Zadatak 121 (Five, srednja škola)

Ophodno vrijeme svemirskog broda na udaljenosti 1750 km od središta Mjeseca iznosilo je 1.825 h. Iz toga podatka izračunaj:
a) masu Mjeseca
b) ubrzanje sile teže na površini Mjeseca.

Rješenje 121

$r = 1750 \text{ km} = 1.75 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad T = 1.825 \text{ h} = [\,1.825 \cdot 3600\,] = 6570 \text{ s}, \quad M = ?, \quad g = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T ophodno vrijeme (perioda).

a)

Sila gravitacije F_g između svemirskog broda mase m i Mjeseca mase M na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na brod na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \; / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(1.75 \cdot 10^6 \; m\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot (6570 \; s)^2} = 7.35 \cdot 10^{22} \; kg.$$

b)

Budući da je sila teža na površini Mjeseca jednaka privlačnoj sili svemirskog broda mase m i Mjeseca mase M, vrijedi:

$$G = F \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \; /: m \Rightarrow g = G \cdot \frac{M}{r^2} =$$

$$= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{7.35 \cdot 10^{22}\ kg}{\left(1.75 \cdot 10^6\ m\right)^2} = 1.60 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 121

Ophodno vrijeme svemirskog broda na udaljenosti 1750 km od središta Mjeseca iznosilo je 109.5 min. Iz toga podatka izračunaj:
a) masu Mjeseca
b) ubrzanje sile teže na površini Mjeseca.

Rezultat: $7.35 \cdot 10^{22}\ kg,\ 1.60 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 122 (Lara, gimnazija)

Akceleracija slobodnog pada na Mjesecu približno je 1.4 m / s^2. Polumjer Mjeseca je 1.74 · 10^3 km. Koliko treba vremena Mjesečevu modulu za jedan obilazak Mjeseca tik uz njegovu površinu?

Rješenje 122

g = 1.4 m / s^2, r = 1.74 · 10^3 km = 1.74 · 10^6 m, T = ?

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r. Opseg kružnice polumjera r:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.
Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.
Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (vrijeme jednog okreta).
U tom je slučaju sila teža uzrok kružnoga gibanja modula. Zato mora biti F$_{cp}$ jednako sili teži G.

$$F_{cp} = G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \ / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g \Rightarrow v^2 = r \cdot g \ / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g}.$$

Kada modul jednom obiđe Mjesec prevalio je put jednak opsegu kružnice polumjera r brzinom v pa je vrijeme ophoda T jednako:

$$T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{v}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo periodu T.

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{v} \\ v = \sqrt{r \cdot g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{\sqrt{r \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{\sqrt{r \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r \cdot g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1.74 \cdot 10^6 \, m}{1.4 \, \frac{m}{s^2}}} = 7004.72 \, s = 1 \, h \, 56 \min 45 \, s.$$

Vježba 122

Akceleracija slobodnog pada na planetu približno je 2.8 m / s^2. Polumjer planeta je $3.48 \cdot 10^3$ km. Koliko treba vremena Mjesečevu modulu za jedan obilazak Mjeseca tik uz njegovu površinu?

Rezultat: 7004.72 s.

Zadatak 123 (Katarina, srednja škola)

Masa Mjeseca iznosi $\frac{1}{80}$ mase Zemlje, a polumjer Mjeseca približno je $\frac{1}{4}$ polumjera Zemlje. Koliko bi skočio uvis na Mjesecu čovjek koji na Zemlji skoči 2.2 m visoko?

Rješenje 123

M – masa Zemlje, R – polumjer Zemlje, $m_1 = \frac{1}{80} \cdot M$ – masa Mjeseca, $r = \frac{1}{4} \cdot R$ – polumjer Mjeseca, H = 2.2 m, h = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b $\neq$ 0 omjer brojeva a i b.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Koristeći opći zakon gravitacije usporedit ćemo gravitacijsku silu na Zemlji i Mjesecu za bilo koje tijelo mase m:

- Zemlja

$$F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

- Mjesec

$$F_2 = G \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{m \cdot \frac{1}{80} \cdot M}{\left(\frac{1}{4} \cdot R\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{\frac{1}{80} \cdot m \cdot M}{\frac{1}{16} \cdot R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{16 \cdot m \cdot M}{80 \cdot R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{16 \cdot m \cdot M}{80 \cdot R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{5 \cdot R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{5 \cdot R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{5 \cdot R^2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 5 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 5 \;/\cdot F_2 \Rightarrow F_1 = 5 \cdot F_2.$$

Gravitacijsko polje je na Mjesecu pet puta slabije. Budući da je visina skokova obrnuto razmjerna silama, vrijedi:

$$h : H = F_1 : F_2 \Rightarrow F_2 \cdot h = F_1 \cdot H \Rightarrow F_2 \cdot h = F_1 \cdot H \;/\cdot \frac{1}{F_2} \Rightarrow h = \frac{F_1 \cdot H}{F_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{5 \cdot F_2 \cdot H}{F_2} \Rightarrow h = \frac{5 \cdot F_2 \cdot H}{F_2} \Rightarrow h = 5 \cdot H = 5 \cdot 2.2 \; m = 11 \; m.$$

Čovjek koji na Zemlji skoči 2.2 m uvis skočio bi na Mjesecu 11 m visoko.

Vježba 123

Masa Mjeseca iznosi $\frac{1}{80}$ mase Zemlje, a polumjer Mjeseca približno je $\frac{1}{4}$ polumjera Zemlje. Koliko bi skočio uvis na Mjesecu čovjek koji na Zemlji skoči 1.8 m visoko?

Rezultat: 9 m.

Zadatak 124 (Darko, srednja škola)

Satelit na visini 543 km iznad površine Zemlje obilazi Zemlju u vremenu 95 min 21 s po kružnoj stazi. Uzevši srednji polumjer Zemlje 6371 km izračunajte brzinu satelita.

Rješenje 124

$h = 543$ km $= 5.43 \cdot 10^5$ m, $T = 95$ min 21 s $= [\,95 \cdot 60 + 21\,] = 5721$ s,

R = 6371 km = $6.371 \cdot 10^6$ m, v = ?

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r. Opseg kružnice polumjera r:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (vrijeme jednog okreta).

$$\left.\begin{array}{l} r = R + h \\ v = \dfrac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot (R+h) \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \left(6.371 \cdot 10^6\ m + 5.43 \cdot 10^5\ m\right) \cdot \pi}{5721\ s} = 7593.42\ \frac{m}{s}.$$

Vježba 124

Satelit na visini 543000 m iznad površine Zemlje obilazi Zemlju u vremenu 95 min 21 s po kružnoj stazi. Uzevši srednji polumjer Zemlje 6371 km izračunajte brzinu satelita.

Rezultat: $7593.42\ \frac{m}{s}.$

Zadatak 125 (Ante, srednja škola)

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km / s, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8$ km?

Rješenje 125

v = 30 km / s = $3 \cdot 10^4$ m / s, r = $1.5 \cdot 10^8$ km = $1.5 \cdot 10^{11}$ m, M = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r, brzinom v, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Sila gravitacije F_g između Zemlje mase m i Sunca mase M na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na Zemlju na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{\left(3 \cdot 10^4 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} m}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 2.02 \cdot 10^{30} kg.$$

Vježba 125

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 108000 km / h, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8$ km?

Rezultat: $2.02 \cdot 10^{30} kg.$

Zadatak 126 (Ante, srednja škola)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4? (ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje $g_Z = 9.81$ m / s^2)

Rješenje 126

$R_S = 108 \cdot R_z$, $\frac{\rho_S}{\rho_Z} = \frac{1}{4}$, $g_Z = 9.81$ m / s^2, $g_S = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M_Z možemo napisati

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} \Rightarrow m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} \; /: m \Rightarrow g_Z = \frac{G \cdot M_Z}{R_Z^2}.$$

Za privlačenje tijela mase m i Sunca mase M_S možemo napisati

$$m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot M_S}{R_S^2} \Rightarrow m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot M_S}{R_S^2} \;/ : m \Rightarrow g_S = \frac{G \cdot M_S}{R_S^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

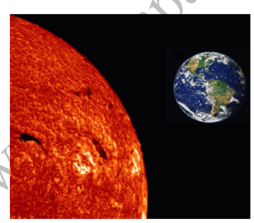
$$\left.\begin{array}{l} g_Z = \dfrac{G \cdot M_Z}{R_Z^2} \\ g_S = \dfrac{G \cdot M_S}{R_S^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\dfrac{G \cdot M_S}{R_S^2}}{\dfrac{G \cdot M_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\dfrac{G \cdot M_S}{R_S^2}}{\dfrac{G \cdot M_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\dfrac{M_S}{R_S^2}}{\dfrac{M_Z}{R_Z^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{M_S \cdot R_Z^2}{M_Z \cdot R_S^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot V_S \cdot R_Z^2}{\rho_Z \cdot V_Z \cdot R_S^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot R_S^3 \cdot \pi \cdot R_Z^2}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot R_Z^3 \cdot \pi \cdot R_S^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot R_S^3 \cdot \pi \cdot R_Z^2}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot R_Z^3 \cdot \pi \cdot R_S^2} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S \cdot R_S}{\rho_Z \cdot R_Z} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\rho_S}{\rho_Z} \cdot \frac{R_S}{R_Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \dfrac{\rho_S}{\rho_Z} = \dfrac{1}{4} \\ R_S = 108 \cdot R_Z \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{108 \cdot R_Z}{R_Z} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{108 \cdot R_Z}{R_Z} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = 27 \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = 27 \;/ \cdot g_Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = 27 \cdot g_Z = 27 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 264.87 \frac{m}{s^2}.$$



Vježba 126

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Zemlje i Sunca 4 : 1? (ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje $g_Z = 9.81$ m / s^2)

Rezultat: $264.87 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 127 (Ante, srednja škola)

Odredi akceleraciju slobodnog pada tijela na površini Sunca ako znamo da je polumjer Zemljine staze R = 1.5 · 10^8 km, polumjer Sunca r = 7 · 10^5 km i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

Rješenje 127

R = 1.5 · 10^8 km = 1.5 · 10^{11} m, r = 7 · 10^5 km = 7 · 10^8 m, T = 1 god = = [365.25 · 24 · 3600] = 3.156 · 10^7 s, g_S = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T ophodno vrijeme (perioda).
Za privlačenje tijela mase m i Sunca mase M_S možemo napisati

$$m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot M_S}{r^2} \Rightarrow m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot M_S}{r^2} \;/ : m \Rightarrow g_S = \frac{G \cdot M_S}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = \frac{G \cdot M_S}{r^2} \;/ \cdot r^2 \Rightarrow g_S \cdot r^2 = G \cdot M_S.$$

Sila gravitacije F_g između Zemlje mase M_Z i Sunca mase M_S na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na Zemlju na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{M_Z \cdot M_S}{R^2} = M_Z \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{M_Z \cdot M_S}{R^2} = M_Z \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \;/ \cdot \frac{R^2 \cdot T^2}{M_Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \cdot M_S \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{aligned} g_S \cdot r^2 &= G \cdot M_S \\ G \cdot M_S \cdot T^2 &= 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} G \cdot M_S &= g_S \cdot r^2 \\ G \cdot M_S \cdot T^2 &= 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S \cdot r^2 \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \Rightarrow g_S \cdot r^2 \cdot T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \;/ \cdot \frac{1}{r^2 \cdot T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{r^2 \cdot T^2} \Rightarrow g_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{(r \cdot T)^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(1.5 \cdot 10^{11}\ m\right)^3}{\left(7 \cdot 10^8\ m \cdot 3.156 \cdot 10^7\ s\right)^2} = 273 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 127

Odredi akceleraciju slobodnog pada tijela na površini Sunca ako znamo da je promjer Zemljine staze $3 \cdot 10^8$ km, promjer Sunca $14 \cdot 10^5$ km i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

Rezultat: $273\,\frac{m}{s^2}.$

Zadatak 128 (Lara, gimnazija)

Dvije kuglice masa 9 · m i 4 · m učvršćene su na razmaku 5 m. Na kojoj se udaljenosti i gdje od prve kuglice nalazi točka u kojoj dolazi do poništavanja gravitacijskih sila na tijelo mase M? Ovisi li to mjesto o masi M?

Rješenje 128

$m_1 = 9 \cdot m, \quad m_2 = 4 \cdot m, \quad r = 5$ m, $\quad M, \quad x = ?$

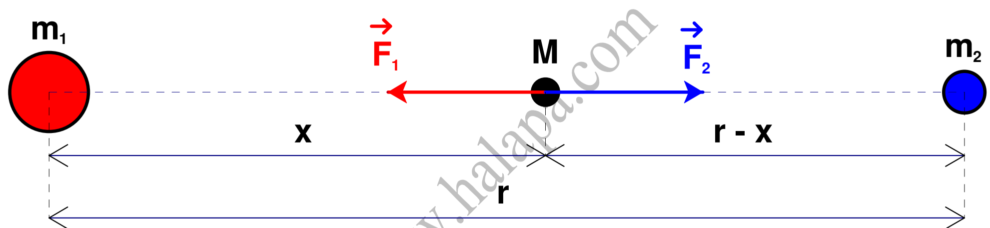
Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.



Gravitacijska sila kojom kuglica:

- mase m_1 djeluje na tijelo mase M je

$$F_1 = G \cdot \frac{m_1 \cdot M}{x^2}$$

- mase m_2 djeluje na tijelo mase M je

$$F_2 = G \cdot \frac{m_2 \cdot M}{(r-x)^2}.$$

U točki u kojoj dolazi do poništavanja gravitacijskih sila na tijelo mase M sile su suprotne orijentacije i jednake veličine. Zato izjednačimo gravitacijske sile pa vrijedi:

$$F_1 = F_2 \;\Rightarrow\; G \cdot \frac{m_1 \cdot M}{x^2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot M}{(r-x)^2} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} m_1 = 9 \cdot m \\ m_2 = 4 \cdot m \\ r = 5 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; G \cdot \frac{9 \cdot m \cdot M}{x^2} = G \cdot \frac{4 \cdot m \cdot M}{(5-x)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; G \cdot \frac{9 \cdot m \cdot M}{x^2} = G \cdot \frac{4 \cdot m \cdot M}{(5-x)^2} \;/\cdot \frac{1}{G \cdot m \cdot M} \;\Rightarrow\; \frac{9}{x^2} = \frac{4}{(5-x)^2}.$$

Jednadžbu možemo riješiti na dva načina.

1.inačica

$$\frac{9}{x^2} = \frac{4}{(5-x)^2} \;\Rightarrow\; \frac{9}{x^2} = \frac{4}{(5-x)^2} \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{9}{x^2}} = \sqrt{\frac{4}{(5-x)^2}} \;\Rightarrow\; \frac{3}{x} = \frac{2}{5-x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x}=\frac{2}{5-x} \; / \cdot x\cdot(5-x) \Rightarrow 3\cdot(5-x)=2\cdot x \Rightarrow 15-3\cdot x=2\cdot x \Rightarrow -3\cdot x-2\cdot x=-15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\cdot x=-15 \Rightarrow -5\cdot x=-15 \; /:(-5) \Rightarrow x=3.$$

Tražena točka nalazi se na spojnici između kuglica masa 9 · m i 4 · m i to udaljena 3 m od prve kuglice (kuglice veće mase). Mjesto ne ovisi o masi M.

2.inačica

$$\frac{9}{x^2}=\frac{4}{(5-x)^2} \Rightarrow \frac{9}{x^2}=\frac{4}{(5-x)^2} \; / \cdot x^2\cdot(5-x)^2 \Rightarrow 9\cdot(5-x)^2=4\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot\left(25-10\cdot x+x^2\right)=4\cdot x^2 \Rightarrow 225-90\cdot x+9\cdot x^2=4\cdot x^2 \Rightarrow 225-90\cdot x+9\cdot x^2-4\cdot x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x^2-90\cdot x+225=0 \Rightarrow 5\cdot x^2-90\cdot x+225=0 \; /:5 \Rightarrow x^2-18\cdot x+45=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-18\cdot x+45=0 \\ a=1 \;,\; b=-18 \;,\; c=45 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=-18 \;,\; c=45 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 1\cdot 45}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{324-180}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{144}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{18\pm 12}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{18+12}{2} \\ x_2=\dfrac{18-12}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{30}{2} \\ x_2=\dfrac{6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{30}{2} \\ x_2=\dfrac{6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=15 \text{ nema fizikalnog smisla} \\ x_2=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=3.$$

Tražena točka nalazi se na spojnici između kuglica masa 9 · m i 4 · m i to udaljena 3 m od prve kuglice (kuglice veće mase). Mjesto ne ovisi o masi M.

Vježba 128

Dvije kuglice masa 18 · m i 8 · m učvršćene su na razmaku 5 m. Na kojoj se udaljenosti i gdje od prve kuglice nalazi točka u kojoj dolazi do poništavanja gravitacijskih sila na tijelo mase M?

Rezultat: Tražena točka nalazi se na spojnici između kuglica masa 9 · m i 4 · m i to udaljena 3 m od prve kuglice (kuglice veće mase).

Zadatak 129 (Azra, medicinska škola)

Kolika je akceleracija Zemljine sile teže na udaljenosti iznad površine Zemlje koja je jednaka njezinu polumjeru? Polumjer Zemlje je R. (ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

$A.\ 9.82\ \frac{m}{s^2}$ $\quad B.\ 2.45\ \frac{m}{s^2}$ $\quad C.\ 4.905\ \frac{m}{s^2}$ $\quad D.\ 1.23\ \frac{m}{s^2}$ $\quad E.\ 3.27\ \frac{m}{s^2}$

Rješenje 129

h = R, $\quad g = 9.81 \text{ m / s}^2$, $\quad g_1 = ?$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G=m\cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Nalazi li se tijelo mase m na visini h iznad površine Zemlje, polumjera R i mase M, tada je gravitacijska sila jednaka

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}.$$

Iz činjenice da je sila teža na površini Zemlje uglavnom jednaka privlačnoj sili tijela mase m i Zemlje mase M (uz zanemarivanje efekta vrtnje Zemlje) možemo napisati

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

gdje je g ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje.

Na visini h bit će:

$$m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2},$$

gdje je g_1 ubrzanje slobodnog pada na visini h iznad Zemlje.

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot g = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2} \\ m \cdot g_1 = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{m \cdot g_1}{m \cdot g} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2}} \Rightarrow \frac{m \cdot g_1}{m \cdot g} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{\dfrac{1}{(R+h)^2}}{\dfrac{1}{R^2}} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+R)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(2 \cdot R)^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{4 \cdot R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{4 \cdot R^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{1}{4} \, / \cdot g \Rightarrow g_1 = \frac{1}{4} \cdot g = \frac{1}{4} \cdot 9.81 \, \frac{m}{s^2} = 2.45 \, \frac{m}{s^2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 129

Kolika je akceleracija Zemljine sile teže na udaljenosti iznad površine Zemlje koja je jednaka njezinu dvostrukom polumjeru? Polumjer Zemlje je R. (ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

$$A.\ 4.82\ \frac{m}{s^2} \qquad B.\ 1.09\ \frac{m}{s^2} \qquad C.\ 1.45\ \frac{m}{s^2} \qquad D.\ 1.98\ \frac{m}{s^2} \qquad E.\ 2.01\ \frac{m}{s^2}$$

Rezultat: B.

Zadatak 130 (Iva, medicinska škola)

Polumjer Zemlje označimo slovom R, akceleraciju na površini Zemlje slovom g, konstantu gravitacije slovom G, a masu Zemlje slovom M. Koja jednadžba povezuje te fizikalne veličine?

$$A.\ G \cdot M = \frac{R}{g} \qquad B.\ \frac{G}{M} = R^2 \cdot g \qquad C.\ G \cdot M = R \cdot g \qquad D.\ G \cdot M = R^2 \cdot g$$

Rješenje 130

R, g, G, M,

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo napisati

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \Rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \ / \cdot \frac{R^2}{m} \Rightarrow G \cdot M = R^2 \cdot g.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 130

Polumjer Zemlje označimo slovom R, akceleraciju na površini Zemlje slovom g, konstantu gravitacije slovom G, a masu Zemlje slovom M. Koja jednadžba povezuje te fizikalne veličine?

$$A.\ G \cdot M = \frac{R}{g} \qquad B.\ \frac{G}{g} = R^2 \cdot M \qquad C.\ G \cdot M = R \cdot g \qquad D.\ \frac{G}{g} = \frac{R^2}{M}$$

Rezultat: D.

Zadatak 131 (Iva, medicinska škola)

Brzina satelita na stazi oko Zemlje neovisna je o:

A. masi satelita B. masi Zemlje

C. udaljenosti satelita od površine Zemlje D. gravitacijskoj konstanti

Rješenje 131

R, g, G, M

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \; / \cdot \frac{R}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{R} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}.$$

Iz formule vidi se da je brzina satelita neovisna o njegovoj masi.
Odgovor je pod A.

Vježba 131

Brzina satelita na stazi oko Zemlje ovisi o:

A. masi satelita i masi Zemlje *B.* masi satelita i konstanti gravitacije
C. njegovoj udaljenosti od središta Zemlje i masi Zemlje
D. gravitacijskoj konstanti i težini satelita

Rezultat: C.

Zadatak 132 (Mario, tehnička škola)

Kolika je prva svemirska brzina? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81$ m / s^2, srednji polumjer Zemlje $R = 6.37 \cdot 10^6$ m)

Rješenje 132

$g = 9.81$ m / s^2, $R = 6.37 \cdot 10^6$ m, $v = ?$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.
Budući da umjetni satelit mase m mora kružiti iznad same Zemljine površine po kružnici polumjera približno jednakog polumjeru Zemlje R, centripetalna sila F_{cp} potrebna za to kružno gibanje jednaka je gravitacijskoj sili G.

$$F_{cp} = G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot g \; / \cdot \frac{R}{m} \Rightarrow v^2 = g \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = g \cdot R \; / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \, m} = 7\,905.04 \frac{m}{s} \approx 7.9 \frac{km}{s}.$$

Vježba 132

Kolika je prva svemirska brzina? (ubrzanje slobodnog pada g = 9.81 m / s^2, srednji polumjer Zemlje R = 6.37 · 10^3 km)

Rezultat: 7.9 km / s.

Zadatak 133 (Mia, srednja škola)

Koliko iznosi polumjer staze po kojoj bi satelit kružio oko Zemlje dva puta manjom brzinom nego što je prva svemirska brzina? (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2, masa Zemlje M = 6 · 10^{24} kg, prva svemirska brzina v_1 = 7.9 km / s = 7900 m / s)

Rješenje 133

$v = \frac{1}{2} \cdot v_1$, G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2, M = 6 · 10^{24} kg,

v_1 = 7.9 km / s = 7900 m / s, r = ?

Da bi se tijelo gibalo po kružnici, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Budući da je centripetalna sila F_{cp} koja djeluje na satelit, mase m, upravo gravitacijska sila F_g kojom Zemlja, mase M, djeluje na satelit, vrijedi:

$$F_{cp} = F_g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \ / \cdot \frac{r^2}{m \cdot v^2} \Rightarrow r = G \cdot \frac{M}{v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[v = \frac{1}{2} \cdot v_1 \right] \Rightarrow r = G \cdot \frac{M}{\left(\frac{1}{2} \cdot v_1 \right)^2} \Rightarrow r = G \cdot \frac{M}{\frac{1}{4} \cdot v_1^2} \Rightarrow r = G \cdot \frac{4 \cdot M}{v_1^2} =$$

$$= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{24} \ kg}{\left(7900 \ \frac{m}{s} \right)^2} = 25\,649\,735.62 \ m \approx 25\,650 \ km.$$

Vježba 133

Koliko iznosi polumjer staze po kojoj bi satelit kružio oko Zemlje dva puta manjom brzinom nego što je prva svemirska brzina? (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2, masa Zemlje M = 6 · 10^{21} t, prva svemirska brzina v_1 = 7.9 km / s = 7900 m / s)

Rezultat: 25450 km.

Zadatak 134 (Marija, gimnazija)

Odredite masu Zemlje uzevši da je njezin srednji polumjer 6400 km, a akceleracija slobodnog pada 9.8 m / s^2. (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2)

Rješenje 134

r = 6400 km = 6.4 · 10^6 m, g = 9.8 m / s^2, G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2, M = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

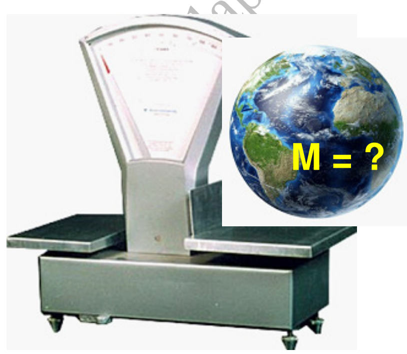
gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža G = m · g koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.



Budući da je sila teža na površini Zemlje jednaka privlačnoj sili tijela i Zemlje (uz zanemarivanje efekta vrtnje Zemlje), za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo zapisati

$$F_g = G \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot g \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot g \; / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow M = \frac{g \cdot r^2}{G} =$$

$$= \frac{9.8 \frac{m}{s^2} \cdot \left(6.4 \cdot 10^6 \; m\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 6 \cdot 10^{24} \; kg.$$

Vježba 134

Odredite masu planeta uzevši da je njegov srednji polumjer 7000 km, a akceleracija slobodnog pada 11.2 m / s^2. (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2)

Rezultat: $8 \cdot 10^{24} \; kg.$

Zadatak 135 (Marija, gimnazija)

Ako je perioda kruženja Mjeseca oko Zemlje 27.32 dana i ako je udaljenost njihovih središta 384000 km izračunajte masu Zemlje. (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2)

Rješenje 135

T = 27.32 d = [27.32 · 24 · 3600] = 2.36·10^6 s, r = 384000 km = 3.84 · 10^8 m,
G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2, M = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

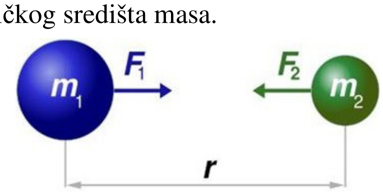
$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.
Privlačna sila F_g između Mjeseca mase m i Zemlje mase M jednaka je centripetalnoj sili F_{cp} kružnog gibanja Mjeseca oko Zemlje.

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \; / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(3.84 \cdot 10^8 \; m\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \left(2.36 \cdot 10^6 \; s\right)^2} = 6 \cdot 10^{24} \; kg.$$

Na sličan način možemo izračunati masu bilo kojeg planeta iz podataka o njegovu satelitu. Izračunata masa Zemlje je veća od stvarne jer je to sustav od dvaju tijela čije se središte masa ne nalazi u središtu Zemlje već ona kruže oko zajedničkog središta masa.



Vježba 135

Ako je perioda kruženja Zemlje oko Sunca 365 dana i ako je udaljenost njihovih središta približno 1.5 · 10^8 km izračunajte masu Sunca. (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2)

Rezultat: $2 \cdot 10^{30} \; kg.$

Zadatak 136 (Matej, gimnazija)

Na kojoj se visini iznad površine Zemlje ubrzanje slobodnog pada smanji za 1%, a na kojoj za 50%? (srednji polumjer Zemlje R = 6370 km)

Rješenje 136

$p_1 = 1\% = 0.01, \quad p_2 = 50\% = 0.50, \quad R = 6370 \text{ km} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad h_1 = ?, \quad h_2 = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.

Računamo za slučaj p_1.

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M na njezinoj površini možemo napisati

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

gdje je g ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje, R srednji polumjer Zemlje.
Na visini h_1 iznad Zemljine površine bit će:

$$m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{\left(R + h_1\right)^2},$$

gdje je g_1 ubrzanje slobodnog pada na visini h_1.
Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$g_1 = g - p_1 \cdot g \Rightarrow g_1 = g - 0.01 \cdot g \Rightarrow g_1 = 0.99 \cdot g.$$

Iz sustava jednadžba dobije se visina h_1.

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot g = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2} \\ m \cdot g_1 = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{\left(R + h_1\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{m \cdot g}{m \cdot g_1} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{\left(R + h_1\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot g}{m \cdot g_1} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{\left(R + h_1\right)^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_1} = \frac{\dfrac{1}{R^2}}{\dfrac{1}{\left(R + h_1\right)^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_1} = \frac{\left(R + h_1\right)^2}{R^2} \Rightarrow \frac{g}{g_1} = \left(\frac{R + h_1}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R+h_1}{R}\right)^2 = \frac{g}{g_1} \Rightarrow \left(\frac{R+h_1}{R}\right)^2 = \frac{g}{g_1} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \frac{R+h_1}{R} = \sqrt{\frac{g}{g_1}} \Rightarrow \frac{R+h_1}{R} = \sqrt{\frac{g}{g_1}} \;/\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R+h_1 = R\cdot\sqrt{\frac{g}{g_1}} \Rightarrow h_1 = R\cdot\sqrt{\frac{g}{g_1}} - R \Rightarrow h_1 = R\cdot\left(\sqrt{\frac{g}{g_1}}-1\right) \Rightarrow \left[\, g_1 = 0.99\cdot g \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = R\cdot\left(\sqrt{\frac{g}{0.99\cdot g}}-1\right) \Rightarrow h_1 = R\cdot\left(\sqrt{\frac{g}{0.99\cdot g}}-1\right) \Rightarrow h_1 = R\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{0.99}}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = R\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{0.99}}-1\right) = 6.37\cdot 10^6\ m\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{0.99}}-1\right) = 32090.88\ m \approx 32.09\ km.$$

Računamo za slučaj p_2.

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M na njezinoj površini možemo napisati

$$m\cdot g = G\cdot\frac{m\cdot M}{R^2},$$

gdje je g ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje, R srednji polumjer Zemlje.
Na visini h_2 iznad Zemljine površine bit će:

$$m\cdot g_2 = G\cdot\frac{m\cdot M}{\left(R+h_2\right)^2},$$

gdje je g_2 ubrzanje slobodnog pada na visini h_2.
Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$g_2 = g - p_2\cdot g \Rightarrow g_2 = g - 0.50\cdot g \Rightarrow g_2 = 0.50\cdot g.$$

Iz sustava jednadžba dobije se visina h_1.

$$\left.\begin{array}{l} m\cdot g = G\cdot\dfrac{m\cdot M}{R^2} \\ m\cdot g_2 = G\cdot\dfrac{m\cdot M}{\left(R+h_2\right)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{m\cdot g}{m\cdot g_2} = \frac{G\cdot\dfrac{m\cdot M}{R^2}}{G\cdot\dfrac{m\cdot M}{\left(R+h_2\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m\cdot g}{m\cdot g_2} = \frac{G\cdot\dfrac{m\cdot M}{R^2}}{G\cdot\dfrac{m\cdot M}{\left(R+h_2\right)^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_2} = \frac{\dfrac{1}{R^2}}{\dfrac{1}{\left(R+h_2\right)^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_2} = \frac{\left(R+h_2\right)^2}{R^2} \Rightarrow \frac{g}{g_2} = \left(\frac{R+h_2}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R+h_2}{R}\right)^2 = \frac{g}{g_2} \Rightarrow \left(\frac{R+h_2}{R}\right)^2 = \frac{g}{g_2} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \frac{R+h_2}{R} = \sqrt{\frac{g}{g_2}} \Rightarrow \frac{R+h_2}{R} = \sqrt{\frac{g}{g_2}} \;/\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R+h_2 = R\cdot\sqrt{\frac{g}{g_2}} \Rightarrow h_2 = R\cdot\sqrt{\frac{g}{g_2}} - R \Rightarrow h_2 = R\cdot\left(\sqrt{\frac{g}{g_2}}-1\right) \Rightarrow \left[\, g_2 = 0.50\cdot g \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = R \cdot \left(\sqrt{\frac{g}{0.50 \cdot g}} - 1 \right) \Rightarrow h_2 = R \cdot \left(\sqrt{\frac{g}{0.50 \cdot g}} - 1 \right) \Rightarrow h_2 = R \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{0.50}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = R \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{0.50}} - 1 \right) = 6.37 \cdot 10^6 \; m \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{0.50}} - 1 \right) = 2638540.39 \; m \approx 2638.54 \; km.$$

Vježba 136

Na kojoj se visini iznad površine Zemlje ubrzanje slobodnog pada smanji za 2%? (srednji polumjer Zemlje R = 6370 km)

Rezultat: 64.67 km.

Zadatak 137 (Fizičarka, gimnazija)

Koliku brzinu ima satelit koji se nalazi na visini h = 3 · R iznad površine Zemlje. Polumjer Zemlje R = 6400 km. Za akceleraciju sile teže na površini Zemlje uzmite vrijednost 10 m / s^2.

Rješenje 137

$h = 3 \cdot R, \quad R = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m / s}^2, \quad v = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža G = m · g koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.
Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.
Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo napisati

$$G = F_g \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Dakle, za ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje može se uzeti

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti R + h mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti R + h od središta vrtnje:

$$F_{cp}=F_g \Rightarrow m\cdot\frac{v^2}{R+h}=G\cdot\frac{m\cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow m\cdot\frac{v^2}{R+h}=G\cdot\frac{m\cdot M}{(R+h)^2} \ /\cdot\frac{R+h}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2=G\cdot\frac{M}{R+h} \Rightarrow [h=3\cdot R] \Rightarrow v^2=G\cdot\frac{M}{R+3\cdot R} \Rightarrow v^2=G\cdot\frac{M}{4\cdot R}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se brzina v.

$$\left.\begin{aligned} v^2&=G\cdot\frac{M}{4\cdot R}\\ g&=G\cdot\frac{M}{R^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{v^2}{g}=\frac{G\cdot\frac{M}{4\cdot R}}{G\cdot\frac{M}{R^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{g}=\frac{G\cdot\frac{M}{4\cdot R}}{G\cdot\frac{M}{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{g}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{R}} \Rightarrow \frac{v^2}{g}=\frac{R}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{g}=\frac{R}{4} \ /\cdot g \Rightarrow v^2=\frac{R\cdot g}{4} \Rightarrow v^2=\frac{R\cdot g}{4} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{R\cdot g}{4}} \Rightarrow v=\frac{\sqrt{R\cdot g}}{\sqrt{4}} \Rightarrow v=\frac{\sqrt{R\cdot g}}{2}=\frac{\sqrt{6.4\cdot 10^6 m\cdot 10\frac{m}{s^2}}}{2}=4000\ \frac{m}{s}=4\ \frac{km}{s}.$$

Vježba 137

Koliku brzinu ima satelit koji se nalazi na visini h = 3 · R iznad površine Zemlje. Polumjer Zemlje R = 6400 km. Za akceleraciju sile teže na površini Zemlje uzmite vrijednost 9.81 m / s^2.

Rezultat: 3961.82 m / s.

Zadatak 138 (Fizičarka, gimnazija)

Na kojoj visini h iznad površine Zemlje je akceleracija gravitacijske sile jednaka devetini vrijednosti one na površini Zemlje? Polumjer Zemlje R = 6400 km.

Rješenje 138

g_0 – ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje, $g=\frac{1}{9}\cdot g_\circ$,

R = 6400 km = 6.4 · 10^6 m, h = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G=6.67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G=m\cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža G = m · g koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U

većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.
Za privlačenje tijela mase m koje se nalazi na površini Zemlje i Zemlje mase M možemo napisati

$$m \cdot g_\circ = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow m \cdot g_\circ = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \;/\cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_\circ = G \cdot \frac{M}{R^2},$$

gdje je R polumjer Zemlje.
Za privlačenje tijela mase m koje se nalazi na udaljenosti h od površine Zemlje i Zemlje mase M možemo napisati

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \;/\cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se visina h.

$$\left.\begin{array}{l} g = G \cdot \dfrac{M}{(R+h)^2} \\ g_\circ = G \cdot \dfrac{M}{R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{g}{g_\circ} = \frac{G \cdot \dfrac{M}{(R+h)^2}}{G \cdot \dfrac{M}{R^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_\circ} = \frac{\cancel{G} \cdot \dfrac{\cancel{M}}{(R+h)^2}}{\cancel{G} \cdot \dfrac{\cancel{M}}{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{g_\circ} = \frac{\dfrac{1}{(R+h)^2}}{\dfrac{1}{R^2}} \Rightarrow \frac{g}{g_\circ} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{g}{g_\circ} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Rightarrow \left[g = \frac{1}{9} \cdot g_\circ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{9} \cdot g_\circ}{g_\circ} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{9} \cdot \cancel{g_\circ}}{\cancel{g_\circ}} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{R}{R+h} \Rightarrow R + h = 3 \cdot R \Rightarrow h = 3 \cdot R - R \Rightarrow h = 2 \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \; m \Rightarrow h = 12800 \; km.$$

Vježba 138

Na kojoj visini h iznad površine Zemlje je akceleracija gravitacijske sile jednaka devetini vrijednosti one na površini Zemlje? Polumjer Zemlje R = 64 · 10^5 m.

Rezultat: 12800 km.

Zadatak 139 (Lucka, medicinska škola)

Perioda kruženja umjetnog satelita oko planeta iznosi T. Udaljenost satelita od središta planeta iznosi r. Na kolikoj udaljenosti od središta planeta kruži drugi satelit kojemu je perioda kruženja $\frac{T}{8}$?

$$A.\ \frac{r}{8} \qquad B.\ \frac{r}{4} \qquad C.\ 4 \cdot r \qquad D.\ 8 \cdot r$$

Rješenje 139

$T_1 = T, \quad r_1 = r, \quad T_2 = \frac{T}{8}, \quad r_2 = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta). Centripetalna sila ima smjer prema središtu kružnice.

Treći Keplerov zakon

Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.

$$\frac{r^3}{T^2} = konst. \quad , \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

1.inačica

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \; / \cdot \frac{r_2^3 \cdot T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{T}{8}}{T}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{T}{8}}{\frac{T}{1}}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{T}{8}}{\frac{T}{1}}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \Rightarrow r_2 = r \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow r_2 = \frac{r}{4}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Sila gravitacije između satelita mase m i planeta mase M na udaljenosti r_1 mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r_1 od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_g \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2}.$$

Sila gravitacije između satelita mase m i planeta mase M na udaljenosti r_2 mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r_2 od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_g \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo r_2.

$$\left. \begin{array}{l} m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2} \\ m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2}}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2}} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2}}{m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2}} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2}} \Rightarrow \frac{\frac{r_1}{T_1^2}}{\frac{r_2}{T_2^2}} = \frac{\frac{1}{r_1^2}}{\frac{1}{r_2^2}} \Rightarrow \frac{r_1 \cdot T_2^2}{r_2 \cdot T_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{r_1 \cdot T_2^2}{r_2 \cdot T_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \; / \cdot \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3} \Rightarrow \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \; / \cdot r_1^3 \Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^3 = r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \; / \sqrt[3]{} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{r_1^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{T}{8}}{T} \right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{T}{8}}{\frac{T}{1}} \right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{T}{8}}{\frac{T}{1}} \right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} \right)^2} \Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = r \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4} \right)^3} \Rightarrow r_2 = r \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow r_2 = \frac{r}{4}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 139

Perioda kruženja umjetnog satelita oko planeta iznosi T. Udaljenost satelita od središta planeta iznosi r. Na kolikoj udaljenosti od središta planeta kruži drugi satelit kojemu je perioda kruženja $\frac{T}{27}$?

$$A. \; \frac{r}{27} \qquad B. \; \frac{r}{9} \qquad C. \; 9 \cdot r \qquad D. \; 27 \cdot r$$

Rezultat: B.

Zadatak 140 (Tomo, srednja škola)

Brzina satelita na stazi oko Zemlje neovisna je o:

$A.$ masi satelita $\quad B.$ masi Zemlje

$C.$ udaljenosti satelita od površine Zemlje $\quad D.$ gravitacijskoj konstanti

Rješenje 140

v = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

Neka je m masa satelita, M masa Zemlje, r polumjer Zemlje.

Budući da ulogu centripetalne sile ima gravitacija, proizlazi:

$$F_{cp} = F_g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \ / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Uočimo da brzina satelita ovisi isključivo o njegovoj udaljenosti od središta Zemlje, a ne o njegovoj masi.

Odgovor je pod A.

Vježba 140

Brzina satelita na stazi oko planeta neovisna je o:

$A.$ masi satelita $\quad B.$ masi Zemlje

$C.$ udaljenosti satelita od površine Zemlje $\quad D.$ gravitacijskoj konstanti

Rezultat: A.