

### Zadatak 141 (Tomo, srednja škola)

Polumjer Zemlje označimo slovom R, akceleraciju na površini Zemlje slovom g, konstantu gravitacije slovom G, a masu Zemlje slovom M. Koja jednačba povezuje te fizikalne veličine?

$$A. G \cdot M = \frac{R}{g} \quad B. \frac{G}{M} = R^2 \cdot g \quad C. G \cdot M = R \cdot g \quad D. G \cdot M = R^2 \cdot g$$

### Rješenje 141

R, g, G, M

#### Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža  $G = m \cdot g$  koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.

Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo napisati

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g \cdot \frac{R^2}{m} \Rightarrow G \cdot M = R^2 \cdot g.$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 141

Polumjer Zemlje označimo slovom R, akceleraciju na površini Zemlje slovom g, konstantu gravitacije slovom G, a masu Zemlje slovom M. Koja jednačba povezuje te fizikalne veličine?

$$A. G \cdot M \cdot g = R \quad B. G = M \cdot R^2 \cdot g \quad C. G = \frac{R \cdot g}{M} \quad D. M = \frac{R^2 \cdot g}{G}$$

**Rezultat:** D.

### Zadatak 142 (Rahela, gimnazija)

Satelit na stazi oko Zemlje ima periodu 3600 s. Satelit jednakih svojstava giba se po stazi čiji je polumjer 9 puta veći od polumjera prve staze. Nadite periodu drugog satelita.

### Rješenje 142

$$r_1 = r, \quad T_1 = 3600 \text{ s}, \quad r_2 = 9 \cdot r, \quad m_1 = m_2 = m, \quad T_2 = ?$$

#### Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T ophodno vrijeme (perioda).

### Treći Keplerov zakon

Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.

$$\frac{r^3}{T^2} = konst. \quad , \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

#### 1. inačica

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti  $r_1$  mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti  $r_1$  od središta vrtnje:

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2} &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1}{T_1^2} \cdot \frac{r_1^2 \cdot T_1^2}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \cdot M \cdot T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^3 \Rightarrow [r_1 = r] \Rightarrow G \cdot M \cdot T_1^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3. \end{aligned}$$

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti  $r_2$  mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti  $r_2$  od središta vrtnje:

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2} &= m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2}{T_2^2} \cdot \frac{r_2^2 \cdot T_2^2}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \cdot M \cdot T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^3 \Rightarrow [r_2 = 9 \cdot r] \Rightarrow G \cdot M \cdot T_2^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot (9 \cdot r)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \cdot M \cdot T_2^2 = 2916 \cdot \pi^2 \cdot r^3. \end{aligned}$$

Iz sustava jednačbi izračunamo  $T_2$ .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} G \cdot M \cdot T_1^2 &= 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3 \\ G \cdot M \cdot T_2^2 &= 2916 \cdot \pi^2 \cdot r^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{G \cdot M \cdot T_2^2}{G \cdot M \cdot T_1^2} = \frac{2916 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{G \cdot M \cdot T_2^2}{G \cdot M \cdot T_1^2} = \frac{2916 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3} \Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = 729 \Rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = 729 \cdot \frac{T_1^2}{T_1^2} \Rightarrow T_2^2 = 729 \cdot T_1^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2^2 = 729 \cdot T_1^2 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow T_2 = \sqrt{729 \cdot T_1^2} \Rightarrow T_2 = \sqrt{729} \cdot \sqrt{T_1^2} \Rightarrow T_2 = 27 \cdot T_1 = \\ = 27 \cdot 3600 \text{ s} = 97200 \text{ s}. \end{aligned}$$

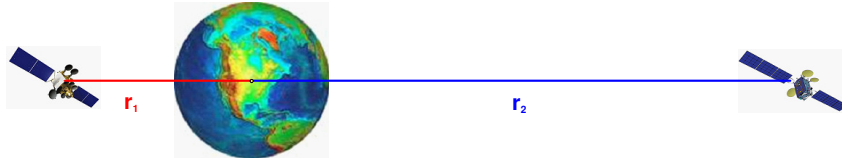
#### 2. inačica

Uporabit ćemo treći Keplerov zakon.

$$\begin{aligned} \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} &\Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{T_2^2 \cdot r_2^3}{r_1^3} \Rightarrow T_2^2 = T_1^2 \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_2^2 = T_1^2 \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^3 \Rightarrow T_2^2 = T_1^2 \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^3 \cdot \sqrt{\quad} \Rightarrow T_2 = \sqrt{T_1^2 \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_2 = \sqrt{T_1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} r_2 = 9 \cdot r \\ r_1 = r \end{array} \right] \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{9 \cdot r}{r}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{9 \cdot r}{r}\right)^3} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{9^3} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{729} = 3600 \text{ s} \cdot 27 = 97200 \text{ s}.$$



### Vježba 142

Satelit na stazi oko Zemlje ima periodu 1800 s. Satelit jednakih svojstava giba se po stazi čiji je polumjer 9 puta veći od polumjera prve staze. Nađite periodu drugog satelita.

**Rezultat:** 48600 s.