nu'} - 1 \Rightarrow -\frac{v}{v_z} = \frac{\nu}{\nu'} - 1 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_z} = 1 - \frac{\nu}{\nu'} \Rightarrow \frac{v}{v_z} = 1 - \frac{\nu}{\nu'} \; / \cdot v_z \Rightarrow v = v_z \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right) =$$

$$= 340 \, \frac{m}{s} \cdot \left(1 - \frac{3.5 \cdot 10^4 \; Hz}{3.655 \cdot 10^4 \; Hz}\right) = 14.42 \, \frac{m}{s} = [14.42 \cdot 3.6] = 51.91 \, \frac{km}{h}.$$

Vježba 272

Brodski ultrazvučni radar ima frekvenciju 70 kHz. Gibajući se prema obali na brodu se registriraju reflektirani valovi od obale frekvencijom 73.10 kHz. Kolika je brzina broda, ako je brzina zvuka 340 m / s?

Rezultat: 51.91 km / h.

Zadatak 273 (Ivona, gimnazija)

Izvor vala titra prema jednadžbi y = 2 m · sin (π · t). Sve su veličine iskazane u SI sustavu. Val se širi duž homogenog sredstva u pozitivnom smjeru x osi stalnom brzinom od 100 m / s. Kolika je perioda titranja izvora vala? Kolika je valna duljina? Napiši jednadžbu vala. Nacrtaj graf vala u trenutku t = 2 s nakon početka titranja izvora.

Rješenje 273

y = 2 m · sin (π · t), v = 100 m / s, t = 2 s, T = ?, λ = ?, y = ?

Pri širenju neprigušenih harmoničkih titraja brzinom v u smjeru pozitivne osi x elongacija y točke koja je udaljena za x od izvora titranja jednaka je

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

gdje je A amplituda, T perioda, t vrijeme titranja, λ valna duljina. Elongacija je udaljenost čestice koja titra od ravnotežnog položaja. Amplituda je maksimalna elongacija. Valna duljina λ je udaljenost koju prijeđe val dok čestica u izvoru napravi jedan potpuni titraj i i ona je povezana s brzinom vala relacijom

$$\lambda = v \cdot T.$$

Jednadžba izvora vala (x = 0) glasi:

$$y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T}\right).$$

Preoblikujemo jednadžbu izvora vala.

$$y = 2 \; m \cdot \sin(\pi \cdot t) \Rightarrow y = 2 \; m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2}\right).$$

Uspoređujući zadani val s općim oblikom dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T}\right) \\ y = 2 \; m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T}\right) \\ y = 2 \; m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 2 \; m \; - \; \text{amplituda} \\ T = 2 \; s \; - \; \text{perioda} \end{array}\right\}.$$

Iz formule za brzinu vala izračunamo valnu duljinu λ.

$$\lambda = v \cdot T = 100 \frac{m}{s} \cdot 2 \ s = 200 \ m.$$

Jednadžba vala glasi:

$$\left. \begin{array}{l} y = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ A = 2 \ m \ , \ T = 2 \ s \ , \ \lambda = 200 \ m \end{array} \right\} \Rightarrow \ y = 2 \ m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2 \ s} - \frac{x}{200 \ m} \right).$$

Val se širi slijeva udesno u smjeru pozitivne osi x. Crtamo sliku vala

$$y = 2 \ m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2 \ s} - \frac{x}{200 \ m} \right)$$

u času t = 2 s.

Sastavimo tablicu vrijednosti elongacije y u ovisnosti o udaljenosti x čestice koja titra od izvora titranja, sve uz konstantno vrijeme, t = 2 s.

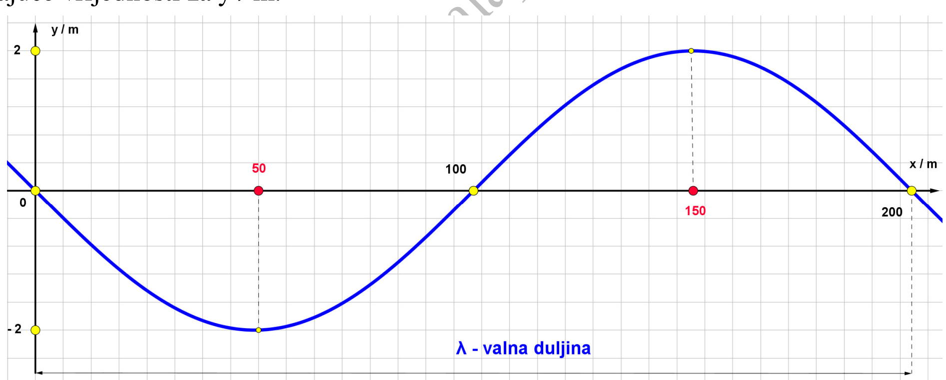
$$y = 2 \ m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2 \ s} - \frac{x}{200 \ m} \right) \Rightarrow \ y = 2 \ m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 \ s}{2 \ s} - \frac{x}{200 \ m} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y = 2 \ m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 \ s}{2 \ s} - \frac{x}{200 \ m} \right) \Rightarrow \ y = 2 \ m \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{x}{200 \ m} \right).$$

Valna duljina vala je 200 m pa ćemo za x uzeti, na primjer, vrijednosti:

x / m	0	20	40	50	60	80	100	120	140	150	160	180	200
y / m	0	– 1.18	– 1.90	– 2	– 1.90	– 1.18	0	1.18	1.90	2	1.90	1.18	0

Zatim nacrtamo koordinatni sustav; na os apscisa nanosimo vrijednosti x / m, a na os ordinata odgovarajuće vrijednosti za y / m.



Vježba 273

Izvor vala titra prema jednadžbi y = 1 m · sin (π · t). Sve su veličine iskazane u SI sustavu. Kolika je perioda titranja izvora vala?

Rezultat: 2 s.

Zadatak 274 (Julica, medicinska škola)

Koje je vrijeme potrebno točki koja harmonički titra da iz položaja ravnoteže dođe u elongaciju jednaku polovini amplitude? Vrijeme jednog titraja iznosi 24 s.

Rješenje 274

$x = \frac{1}{2} \cdot A,$ T = 24 s, t = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja.

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \cdot A \\ T = 24\ s \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot A = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{24\ s} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot A = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{24\ s} \cdot t\right) \ /: A \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{24\ s} \cdot t\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{24\ s} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{12\ s} \cdot t\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12\ s} \cdot t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{12\ s} \cdot t = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12\ s} \cdot t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{12\ s} \cdot t = \frac{\pi}{6} \ / \cdot \frac{12\ s}{\pi} \Rightarrow t = 2\ s.$$

Vježba 274

Koje je vrijeme potrebno točki koja harmonički titra da iz položaja ravnoteže dođe u elongaciju jednaku polovini amplitude? Vrijeme jednog titraja iznosi 12 s.

Rezultat: 1 s.

Zadatak 275 (Julica, medicinska škola)

Materijalna točka titra harmonički prema jednadžbi $x = 3\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right)$. Za koje će vrijeme ta točka prijeći put od položaja ravnoteže do maksimalne elongacije ako je t izraženo u sekundama?

Rješenje 275

$x = 3\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right)$, A = 3 cm, x = A, t = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Pomak (elongacija ili udaljenost x od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra) računa se pomoću izraza:

$$x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), T perioda (vrijeme jednog titraja), t vrijeme titranja.

1.inačica

$$x = 3\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 3\ cm \\ x = A \end{array}\right] \Rightarrow 3\ cm = 3\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\ cm = 3\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right) \ /: 3\ cm \Rightarrow 1 = \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right) = 1 \Rightarrow 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = \sin^{-1}(1) \Rightarrow 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{2} \ / \cdot \frac{1}{0.5\ s^{-1} \cdot \pi} \Rightarrow t = 1\ s.$$

2.inačica

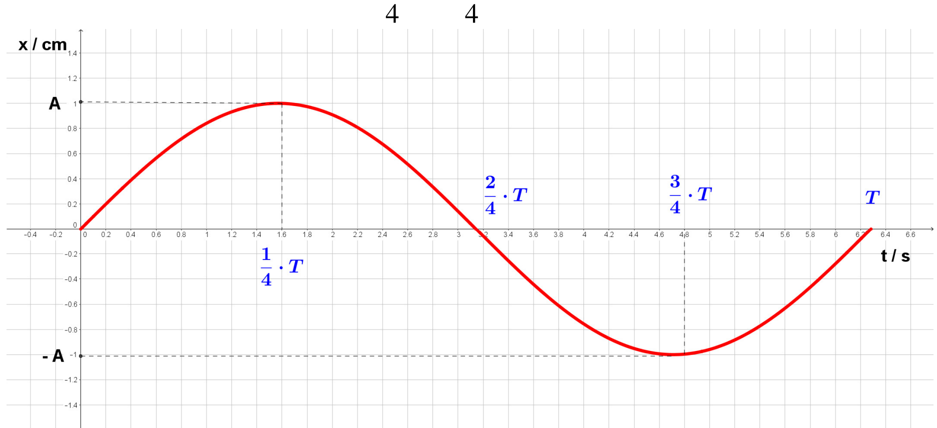
Preoblikujemo zadanu jednadžbu harmoničkog titranja.

$$x = 3\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right) \Rightarrow x = 3\ cm \cdot \sin\left(\frac{0.5 \cdot \pi}{1\ s} \cdot t\right) \Rightarrow x = 3\ cm \cdot \sin\left(\frac{0.5 \cdot \pi \cdot 4}{1\ s \cdot 4} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3\ cm \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{4\ s} \cdot t\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \\ x = 3\ cm \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{4\ s} \cdot t\right) \end{array}\right] \Rightarrow T = 4\ s.$$

Vrijeme jednog titraja je T = 4 s. Za četvrtinu toga vremena točka će prijeći put od položaja ravnoteže do maksimalne elongacije.

$$t = \frac{1}{4} \cdot T = \frac{1}{4} \cdot 4\ s = 1\ s.$$



Vježba 275

Materijalna točka titra harmonički prema jednadžbi $x = 5\ cm \cdot \sin\left(0.5\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t\right)$. Za koje će vrijeme ta točka prijeći put od položaja ravnoteže do maksimalne elongacije ako je t izraženo u sekundama?

Rezultat: 1 s.

Zadatak 276 (MaturantiXYZ, gimnazija)

Koliko je vrijeme titraja čestice koja ima akceleraciju 1.2 m / s^2 u času kad je njezina udaljenost od položaja ravnoteže 0.06 m?

Rješenje 276

a = 1.2 m / s^2, x = 0.06 m, T = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Akceleracija tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$a = -\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot x,$$

gdje je x pomak (elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže tijela koje harmonički titra). Negativan predznak pokazuje da su elongacija x i akceleracija a suprotnog smjera. Znak minus u tom izrazu možemo izostaviti jer nas zanima samo veličina akceleracije, a ne njezin smjer.

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot x.$$

$$a=\frac{4\cdot\pi^2}{T^2}\cdot x \Rightarrow a=\frac{4\cdot\pi^2}{T^2}\cdot x \,/\cdot\frac{T^2}{a} \Rightarrow T^2=\frac{4\cdot\pi^2}{a}\cdot x \Rightarrow T^2=\frac{4\cdot\pi^2}{a}\cdot x \,/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{a}\cdot x} \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{x}{a}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{0.06\ m}{1.2\ \frac{m}{s^2}}}=1.40\ s.$$

Vježba 276

Koliko je vrijeme titraja čestice koja ima akceleraciju 1.2 m / s^2 u času kad je njezina udaljenost od položaja ravnoteže 6 cm?

Rezultat: 1.40 s.

Zadatak 277 (MaturantiXYZ, gimnazija)

Koji dio vremena jednog titraja mora proći da točka koja harmonički titra postigne brzinu koja će veličinom biti jednaka polovini najveće brzine? Početni fazni kut jednak je nuli.

Rješenje 277

$v=\frac{1}{2}\cdot v_o$, $\varphi = 0$, t = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji. Brzina tijela koje harmonički titra (kad je početni fazni kut jednak nuli) mijenja se s vremenom

$$v=v_o\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right),$$

gdje v_0 maksimalna brzina dana izrazom

$$v_o=\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot A.$$

Veličina A je amplituda (maksimalna elongacija, maksimalna udaljenost od položaja ravnoteže).

$$v=v_o\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) \Rightarrow \left[v=\frac{1}{2}\cdot v_o\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot v_o=v_o\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot v_o=v_o\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) \,/:v_o \Rightarrow \frac{1}{2}=\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t=\frac{\pi}{3} \,/\cdot\frac{T}{2\cdot\pi} \Rightarrow t=\frac{T}{6}.$$

Vježba 277

Koji dio vremena jednog titraja mora proći da točka koja harmonički titra postigne brzinu koja će veličinom biti jednaka 0.5 najveće brzine? Početni fazni kut jednak je nuli.

Rezultat: T / 6.

Zadatak 278 (MaturantiXYZ, gimnazija)

Nađi najveću brzinu i najveću akceleraciju točke koja harmonički titra s amplitudom od 4 cm. Vrijeme jednog titraja je 2 sekunde.

Rješenje 278

A= 4 cm = 0.04 m, T = 2 s, v_0 = ?, a_0 = ?

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.

Tijelo koje harmonički titra ima:

- najveću brzinu

$$v_{\circ} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A$$

- najveću akceleraciju

$$a_{\circ} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija, maksimalna udaljenost od položaja ravnoteže), T perioda (vrijeme jednog titraja).
Akceleracija tijela koje harmonički titra dana je izrazom

$$a = -\left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

gdje negativan predznak pokazuje da akceleracija a ima suprotan smjer od elongacije. Znak minus u tom izrazu možemo izostaviti jer nas zanima samo veličina akceleracije, a ne njezin smjer.

$$a = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right).$$

Najveća brzina točke koja harmonički titra je:

$$v_{\circ} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A = v_{\circ} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \ s} \cdot 4 \ cm = 12.57 \ \frac{cm}{s}.$$

Iznos najveće akceleracije možemo izračunati na dva načina.

1.inačica

$$a_{\circ} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A = \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \ s}\right)^2 \cdot 4 \ cm = 39.48 \ \frac{cm}{s^2}.$$

2.inačica

Vrijeme za koje točka, koja harmonički titra, postigne najveću akceleraciju je četvrtina periode.

$$t = \frac{1}{4} \cdot T.$$

Tada najveća akceleracija iznosi:

$$a = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow a = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \Rightarrow a = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \ s}\right)^2 \cdot 4 \ cm \cdot 1 = 39.48 \ \frac{cm}{s^2}.$$

Vježba 278

Nađi najveću brzinu i najveću akceleraciju točke koja harmonički titra s amplitudom od 0.4 dm. Vrijeme jednog titraja je 2 sekunde.

Rezultat: 12.57 cm / s, 39.48 cm / s^2.

Zadatak 279 (MaturantiXYZ, gimnazija)

Tijelo mase 0.1 kg harmonički titra s amplitudom 4 cm. Ako je najveće ubrzanje tijela 2 cm / s^2 nađi njegovu kinetičku energiju pri prolasku kroz ravnotežni položaj.

Rješenje 279

m = 0.1 kg, A = 4 cm = 0.04 m, a = 2 cm / s^2 = 0.02 m / s^2, E_k = ?

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Harmoničko titranje nastaje djelovanjem elastične sile F = – k · x ili neke druge sile proporcionalne elongaciji.
Za najveću brzinu v_0 i akceleraciju a_0 tijela koje harmonički titra vrijede izrazi:

$$\left. \begin{aligned} v_\circ &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot A \\ a_\circ &= \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \right)^2 \cdot A \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_\circ^2 = a_\circ \cdot A,$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija, maksimalna udaljenost od položaja ravnoteže), T perioda (vrijeme jednog titraja).
Kada tijelo prolazi kroz položaj ravnoteže ima najveću brzinu i kinetičku energiju.
Najveća kinetička energija iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\circ^2 \Rightarrow \left[v_\circ^2 = a_\circ \cdot A \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a_\circ \cdot A = \frac{1}{2} \cdot 0.1\, kg \cdot 0.02 \frac{m}{s^2} \cdot 0.04\, m = 4 \cdot 10^{-5}\, J.$$

Vježba 279

Tijelo mase 100 g harmonički titra s amplitudom 0.4 dm. Ako je najveće ubrzanje tijela 2 cm / s^2 nađi njegovu kinetičku energiju pri prolasku kroz ravnotežni položaj.

Rezultat: $4 \cdot 10^{-5}$ J.

Zadatak 280 (MaturantiXYZ, gimnazija)

Električni motor težak 200 N montiran je na četiri jednake elastične opruge. Konstanta opiranja svake opruge iznosi 45 · 10^2 N / m. Koliko je vrijeme jednog titraja motora koji, kad se okreće, titra vertikalno (g ≈ 10 m / s^2)

Rješenje 280

F = 200 N, n = 4, k = 45 · 10^2 N / m, g ≈ 10 m / s^2, T = ?

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija g kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.
Sila koja djeluje na tijelo mase m i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je k konstanta elastičnosti, x pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus.
Pomoću konstante elastičnosti k možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kada je riječ o opruzi, konstanta k zove se konstanta elastičnosti opruge.
Budući da je motor montiran na četiri jednake elastične opruge, svaka od njih nosi četvrtinu težine motora, tj. na svakoj opruzi visi četvrtina njegove mase.

$$G = \frac{1}{n} \cdot F \Rightarrow m \cdot g = \frac{1}{n} \cdot F \Rightarrow m \cdot g = \frac{1}{n} \cdot F \;/ \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow m = \frac{F}{n \cdot g} = \frac{200\ N}{4 \cdot 10\ \frac{m}{s^2}} = 5\ kg.$$

Vrijeme jednog titraja motora iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{5\ kg}{45 \cdot 10^2\ \frac{N}{m}}} = 0.21\ s.$$

Vježba 280

Električni motor težak 0.2 kN montiran je na četiri jednake elastične opruge. Konstanta opiranja svake opruge iznosi 4500 N / m. Koliko je vrijeme jednog titraja motora koji, kad se okreće, titra vertikalno ($g \approx 10\ m / s^2$)

Rezultat: 0.21 s.