

Zadatak 241 (DJ, medicinska škola)

Ako je obujam tijela potpuno uronjenog u vodu $V = 0.5 \text{ m}^3$, uzgon na tijelo je:

A. 5 kN B. 49 N C. 500 N D. 981 N

(gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 241

$V = 0.5 \text{ m}^3$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $F_{uz} = ?$

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Računamo uzgon.

$$F_{uz} = \rho \cdot g \cdot V = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.5 \text{ m}^3 = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 241

Ako je obujam tijela potpuno uronjenog u vodu $V = 500 \text{ dm}^3$, uzgon na tijelo je:

A. 5 kN B. 49 N C. 500 N D. 981 N

(gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: A.

Zadatak 242 (Kristijan, maturant)

Sferni balon, čiju masu možemo zanemariti prema masi zraka u njemu, polumjera $r = 10 \text{ m}$, ispunjen je zrakom čija je gustoća za $1/4$ manja od okolnog zraka gustoće 1.2 kg/m^3 . Obujam kugle je

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$. Koliko iznosi masa tereta koju može podići balon?

Rješenje 242

$r = 10 \text{ m}$, $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\rho_1 = \rho - \frac{1}{4} \cdot \rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - \frac{1}{4} \cdot 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $m = ?$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Sila uzgona F_{uz} po iznosu mora biti jednaka zbroju težine zraka G_1 u balonu i težine tereta G koji balon podiže.

$$F_{uz} = G_1 + G \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = m_1 \cdot g + m \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = m_1 \cdot g + m \cdot g \quad /: g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot V = m_1 + m \Rightarrow m_1 + m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot V - m_1 \Rightarrow m = \rho \cdot V - \rho_1 \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = V \cdot (\rho - \rho_1) \Rightarrow m = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot (\rho - \rho_1) = \frac{4}{3} \cdot (10 \text{ m})^3 \cdot \pi \cdot \left(1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1257 \text{ kg}.$$



Vježba 242

Sferni balon, čiju masu možemo zanemariti prema masi zraka u njemu, polumjera $r = 100 \text{ dm}$, ispunjen je zrakom čija je gustoća za 0.25 manja od okolnog zraka gustoće 1.2 kg/m^3 . Obujam kugle je

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$. Koliko iznosi masa tereta koju može podići balon?

Rezultat: 1257 kg.

Zadatak 243 (Kristijan, maturant)

Sferni balon, čiju masu možemo zanemariti prema masi zraka u njemu, polumjera $r = 10 \text{ m}$, ispunjen je zrakom čija je gustoća jednaka $1/4$ gustoće okolnog zraka koja iznosi 1.2 kg/m^3 . Obujam

kugle je $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$. Koliko iznosi masa tereta koju može podići balon?

Rješenje 243

$$r = 10 \text{ m}, \quad \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_1 = \frac{1}{4} \cdot \rho = \frac{1}{4} \cdot 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad m = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Sila uzgona F_{uz} po iznosu mora biti jednaka zbroju težine zraka G_1 u balonu i težine tereta G koji balon podiže.

$$F_{uz} = G_1 + G \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = m_1 \cdot g + m \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = m_1 \cdot g + m \cdot g \quad | : g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot V = m_1 + m \Rightarrow m_1 + m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot V - m_1 \Rightarrow m = \rho \cdot V - \rho_1 \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = V \cdot (\rho - \rho_1) \Rightarrow m = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot (\rho - \rho_1) = \frac{4}{3} \cdot (10 \text{ m})^3 \cdot \pi \cdot \left(1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 3770 \text{ kg}.$$

Vježba 243

Sferni balon, čiju masu možemo zanemariti prema masi zraka u njemu, polumjera $r = 100 \text{ dm}$, ispunjen je zrakom čija je gustoća jednaka $1/4$ gustoće okolnog zraka koja iznosi 1.2 kg/m^3 . Obujam

kugle je $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$. Koliko iznosi masa tereta koju može podići balon?

Rezultat: 3770 kg.

Zadatak 244 (Kristijan, maturant)

U posudu, koja je do ruba napunjena vodom, spustimo dvije kocke jednakih obujama $V_1 = V_2 = 100 \text{ cm}^3$. Prva je načinjena od tvari gustoće 2.0 g/cm^3 , a druga od tvari gustoće 0.5 g/cm^3 . Gustoća vode iznosi 1.0 g/cm^3 . Koliko će se vode preliti preko ruba posude?

Rješenje 244

$$V_1 = V_2 = 100 \text{ cm}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3, \quad \rho_1 = 2.0 \text{ g/cm}^3 = 2000 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 0.5 \text{ g/cm}^3 = 500 \text{ kg/m}^3, \\ \rho = 1.0 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \Delta V = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

- Usporedit ćemo težinu G_1 prve kocke i silu uzgona F_{uz1} na nju.

$$\left. \begin{array}{l} G_1 = m_1 \cdot g \\ F_{uz1} = \rho \cdot g \cdot V_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_1 = \rho_1 \cdot V_1 \cdot g \\ F_{uz1} = \rho \cdot g \cdot V_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\rho_1 = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \Rightarrow G_1 > F_{uz1}.$$

$\rho_1 > \rho$

Budući da je težina kocke veća od sile uzgona, kocka će potonuti pa istisnuta količina vode ima obujam

$$V_1 = 100 \text{ cm}^3.$$

- Usporedit ćemo težinu G_2 druge kocke i silu uzgona F_{uz2} na nju.

$$\left. \begin{array}{l} G_2 = m_2 \cdot g \\ F_{uz2} = \rho \cdot g \cdot V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G_2 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot g \\ F_{uz2} = \rho \cdot g \cdot V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\rho_2 = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \Rightarrow G_2 < F_{uz2}.$$

$\rho_2 < \rho$

Budući da je težina kocke manja od sile uzgona, kocka će plivati na površini vode pa moramo izračunati dio obujma V kocke uronjene u vodu. Kocka pliva jer je sila uzgona F_{uz2} po iznosu jednaka težini G_2 kocke.

$$F_{uz2} = G_2 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = m_2 \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = \rho_2 \cdot V_2 \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = \rho_2 \cdot V_2 \cdot g \cdot \frac{1}{\rho \cdot g} \Rightarrow$$

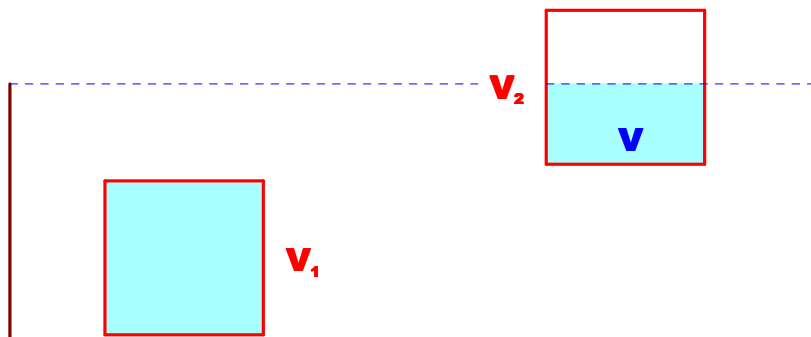
$$\Rightarrow V = \frac{\rho_2 \cdot V_2}{\rho} = \frac{500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 50 \text{ cm}^3.$$

Druga je kocka samo polovicom obujma uronjena u vodu pa istisnuta količina vode ima obujam

$$V = 50 \text{ cm}^3.$$

Obujam vode koja se prelila preko ruba posude iznosi:

$$\Delta V = V_1 + V = 100 \text{ cm}^3 + 50 \text{ cm}^3 = 150 \text{ cm}^3.$$



Vježba 244

U posudu, koja je do ruba napunjena vodom, spustimo dvije kocke jednakih obujama $V_1 = V_2 = 0.1 \text{ dm}^3$. Prva je načinjena od tvari gustoće 2.0 g/cm^3 , a druga od tvari gustoće 0.5 g/cm^3 . Gustoća vode iznosi 1.0 g/cm^3 . Koliko će se vode preliti preko ruba posude?

Rezultat: 150 cm^3 .

Zadatak 245 (Kristijan, maturant)

Kamen mase $m = 367 \text{ g}$ potpuno potopljen u vodi ima prividnu težinu 2.35 N . Kolika je gustoća kamena? (gustoća vode je $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 245

$$m = 367 \text{ g} = 0.367 \text{ kg}, \quad G_1 = 2.35 \text{ N}, \quad \rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \rho = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

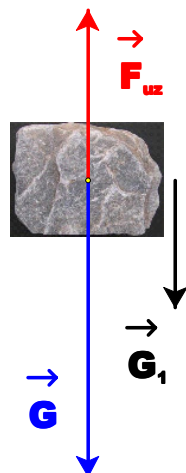
gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Prividna težina G_1 kamena u vodi jednaka je razlici njegove težine G u zraku i sile uzgona F_{uz} pa vrijedi:

$$G_1 = G - F_{uz} \Rightarrow F_{uz} = G - G_1 \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot V = m \cdot g - G_1 \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} = m \cdot g - G_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} = m \cdot g - G_1 \quad | \cdot \frac{\rho}{m \cdot g - G_1} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_v \cdot g \cdot m}{m \cdot g - G_1} =$$

$$= \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.367 \text{ kg}}{0.367 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2.35 \text{ N}} = 2879.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$



Vježba 245

Kamen mase $m = 36.7$ dag potpuno potopljen u vodi ima prividnu težinu 2.35 N. Kolika je gustoća kamena? (gustoća vode je $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, ubrzanje slobodnog pada je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 2879.6 kg/m^3 .

Zadatak 246 (Kristijan, maturant)

U komad parafina mase $m_1 = 170$ g, umetnut je komad aluminija. Kolika je masa aluminija ako takvo tijelo lebdi u vodi? (gustoća vode je $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, gustoća parafina je $\rho_1 = 900 \text{ kg/m}^3$, a gustoća aluminija $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 246

$m_1 = 170 \text{ g} = 0.17 \text{ kg}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_1 = 900 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$, $m_2 = ?$
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Neka je V_1 obujam dijela tijela od parafina, a V_2 obujam dijela tijela od aluminija. Budući da složeno tijelo od parafina i aluminija lebdi u vodi, uzgon vode F_{uz} na njega jednak je po iznosu zbroju težina dijela tijela G_1 od parafina i dijela tijela G_2 od aluminija.

$$F_{uz} = G_1 + G_2 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot (V_1 + V_2) = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot (V_1 + V_2) = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \quad /: g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot (V_1 + V_2) = m_1 + m_2 \Rightarrow \rho \cdot \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) = m_1 + m_2 \Rightarrow \rho \cdot \frac{m_1}{\rho_1} + \rho \cdot \frac{m_2}{\rho_2} = m_1 + m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{m_2}{\rho_2} - m_2 = m_1 - \rho \cdot \frac{m_1}{\rho_1} \Rightarrow m_2 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_2} - 1 \right) = m_1 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_2} - 1 \right) = m_1 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \right) \quad /: \frac{1}{\rho_2} - 1 \Rightarrow m_2 = m_1 \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_1}}{\frac{\rho}{\rho_2} - 1} =$$

$$1 - \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.17 \text{ kg} \cdot \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} - 1 = 0.03 \text{ kg}.$$

Vježba 246

U komad parafina mase $m_1 = 17 \text{ dag}$, umetnut je komad aluminija. Kolika je masa aluminija ako takvo tijelo lebdi u vodi? (gustoća vode je $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, gustoća parafina je $\rho_1 = 900 \text{ kg/m}^3$, a gustoća aluminija $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 0.03 kg.

Zadatak 247 (Matrix, gimnazija)

Dva tijela jednakih volumena, a različitih masa potopljena su u vodi. Prvo ima masu 1 kg i tone okomito prema dolje akceleracijom 3 m/s^2 . Drugo tijelo, čija je masa manja za Δm od mase prvog tijela, penje se okomito uvis jednakom akceleracijom 3 m/s^2 . Za koliko se razlikuju mase tijela? Trenje zanemarite. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 247

$$m_1 = 1 \text{ kg}, \quad a_1 = a_2 = a = 3 \text{ m/s}^2, \quad m_2 = m_1 - \Delta m, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta m = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Budući da prvo tijelo tone akceleracijom a , njegova težina G_1 veća je od sile uzgona F_{uz} pa je rezultantna sila F_1 jednaka razlici sila G_1 i F_{uz} .

$$F_1 = G_1 - F_{uz} \Rightarrow m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - F_{uz}.$$

Uočimo da na oba tijela u vodi djeluje jednaka sila uzgona jer imaju jednake volumene (drugo tijelo ima manju gustoću).

Budući da se drugo tijelo penje uvis akceleracijom a , sila uzgona F_{uz} veća je od njegove težine G_2 pa je rezultantna sila F_2 jednaka razlici sila F_{uz} i G_2 .

$$F_2 = F_{uz} - G_2 \Rightarrow m_2 \cdot a = F_{uz} - m_2 \cdot g \Rightarrow (m_1 - \Delta m) \cdot a = F_{uz} - (m_1 - \Delta m) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a - \Delta m \cdot a = F_{uz} - m_1 \cdot g + \Delta m \cdot g.$$

Iz sustava jednačbi izračunamo Δm .

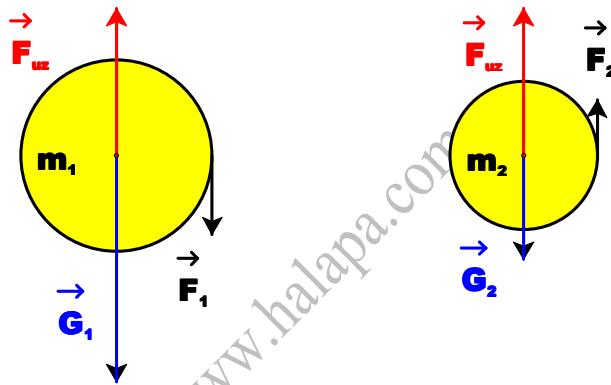
$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - F_{uz} \\ m_1 \cdot a - \Delta m \cdot a = F_{uz} - m_1 \cdot g + \Delta m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_1 \cdot a - \Delta m \cdot a = m_1 \cdot g - F_{uz} + F_{uz} - m_1 \cdot g + \Delta m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_1 \cdot a - \Delta m \cdot a = m_1 \cdot g - F_{uz} + F_{uz} - m_1 \cdot g + \Delta m \cdot g \Rightarrow m_1 \cdot a + m_1 \cdot a - \Delta m \cdot a = \Delta m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_1 \cdot a = \Delta m \cdot g + \Delta m \cdot a \Rightarrow 2 \cdot m_1 \cdot a = \Delta m \cdot (g + a) \Rightarrow \Delta m \cdot (g + a) = 2 \cdot m_1 \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta m \cdot (g + a) = 2 \cdot m_1 \cdot a \cdot \frac{1}{g + a} \Rightarrow \Delta m = \frac{2 \cdot m_1 \cdot a}{g + a} = \frac{2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.468 \text{ kg} = 468 \text{ g}.$$



Vježba 247

Dva tijela jednakih volumena, a različitih masa potopljena su u vodi. Prvo ima masu 1 kg i tone okomito prema dolje akceleracijom 4 m/s^2 . Drugo tijelo, čija je masa manja za Δm od mase prvog tijela, penje se okomito uvis jednakom akceleracijom 4 m/s^2 . Za koliko se razlikuju mase tijela? Trenje zanemarite. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 579 g.

Zadatak 248 (Jakob, strukovna škola)

U spremniku nalazi se tekućina. Kada se na stijenci probuši rupa tekućina počinje istjecati brzinom 4.2 m/s . Na kojoj udaljenosti od prve rupe treba izbušiti rupu iz koje bi tekućina počela istjecati tri puta manjom brzinom? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 248

$$v_1 = 4.2 \text{ m/s}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \cdot v_1, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta h = ?$$

Ako idealna tekućina istječe iz posude kroz otvor koji se nalazi za visinu h ispod najviše razine tekućine, brzina istjecanja iznosi

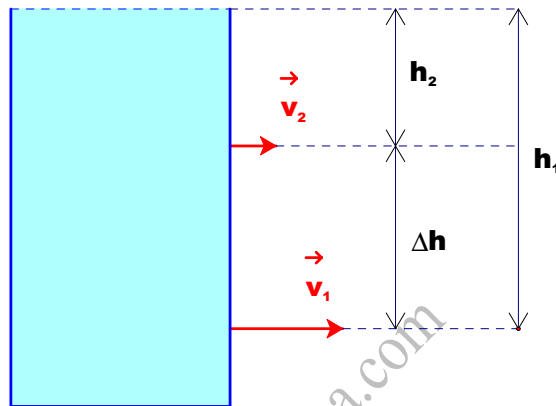
$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2 \cdot g}.$$

Udaljenost na kojoj od prve rupe treba izbušiti drugu rupu iznosi:

$$\Delta h = h_1 - h_2 \Rightarrow \Delta h = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(v_1^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot v_1 \right)^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(v_1^2 - \frac{1}{9} \cdot v_1^2 \right) \Rightarrow \Delta h = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \Delta h = \frac{8}{9} \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \Delta h = \frac{8}{9} \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{4}{9} \cdot \frac{v_1^2}{g} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(4.2 \frac{m}{s} \right)^2}{9.81 \frac{m}{s^2}} = 0.799 \text{ m} = 799 \text{ mm}.$$



Vježba 248

U spremniku nalazi se tekućina. Kada se na stijenci probuši rupa tekućina počinje istjecati brzinom 42 dm/s. Na kojoj udaljenosti od prve rupe treba izbušiti rupu iz koje bi tekućina počela istjecati tri puta manjom brzinom? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 799 mm.

Zadatak 249 (Ružica, strukovna škola)

Izračunaj gustoću morske vode ako je dvije trećine čovjekova tijela uronjeno u more dok pluta. Prosječna gustoća čovjekova tijela je 980 kg/m^3 .

Rješenje 249

$$\rho = 980 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_v = ?$$

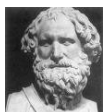
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

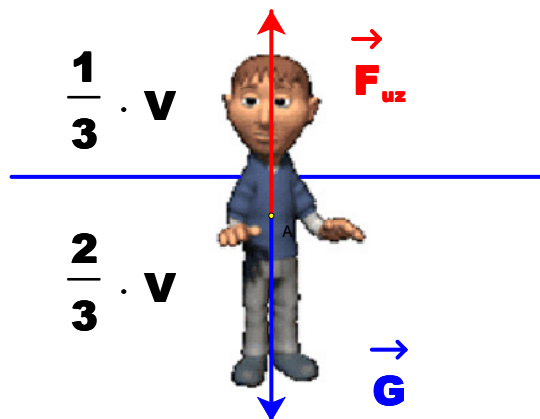


Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu. Dok čovjek pliva u moru uzgon djeluje na dio tijela koji je u vodi. To su dvije trećine njegova obujma. Kada je uzgon izjednačen sa silom težom, čovjek pliva:

$$F_{uz} = G.$$



Budući da uzgon djeluje samo na uronjeni dio ljudskog tijela (dvije trećine čovjekova tijela), slijedi:

$$\begin{aligned} F_{uz} = G &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{2}{3} \cdot V = m \cdot g \Rightarrow [m = \rho \cdot V] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{2}{3} \cdot V = \rho \cdot V \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{2}{3} \cdot V = \rho \cdot V \cdot g \cdot \frac{3}{2 \cdot g \cdot V} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v = \frac{3}{2} \cdot \rho = \frac{3}{2} \cdot 980 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Vježba 249

Izračunaj gustoću morske vode ako jedna trećina čovjekova tijela viri iznad razine mora dok pluta. Prosječna gustoća čovjekova tijela je 980 kg/m^3 .

Rezultat: 1470 kg/m^3 .

Zadatak 250 (Alex, fakultet)

Tijelo pliva na površini vode tako da mu je $1/4$ volumena iznad površine. Kolika je gustoća tijela? Gustoća vode je 1000 kg/m^3 .

Rješenje 250

$$V - \text{volumen tijela, } V_1 = \frac{1}{4} \cdot V - \text{volumen iznad vode, } V_2 = \frac{3}{4} \cdot V - \text{volumen u vodi}$$

$$\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže. Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Dok tijelo pliva na vodi uzgon djeluje na dio tijela koji je u vodi. To su tri četvrtine njegova obujma, V_2 . Kada je uzgon izjednačen sa silom težom, tijelo pliva:

$$F_{uz} = G.$$

Budući da uzgon djeluje samo na uronjeni dio tijela (V_2 , tri četvrtine volumena), slijedi:

$$\begin{aligned} F_{uz} = G &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot V_2 = m \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot V = m \cdot g \Rightarrow [m = \rho \cdot V] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot V = \rho \cdot V \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot V = \rho \cdot V \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{V \cdot g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho = \frac{3}{4} \cdot \rho_v = \frac{3}{4} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Vježba 250

Tijelo pliva na površini vode tako da su mu 3/4 volumena ispod površine. Kolika je gustoća tijela? Gustoća vode je 1000 kg/m^3 .

Rezultat: 750 kg/m^3 .

Zadatak 251 (Darija, gimnazija)

Kroz cijev duljine 100 m teče voda brzinom 1 m/s. Pri zatvaranju ispusnog ventila tlak se poveća za $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Koliko je trajalo zatvaranje ventila? (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 251

$$l = 100 \text{ m}, \quad v = 1 \text{ m/s}, \quad \Delta p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \Delta t = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Ako je početna brzina nula, za tijelo mase m na koje je za vrijeme t djelovala sila F vrijedi:

$$F \cdot t = m \cdot v,$$

gdje je v brzina na kraju vremenskog intervala t za koji je sila djelovala. Umnožak

$$I = F \cdot t$$

zovemo impulsom sile F , a umnožak

$$p = m \cdot v$$

količinom gibanja mase m .

Tlak je omjer sile F što jednoliko raspoređena djeluje okomito na neku površinu S i te površine:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S.$$

Obujam valjka s ploštinom osnovke (baze) S i visinom h iznosi:

$$V = S \cdot h.$$

Neka je Δt vrijeme potrebno da se zatvori ispusni ventil. Tada količina gibanja vode pada od $m \cdot v$ do nule pa na vodu djeluje impuls sile

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v,$$

a tlak se poveća za

$$\Delta p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = \Delta p \cdot S.$$

Masa vode je

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot S \cdot l.$$

Računamo vrijeme Δt .

$$\left. \begin{array}{l} F = \Delta p \cdot S \\ F \cdot \Delta t = m \cdot v \\ m = \rho \cdot S \cdot l \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Delta p \cdot S \cdot \Delta t = m \cdot v \\ m = \rho \cdot S \cdot l \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta p \cdot S \cdot \Delta t = \rho \cdot S \cdot l \cdot v \Rightarrow \Delta p \cdot S \cdot \Delta t = \rho \cdot S \cdot l \cdot v \cdot \frac{1}{\Delta p \cdot S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\rho \cdot l \cdot v}{\Delta p} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 100 \text{ m} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 0.5 \text{ s}.$$

Vježba 251

Kroz cijev duljine 100 m teče voda brzinom 2 m/s. Pri zatvaranju ispusnog ventila tlak se poveća za $4 \cdot 10^5$ Pa. Koliko je trajalo zatvaranje ventila? (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 0.5 s.

Zadatak 252 (Miro, gimnazija)

Čelični valjak, visine 20 cm i gustoće 7800 kg/m^3 , uronjen je okomito u živu. Ispod njega učvršćen je valjak od platine gustoće 21120 kg/m^3 . Oba valjka imaju jednaku osnovku. Sustav dvaju valjaka pliva u okomitom položaju tako da gornja osnovka čeličnog valjka viri 3 cm iznad površine žive. Kolika je visina valjka od platine? (gustoća žive $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 252

$$h = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}, \quad \rho_1 = 7800 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 21120 \text{ kg/m}^3, \quad S_1 = S_2 = S, \\ d = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad \rho = 13600 \text{ kg/m}^3, \quad v = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Obujam valjka s ploštinom osnovke (baze) S i visinom h iznosi:

$$V = S \cdot h.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Težine su:

- čeličnog valjka

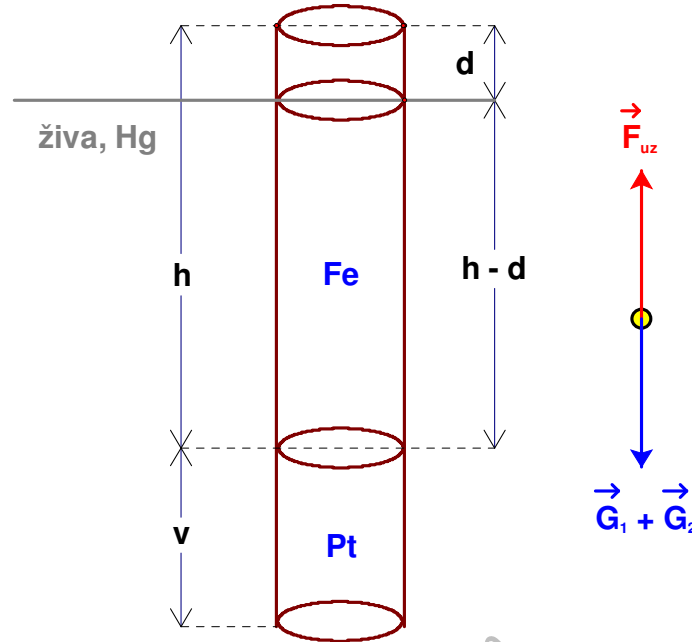
$$G_1 = m_1 \cdot g \Rightarrow G_1 = \rho_1 \cdot V_1 \cdot g \Rightarrow G_1 = \rho_1 \cdot S \cdot h \cdot g.$$

- platinastog valjka

$$G_2 = m_2 \cdot g \Rightarrow G_2 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot g \Rightarrow G_2 = \rho_2 \cdot S \cdot v \cdot g.$$

Volumen sustava dvaju valjaka koji je uronjen u živu iznosi:

$$V = S \cdot (v + h - d).$$



Budući da sustav dvaju valjaka pliva u živi, težina obaju valjaka jednaka je sili uzgona žive (težini istisnute žive).

$$\begin{aligned}
 G_1 + G_2 = F_{uz} &\Rightarrow G_1 + G_2 = \rho \cdot g \cdot V \Rightarrow \begin{cases} G_1 = \rho_1 \cdot S \cdot h \cdot g \\ G_2 = \rho_2 \cdot S \cdot v \cdot g \\ V = S \cdot (v + h - d) \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \rho_1 \cdot S \cdot h \cdot g + \rho_2 \cdot S \cdot v \cdot g = \rho \cdot g \cdot S \cdot (v + h - d) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \rho_1 \cdot S \cdot h \cdot g + \rho_2 \cdot S \cdot v \cdot g = \rho \cdot g \cdot S \cdot (v + h - d) \cdot \frac{1}{S \cdot g} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \rho_1 \cdot h + \rho_2 \cdot v = \rho \cdot (v + h - d) \Rightarrow \rho_1 \cdot h + \rho_2 \cdot v = \rho \cdot v + \rho \cdot (h - d) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \rho_2 \cdot v - \rho \cdot v = \rho \cdot (h - d) - \rho_1 \cdot h \Rightarrow v \cdot (\rho_2 - \rho) = \rho \cdot (h - d) - \rho_1 \cdot h \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v \cdot (\rho_2 - \rho) = \rho \cdot (h - d) - \rho_1 \cdot h \cdot \frac{1}{\rho_2 - \rho} \Rightarrow v = \frac{\rho \cdot (h - d) - \rho_1 \cdot h}{\rho_2 - \rho} = \\
 &= \frac{13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.20 \text{ m} - 0.03 \text{ m}) - 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.20 \text{ m}}{21120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Vježba 252

Čelični valjak, visine 2 dm i gustoće 7800 kg/m^3 , uronjen je okomito u živu. Ispod njega učvršćen je valjak od platine gustoće 21120 kg/m^3 . Oba valjka imaju jednaku osnovku. Sustav dvaju valjaka pliva u okomitom položaju tako da gornja osnovka čeličnog valjka viri 30 mm iznad površine žive. Kolika je visina valjka od platine? (gustoća žive $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 10 cm.

Zadatak 253 (Lusy, gimnazija)

Dvije cijevi promjera $d_1 = 2$ cm i $d_2 = 4$ cm kroz koje teče voda brzinama $v_1 = 3$ m/s i $v_2 = 2$ m/s spajaju se u jednu cijev promjera $d = 5$ cm. Kolika je brzina vode u toj cijevi?

Rješenje 253

$$d_1 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}, \quad d_2 = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad v_1 = 3 \text{ m/s}, \quad v_2 = 2 \text{ m/s}, \\ d = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, \quad v = ?$$

Površina kruga promjera d računa se po formuli:

$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}.$$

Količinu tekućine I koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine S zovemo jakost struje. Ona iznosi:

$$I = S \cdot v,$$

gdje je v brzina protjecanja.

Budući da se dvije cijevi spajaju u jednu cijev, vrijedi:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 = I &\Rightarrow I = I_1 + I_2 \Rightarrow S \cdot v = S_1 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 \Rightarrow S \cdot v = S_1 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 \quad / \cdot \frac{1}{S} \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \frac{S_1 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2}{S} &\Rightarrow v = \frac{\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 + \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} \Rightarrow v = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 \cdot v_1 + d_2^2 \cdot v_2)}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 \cdot v_1 + d_2^2 \cdot v_2)}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} &\Rightarrow v = \frac{d_1^2 \cdot v_1 + d_2^2 \cdot v_2}{d^2} = \\ &= \frac{(0.02 \text{ m})^2 \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (0.04 \text{ m})^2 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(0.05 \text{ m})^2} = 1.76 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Vježba 253

Dvije cijevi promjera $d_1 = 20$ mm i $d_2 = 0.4$ dm kroz koje teče voda brzinama $v_1 = 3$ m/s i $v_2 = 2$ m/s spajaju se u jednu cijev promjera $d = 50$ mm. Kolika je brzina vode u toj cijevi?

Rezultat: 1.76 m/s.

Zadatak 254 (Ivva, medicinska škola)

Za koliko se vremena napuni posuda volumena 0.72 m^3 ako se puni vodom kroz cijev površine poprečnog presjeka 1 cm^2 , a voda izlazi iz cijevi brzinom 2 m/s ?

Rješenje 254

$$V = 0.72 \text{ m}^3, \quad S = 1 \text{ cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad v = 2 \text{ m/s}, \quad t = ?$$

Količinu tekućine I koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine S zovemo jakost struje. Ona iznosi:

$$I = S \cdot v, \quad I = \frac{V}{t},$$

gdje je v brzina protjecanja, V obujam tekućine koja prođe u vremenu t presjekom cijevi.

$$S \cdot v = \frac{V}{t} \Rightarrow S \cdot v = \frac{V}{t} \quad / \cdot \frac{t}{S \cdot v} \Rightarrow t = \frac{V}{S \cdot v} = \frac{0.72 \text{ m}^3}{1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3600 \text{ s} = 1 \text{ h}.$$

Vježba 254

Za koliko se vremena napuni posuda volumena 1.44 m^3 ako se puni vodom kroz cijev površine poprečnog presjeka 1 cm^2 , a voda izlazi iz cijevi brzinom 4 m/s ?

Rezultat: 1 h.

Zadatak 255 (Ivva, medicinska škola)

Infuzija sadrži otopinu glukoze gustoće $1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Ako je tlak u veni čovjeka $1.33 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ iznad atmosferskog, kolika mora biti najmanja visina h na kojoj držimo infuziju da otopina ulazi u venu? Pretpostavite da čovjek leži na krevetu visine 80 cm . (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 255

$$\rho = 1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad p = 1.33 \cdot 10^4 \text{ Pa}, \quad h_1 = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = ?$$

Hidrostatski tlak u tekućini nastaje zbog njezine težine. Djeluje na sve strane jednako, a ovisi o visini stupca h tekućine iznad mjesta na kojemu mjerimo tlak i o gustoći tekućine ρ ,

$$p = \rho \cdot g \cdot h.$$

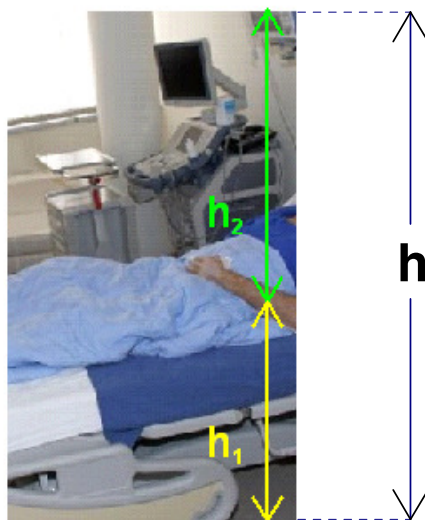
Tlak p povećava se linearno s dubinom tekućine, a ovisi još o gustoći tekućine ρ . Jednak je na svim mjestima na istoj dubini i djeluje jednako u svim smjerovima.

Najprije odredimo visinu h_2 na kojoj se infuzija nalazi iznad kreveta.

$$p = \rho \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow p = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot \frac{1}{\rho \cdot g} \Rightarrow h_2 = \frac{p}{\rho \cdot g}.$$

Najmanja visina h na kojoj moramo držati infuziju iznad zemlje da otopina ulazi u venu iznosi:

$$h = h_1 + h_2 \Rightarrow h = h_1 + \frac{p}{\rho \cdot g} = 0.8 \text{ m} + \frac{1.33 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{1.2 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.93 \text{ m}.$$



Vježba 255

Infuzija sadrži otopinu glukoze gustoće $1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Ako je tlak u veni čovjeka $1.33 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ iznad atmosferskog, kolika mora biti najmanja visina h na kojoj držimo infuziju da otopina ulazi u venu? Pretpostavite da čovjek leži na krevetu visine 70 cm . (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.83 m.

Zadatak 256 (Leon, srednja škola)

U posudu utječe mlaz vode od $150 \text{ cm}^3/\text{s}$. U dnu posude nalazi se otvor presjeka 0.5 cm^2 . Na kojoj će se razini održati voda u posudi? Uzmite u obzir koeficijent kontrakcije mlaza vode $\xi = \frac{2}{3}$.

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 256

$$I = 150 \text{ cm}^3/\text{s} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}, \quad S = 0.5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \xi = \frac{2}{3},$$

$h = ?$

Ako idealna tekućina istječe iz posude kroz otvor koji se nalazi za visinu h ispod najviše razine tekućine, brzina istjecanja iznosi

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Količinu tekućine I koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine S zovemo jakost struje. Ona iznosi:

$$I = S \cdot v,$$

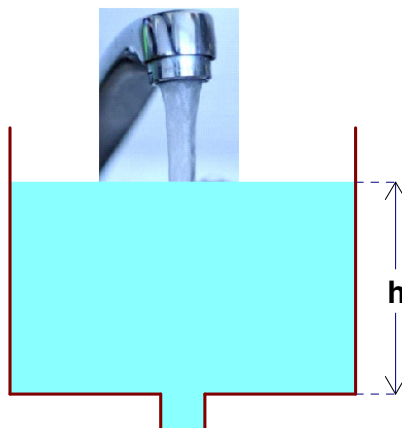
gdje je v brzina protjecanja.

Da bi razina vode h bila stalna količina vode koja istječe mora biti jednaka količini vode koja utječe u posudu. Zbog kontrakcije mlaza vode brzina istjecanja na dnu smanjit će se za ξ . Stoga vrijedi:

$$S \cdot \xi \cdot v = I \Rightarrow S \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = I \Rightarrow S \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = I \cdot \frac{3}{2 \cdot S} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \frac{3 \cdot I}{2 \cdot S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \frac{3 \cdot I}{2 \cdot S} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot g \cdot h = \left(\frac{3 \cdot I}{2 \cdot S} \right)^2 \Rightarrow 2 \cdot g \cdot h = \left(\frac{3 \cdot I}{2 \cdot S} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{3 \cdot I}{2 \cdot S} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \left(\frac{3 \cdot 1.5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}} \right)^2 = 1.03 \text{ m}.$$



Vježba 256

U posudu utječe mlaz vode od $300 \text{ cm}^3/\text{s}$. U dnu posude nalazi se otvor presjeka 1 cm^2 . Na kojoj će se razini održati voda u posudi? Uzmite u obzir koeficijent kontrakcije mlaza vode $\xi = \frac{2}{3}$.

(ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 1.03 m.

Zadatak 257 (Josip, gimnazija)

Kroz cijev promjera 10 cm struji voda brzinom 2.5 m/s. Odredi promjer cijevi koju treba dodati da bi u njoj brzina strujanja bila 1 m/s. (Zanemarite otpor.)

Rješenje 257

$$d_1 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad v_1 = 2.5 \text{ m/s}, \quad v_2 = 1 \text{ m/s}, \quad d_2 = ?$$

Jakost struje

Količinu tekućine I koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine S zovemo jakost struje. Ona iznosi

$$I = S \cdot v,$$

gdje je v brzina protjecanja.

U stacionarnom toku I je konstantna. Pritom vrijedi

$$S_1 : S_2 = v_2 : v_1 \Rightarrow S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2.$$

Ako je d promjer kruga njegova površina glasi:

$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}.$$

Budući da je u stacionarnom toku I konstantna, vrijedi:

$$\begin{aligned} S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 &\Rightarrow \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 \cdot \frac{4}{\pi \cdot v_2} \Rightarrow d_2^2 = d_1^2 \cdot \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow d_2^2 = d_1^2 \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot \sqrt{} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_2 = \sqrt{d_1^2 \cdot \frac{v_1}{v_2}} \Rightarrow d_2 = d_1 \cdot \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 0.1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} = 0.1581 \text{ m} = 15.81 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Vježba 257

Kroz cijev promjera 10 cm struji voda brzinom 5 m/s. Odredi promjer cijevi koju treba dodati da bi u njoj brzina strujanja bila 2 m/s. (Zanemarite otpor.)

Rezultat: 15.81 cm.

Zadatak 258 (Snježana, gimnazija)

Težina kugle dvostruko je veća u zraku nego u vodi. Kolika je gustoća kugle? (gustoća vode $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 258

$$\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na

horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže. Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu. Neka je G težina kugle u zraku. Uronjena u vodu njezina se težina smanji za iznos sile uzgona F_{uz} .

$$G_1 = G - F_{uz}.$$

Budući da je težina kugle dvostruko veća u zraku nego u vodi, slijedi:

$$\begin{aligned} G &= 2 \cdot G_1 \Rightarrow 2 \cdot G_1 = G \Rightarrow 2 \cdot (G - F_{uz}) = G \Rightarrow 2 \cdot G - 2 \cdot F_{uz} = G \Rightarrow 2 \cdot G - G = 2 \cdot F_{uz} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G = 2 \cdot F_{uz} \Rightarrow m \cdot g = 2 \cdot \rho_v \cdot g \cdot V \Rightarrow \rho \cdot V \cdot g = 2 \cdot \rho_v \cdot g \cdot V \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho \cdot V \cdot g = 2 \cdot \rho_v \cdot g \cdot V \quad / \cdot \frac{1}{V \cdot g} \Rightarrow \rho = 2 \cdot \rho_v = 2 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Vježba 258

Težina tijela tri je puta manja u vodi nego u zraku. Kolika je gustoća tijela? (gustoća vode $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 1500 kg/m^3 .

Zadatak 259 (Vlado, gimnazija)

Predmet uronjen u vodu teži 8.34 N, a u benzini 9.32 N. Kolika je gustoća predmeta? (gustoća vode $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, gustoća benzina $\rho_2 = 700 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 259

$$G_1 = 8.34 \text{ N}, \quad G_2 = 9.32 \text{ N}, \quad \rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 700 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u

tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu. Neka je G težina predmeta u zraku. Kada je uronjen u vodu ili benzin njegova težina smanji se za iznos sile uzgona u vodi, tj. u benzinu.

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= G - F_{uz1} \\ G_2 &= G - F_{uz2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow G_2 - G_1 = G - F_{uz2} - (G - F_{uz1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_2 - G_1 = G - F_{uz2} - G + F_{uz1} \Rightarrow G_2 - G_1 = G - F_{uz2} - G + F_{uz1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_2 - G_1 = F_{uz1} - F_{uz2}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo gustoću ρ .

$$\left. \begin{aligned} G_2 - G_1 &= F_{uz1} - F_{uz2} \\ G_1 &= G - F_{uz1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} G_2 - G_1 &= \rho_1 \cdot g \cdot V - \rho_2 \cdot g \cdot V \\ G_1 &= m \cdot g - \rho_1 \cdot g \cdot V \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} G_2 - G_1 &= \rho_1 \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} - \rho_2 \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} \\ G_1 &= m \cdot g - \rho_1 \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} G_2 - G_1 &= \frac{\rho_1}{\rho} \cdot m \cdot g - \frac{\rho_2}{\rho} \cdot m \cdot g \\ G_1 &= m \cdot g - \frac{\rho_1}{\rho} \cdot m \cdot g \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} G_2 - G_1 &= m \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{\rho_2}{\rho} \right) \\ G_1 &= m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} G_2 - G_1 &= m \cdot g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} \\ G_1 &= m \cdot g \cdot \frac{\rho - \rho_1}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{G_2 - G_1}{G_1} = \frac{m \cdot g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho}}{m \cdot g \cdot \frac{\rho - \rho_1}{\rho}} \Rightarrow \frac{G_2 - G_1}{G_1} = \frac{m \cdot g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho}}{m \cdot g \cdot \frac{\rho - \rho_1}{\rho}} \Rightarrow \frac{G_2 - G_1}{G_1} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{G_2 - G_1}{G_1} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1} \cdot (\rho - \rho_1) \cdot \frac{G_1}{G_2 - G_1} \Rightarrow \rho - \rho_1 = \frac{G_1}{G_2 - G_1} \cdot (\rho_1 - \rho_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_1 + \frac{G_1}{G_2 - G_1} \cdot (\rho_1 - \rho_2) =$$

$$= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + \frac{8.34 \text{ N}}{9.32 \text{ N} - 8.34 \text{ N}} \cdot \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 3553.06 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Vježba 259

Predmet uronjen u vodu teži 16.68 N, a u benzin 18.64 N. Kolika je gustoća predmeta? (gustoća vode $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, gustoća benzina $\rho_2 = 700 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 3553.06 kg/m^3 .

Zadatak 260 (Vlado, gimnazija)

Kroz horizontalnu cijev promjera 2 cm protječe voda. Cijev se sužava na jednom mjestu u cijev promjera 0.8 cm. Razlika statičkih tlakova u širem i užem dijelu cijevi je 480 Pa. Koliki je protok vode u m^3/s i u litra/s ? (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 260

$d_1 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$, $d_2 = 0.8 \text{ cm} = 0.008 \text{ m}$, $p_1 - p_2 = 480 \text{ Pa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $I = ?$

Jakost struje

Količinu tekućine I koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine S zovemo jakost struje. Ona iznosi

$$I = S \cdot v,$$

gdje je v brzina protjecanja.

U stacionarnom toku I je konstantna. Pritom vrijedi

$$S_1 : S_2 = v_2 : v_1 \Rightarrow S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2.$$

Ako je d promjer kruga njegova površina glasi:

$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}.$$

Za stacionarni tok idealne tekućine u horizontalnoj cijevi vrijedi zakon u obliku Bernoullijeve jednačbe. Ona kaže da je zbroj statičkog i dinamičkog tlaka stalan.

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2.$$

Preoblikujemo Bernoullijevu jednačbu.

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) \cdot \frac{2}{\rho} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} = v_2^2 - v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 - \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}. \end{aligned}$$

U stacionarnom toku I je konstantna pa za v_2 vrijedi:

$$\begin{aligned} S_1 \cdot v_1 &= S_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 \Rightarrow \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 \cdot \frac{4}{d_2^2 \cdot \pi} \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2}. \end{aligned}$$

Iz sustava jednačbi dobije se v_1 .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} v_1^2 &= v_2^2 - \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \\ v_2 &= v_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_1^2 = \left(v_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)^2 - \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1^2 &= v_1^2 \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4} - \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \Rightarrow v_1^2 - v_1^2 \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4} = -\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow v_1^2 \cdot \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right) = -\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \Rightarrow v_1^2 \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2^4} = -\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1^2 \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2^4} = -\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \cdot \frac{d_2^4}{d_2^4 - d_1^4} \Rightarrow v_1^2 = -\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \cdot \frac{d_2^4}{d_2^4 - d_1^4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \cdot \frac{d_2^4}{d_1^4 - d_2^4} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \cdot \frac{d_2^4}{d_1^4 - d_2^4} \cdot \sqrt{} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} \cdot \frac{d_2^4}{d_1^4 - d_2^4}} \Rightarrow v_1 = d_2^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (d_1^4 - d_2^4)}} \end{aligned}$$

Protok vode I iznosi:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \\ v_1 &= d_2^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (d_1^4 - d_2^4)}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [I = S_1 \cdot v_1] \Rightarrow I = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot d_2^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (d_1^4 - d_2^4)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = \frac{(d_1 \cdot d_2)^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (d_1^4 - d_2^4)}} = \\ &= \frac{(0.02 \text{ m} \cdot 0.008 \text{ m})^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 480 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot ((0.02 \text{ m})^4 - (0.008 \text{ m})^4)}} = 4.989 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

Preračunato u litra/s iznosi:

$$\begin{aligned} I &= 4.989 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 4.989 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^3 \text{ dm}^3}{\text{s}} = 4.989 \cdot 10^{-2} \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = \\ &= [1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}] = 4.989 \cdot 10^{-2} \frac{\text{l}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Vježba 260

Kroz horizontalnu cijev promjera 0.2 dm protječe voda. Cijev se sužava na jednom mjestu u cijev promjera 8 mm. Razlika statičkih tlakova u širem i užem dijelu cijevi je 480 Pa. Koliki je protok vode u m³/s i u litra/s? (gustoća vode ρ = 1000 kg/m³)

Rezultat: $I = 4.989 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 4.989 \cdot 10^{-2} \frac{\text{l}}{\text{s}}$