

Zadatak 121 (Bojan, srednja škola)

Kolika je kulonska sila između jezgre helija ${}^4_2\text{He}$ i jezgre urana ${}^{238}_{92}\text{U}$ kada su na udaljenosti 10^{-10} m? (naboj protona $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, konstanta k za vakuum $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²)

Rješenje 121

$$Q_1 (\text{jezgra helija}) = 2 \cdot e = 2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3.204 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$
$$Q_2 (\text{jezgra urana}) = 92 \cdot e = 92 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1.474 \cdot 10^{-17} \text{ C}, \quad r = 10^{-10} \text{ m},$$
$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2, \quad F = ?$$

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) dana je relacijom:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su Q_1 i Q_2 naboji, r njihova međusobna udaljenost, k konstanta u vakuumu (a praktično i u zraku). Kulonska sila iznosi:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{3.204 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1.474 \cdot 10^{-17} \text{ C}}{(10^{-10} \text{ m})^2} = 4.25 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

Vježba 121

Kolika je kulonska sila između jezgre helija ${}^4_2\text{He}$ i jezgre urana ${}^{238}_{92}\text{U}$ kada su na udaljenosti 10^{-15} m?

Rezultat: 42504.26 N.

Zadatak 122 (Ivan, gimnazija)

Sila između dvaju točkastih naboja u nekoj tekućini udaljenih 20 cm jednaka je sili kojom ti naboji u zraku djeluju kada su udaljeni 30 cm. Kolika je relativna permitivnost tekućine?

Rješenje 122

$$r_1 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad r_2 = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad F_1 = F_2, \quad \epsilon_r = ?$$

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) u vakuumu dana je relacijom:

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su Q_1 i Q_2 naboji, r njihova međusobna udaljenost, ϵ_0 apsolutna permitivnost vakuumu (a praktično i zraka).

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) u nekom sredstvu dana je relacijom:

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su Q_1 i Q_2 naboji, r njihova međusobna udaljenost, ϵ_0 apsolutna permitivnost vakuumu (a praktično i zraka), ϵ_r relativna permitivnost sredstva.

Električna sila između dvaju točkastih naboja u tekućini iznosi:

$$F_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1^2}.$$

Električna sila između dvaju točkastih naboja u zraku iznosi:

$$F_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_2^2}.$$

Budući da sile moraju biti jednake, slijedi:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_2^2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{Q_1 \cdot Q_2} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2} \Rightarrow$$

$$\epsilon_r \cdot r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow \epsilon_r = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 = \left(\frac{0.3 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} \right)^2 = 2.25.$$

Vježba 122

Sila između dvaju točkastih naboja u nekoj tekućini udaljenih 40 cm jednaka je sili kojom ti naboji u zraku djeluju kada su udaljeni 60 cm. Kolika je relativna permitivnost tekućine?

Rezultat: 2.25.

Zadatak 123 (Mateja, medicinska škola)

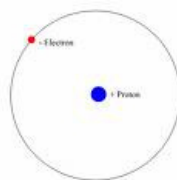
Atom se sastoji od protona oko kojeg na udaljenosti 0.05 nm kruži elektron. Kolika je centripetalna sila pri tom kružnom gibanju? (naboj protona i elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, konstanta k za vakuum $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$)

Rješenje 123

$Q_1 = Q_2 = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $r = 0.05 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, $F_{cp} = ?$
Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) dana je relacijom:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su Q_1 i Q_2 naboji, r njihova međusobna udaljenost, k konstanta u vakuumu (a praktično i u zraku). U ovom je slučaju električna sila uzrok kružnog gibanja elektrona oko protona. Zato mora biti centripetalna sila F_{cp} jednaka električnoj sili F_e :



$$\left. \begin{array}{l} F_{cp} = F_e \\ F_e = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{cp} = k \cdot \frac{e \cdot e}{r^2} \Rightarrow F_{cp} = k \cdot \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow F_{cp} = k \cdot \left(\frac{e}{r} \right)^2 =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{5 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \right)^2 = 9.239 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Vježba 123

Atom se sastoji od protona oko kojeg na udaljenosti 0.1 nm kruži elektron. Kolika je centripetalna sila pri tom kružnom gibanju?

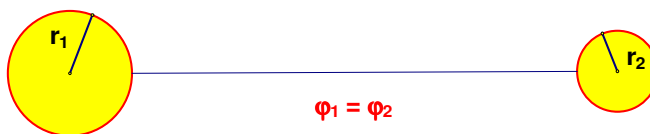
Rezultat: $2.310 \cdot 10^{-8} \text{ N}$.

Zadatak 124 (Petra, gimnazija)

Metalna kugla polumjera 10 cm spojena je tankim vodičem s drugom kuglom koja ima polumjer 5 cm. Na obje kugle dovedemo ukupan naboj iznosa $1.2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Koliki je naboj svake kugle?

Rješenje 124

$r_1 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$, $r_2 = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$, $Q = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, $Q_1 = ?$, $Q_2 = ?$



Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti r od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}.$$

Neka je Q_1 naboj na kugli polumjera r_1 , a Q_2 naboj na kugli polumjera r_2 . Tada je:

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Potencijali kugala iznose:

$$\varphi_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1}, \quad \varphi_2 = k \cdot \frac{Q_2}{r_2}.$$

Budući da su kugle spojene tankim vodičem, imaju isti potencijal pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} Q = Q_1 + Q_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = Q_1 + Q_2 \\ k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_2 = Q - Q_1 \\ k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_2 = Q - Q_1 \\ Q_1 \cdot r_2 = Q_2 \cdot r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 \cdot r_2 = (Q - Q_1) \cdot r_1 \Rightarrow Q_1 \cdot r_2 = Q \cdot r_1 - Q_1 \cdot r_1 \Rightarrow Q_1 \cdot r_2 + Q_1 \cdot r_1 = Q \cdot r_1 \Rightarrow Q_1 \cdot (r_2 + r_1) = Q \cdot r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{Q \cdot r_1}{r_1 + r_2} = \frac{1.2 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot 0.1 \text{ m}}{0.1 \text{ m} + 0.05 \text{ m}} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

Naboj Q_2 iznosi:

$$Q_2 = Q - Q_1 = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ C} - 8 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

Vježba 124

Metalna kugla polumjera 10 cm spojena je tankim vodičem s drugom kuglom koja ima polumjer 5 cm. Na obje kugle dovedemo ukupan naboj iznosa $2.4 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Koliki je naboj svake kugle?

Rezultat: $Q_1 = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, $Q_2 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

Zadatak 125 (Ante, elektrotehnička škola)

Tri su kondenzatora C_1 , C_2 i C_3 spojena tako da su C_1 i C_2 spojeni serijski, a onda je taj serijski spoj spojen paralelno s C_3 . Ako C_1 i C_3 zamijene mjesta, kapacitet te kombinacije jednak je polovini kapaciteta prethodne. Koliko je puta kapacitet C_3 veći od kapaciteta C_2 ako je C_1 dvaput veći od C_2 ?

Rješenje 125

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_1 = 2 \cdot C_2, \quad \frac{C_3}{C_2} = x = ?$$

Spojimo li 2 kondenzatora u paralelu, ukupni će kapacitet biti

$$C = C_1 + C_2.$$

Ukupni kapacitet 2 serijski spojena kondenzatora možemo naći iz izraza

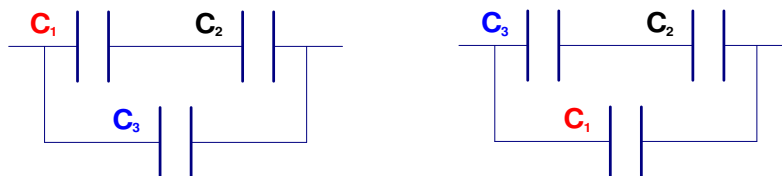
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Kada su kondenzatori C_1 i C_2 spojeni serijski, a onda taj serijski spoj spojen paralelno s C_3 , ukupan otpor iznosi:

$$C_{123} = C_3 + \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Kada su kondenzatori C_3 i C_2 spojeni serijski, a onda taj serijski spoj spojen paralelno s C_1 , ukupan otpor iznosi:

$$C_{321} = C_1 + \frac{C_3 \cdot C_2}{C_3 + C_2} \Rightarrow C_{321} = C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}$$



Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned}
 C_{123} &= 2 \cdot C_{321} \Rightarrow C_3 + \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 2 \cdot \left(C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \right) \Rightarrow [C_1 = 2 \cdot C_2] \Rightarrow \\
 \Rightarrow C_3 + \frac{2 \cdot C_2 \cdot C_2}{2 \cdot C_2 + C_2} &= 2 \cdot \left(2 \cdot C_2 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \right) \Rightarrow C_3 + \frac{2 \cdot C_2 \cdot C_2}{3 \cdot C_2} = 4 \cdot C_2 + \frac{2 \cdot C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow C_3 + \frac{2 \cdot C_2 \cdot C_2}{3 \cdot C_2} &= 4 \cdot C_2 + \frac{2 \cdot C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \Rightarrow C_3 + \frac{2 \cdot C_2}{3} = 4 \cdot C_2 + \frac{2 \cdot C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \quad /: C_2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{C_3}{C_2} + \frac{2}{3} &= 4 + \frac{2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \Rightarrow \frac{C_3}{C_2} + \frac{2}{3} - 4 = \frac{2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \Rightarrow \frac{C_3}{C_2} - \frac{10}{3} = \frac{2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{razlomak na desnoj strani} \\ \text{proširimo sa } \frac{1}{C_2} \end{array} \right] &\Rightarrow \frac{C_3}{C_2} - \frac{10}{3} = \frac{2 \cdot \frac{C_3}{C_2}}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \Rightarrow \frac{C_3}{C_2} - \frac{10}{3} = \frac{2 \cdot \frac{C_3}{C_2}}{1 + \frac{C_3}{C_2}} \Rightarrow \left[x = \frac{C_3}{C_2} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow x - \frac{10}{3} &= \frac{2 \cdot x}{1+x} \Rightarrow \frac{3 \cdot x - 10}{3} = \frac{2 \cdot x}{1+x} \quad /: 3 \cdot (1+x) \Rightarrow (3 \cdot x - 10) \cdot (1+x) = 6 \cdot x \Rightarrow \\
 \Rightarrow 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 - 10 - 10 \cdot x &= 6 \cdot x \Rightarrow 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 - 10 - 10 \cdot x - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 13 \cdot x - 10 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x^2 - 13 \cdot x - 10 = 0 \\ a = 3, b = -13, c = -10 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3, b = -13, c = -10 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{6} &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm 17}{6} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{13+17}{6} \\ x_2 = \frac{13-17}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{30}{6} \\ x_2 = \frac{-4}{6} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-2}{3} \text{ nema smisla} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \frac{C_3}{C_2} = 5.
 \end{aligned}$$

Vježba 125

Tri su kondenzatora C_1 , C_2 i C_3 spojena tako da su C_1 i C_2 spojeni serijski, a onda je taj serijski spoj spojen paralelno s C_3 . Ako C_1 i C_3 zamijene mjesta, kapacitet te kombinacije jednak je polovini kapaciteta prethodne. Koliko je puta kapacitet C_2 manji od kapaciteta C_3 ako je C_1 dvaput veći od C_2 ?

Rezultat: 0.2.

Zadatak 126 (Ivan, elektrotehnička škola)

Na vrhovima jednakostraničnog trokuta sa stranicom 0.5 m nalaze se tri jednaka naboja od 0.1 mC. Četvrti naboj od 1 μC nalazi se u središtu jedne stranice trokuta. Kolika je elektrostatska sila na taj naboj?

Rješenje 126

$$a = 0.5 \text{ m}, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0.1 \text{ mC} = 10^{-4} \text{ C}, \quad Q_4 = 1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}, \quad F = ?$$

Električna sila kojom uzajamno djeluju dva točkasta naboja upravno je razmjerna s umnoškom naboja Q_1 i Q_2 , a obrnuto razmjerna s kvadratom njihove međusobne udaljenosti r :

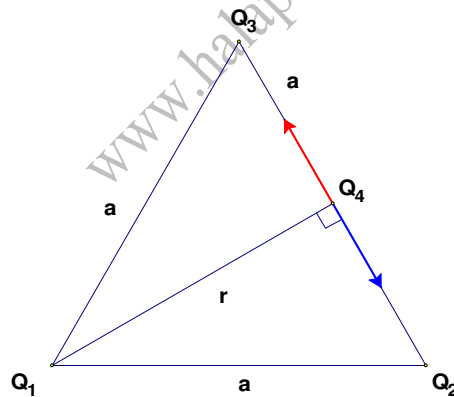
$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje je konstanta

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

Visina v jednakostraničnog trokuta duljine stranice a iznosi:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$



Sile kojima naboji Q_2 i Q_3 djeluju na naboj Q_4 međusobno su jednakih iznosa, a suprotnih smjerova, pa je njihova rezultanta jednaka nuli. Računamo silu između naboja Q_1 i Q_4 :

$$\left. \begin{array}{l} r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \\ F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_4}{r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_4}{\left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_4}{\frac{3 \cdot a^2}{4}} \Rightarrow F = k \cdot \frac{4 \cdot Q_1 \cdot Q_4}{3 \cdot a^2} =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ C} \cdot 10^{-6} \text{ C}}{3 \cdot (0.5 \text{ m})^2} = 4.8 \text{ N}.$$

Vježba 126

Na vrhovima jednakokraničnog trokuta sa stranicom 0.5 m nalaze se tri jednaka naboja od 0.1 mC. Četvrti naboj od 2 μC nalazi se u središtu jedne stranice trokuta. Kolika je elektrostatska sila na taj naboj?

Rezultat: 9.6 N.

Zadatak 127 (Ana, gimnazija)

- Naboj od 2 μC nalazi se u točki električnog polja u kojoj je jakost polja $7.5 \cdot 10^4$ N/C.
- Kolika je električna sila na naboj?
 - Koliko je ta točka udaljena od naboja?
 - Koliki je potencijal? (dielektričnost praznine, vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$)

Rješenje 127

$$Q = 2 \mu\text{C} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \quad E = 7.5 \cdot 10^4 \text{ N/C}, \quad F = ?, \quad r = ?, \quad \varphi = ?$$

Ako se u električnom polju jakosti E nalazi naboj Q, silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q smještena u praznini (vakuumu), onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti r od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti r od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum (prazninu) jednak

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad \varphi = r \cdot E.$$

- a) Električna sila F na naboj iznosi:

$$F = Q \cdot E = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 7.5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 0.15 \text{ N}.$$

- b) Udaljenost r točke od naboja iznosi:

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \Rightarrow E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{r^2}{E} \Rightarrow r^2 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 7.5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}}} = 0.49 \text{ m}.$$

- c) Potencijal φ iznosi:

1. inačica

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0.49 \text{ m}} = 36684 \text{ V}.$$

2. inačica

$$\varphi = r \cdot E = 0.49 \text{ m} \cdot 7.5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 36750 \text{ V}.$$

3. inačica

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ \varphi &= r \cdot E \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi^2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \cdot r \cdot E \Rightarrow \varphi^2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \cdot r \cdot E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^2 = \frac{Q \cdot E}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \varphi = \sqrt{\frac{Q \cdot E}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 7.5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}}} = 36717 \text{ V.}$$



Bez panike!

Rezultati se malo razlikuju zbog zaokruživanja!

Poželjno je rabiti onu formulu koja sadrži veličine dane u zadatku, dakle, Q i E.

Vježba 127

Naboj od $1 \mu\text{C}$ nalazi se u točki električnog polja u kojoj je jakost polja $1.5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Kolika je električna sila na naboj?

Rezultat: 0.15 N.

Zadatak 128 (Ivana, gimnazija)

Koliku brzinu postigne elektron ako se u vakuumu ubrzava homogenim električnim poljem jakosti 10 N/C u vremenu $1 \mu\text{s}$? (naboj elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, masa elektrona $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)

Rješenje 128

$$E = 10 \text{ N/C}, \quad t = 1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}, \quad Q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad v = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}$$

Ako se u električnom polju jakosti E nalazi naboj Q , silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Brzina elektrona iznosi:

$$\left. \begin{aligned} F &= m \cdot a \\ F &= Q \cdot E \\ v &= a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m \cdot a &= Q \cdot E \\ v &= a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m \cdot a &= e \cdot E \quad / : m \\ v &= a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= \frac{e \cdot E}{m} \\ v &= a \cdot t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{e \cdot E}{m} \cdot t = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{C}}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1756311.745 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1756.31 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Vježba 128

Koliku brzinu postigne elektron ako se u vakuumu ubrzava homogenim električnim poljem jakosti 20 N/C u vremenu $1 \mu\text{s}$? (naboj elektrona $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, masa elektrona $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)

Rezultat: 3512.63 km/s.

Zadatak 129 (Branka, srednja škola)

Koliku brzinu postigne proton ako se u vakuumu ubrzava homogenim električnim poljem jakosti 4 N/C u vremenu 2 ms ? (naboj protona $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, masa protona $m = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

Rješenje 129

$$E = 4 \text{ N/C}, \quad t = 2 \text{ ms} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad Q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad m = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad v = ?$$

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m}.$$

Ako se u električnom polju jakosti E nalazi naboj Q , silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v = a \cdot t,$$

gdje je v brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t .

Brzina protona iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ F = Q \cdot E \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot a = Q \cdot E \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot a = e \cdot E \quad / : m \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{e \cdot E}{m} \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \frac{e \cdot E}{m} \cdot t = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4 \frac{\text{N}}{\text{C}}}{1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 765275.619 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 765.28 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Vježba 129

Koliku brzinu postigne proton ako se u vakuumu ubrzava homogenim električnim poljem jakosti 8 N/C u vremenu 1 ms ? (naboj protona $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, masa protona $m = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

Rezultat: $765.28 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$

Zadatak 130 (Ivica, elektrotehnička škola)

Titrajni krug ima zavojnicu i kondenzator s dvije paralelne ploče međusobno razmaknute za 1 cm . Rezonantna frekvencija kruga iznosi 100 MHz . Kolika će mu biti rezonantna frekvencija ako ploče kondenzatora približimo na udaljenost 0.25 cm ?

Rješenje 130

$$d_1 = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad v_1 = 100 \text{ MHz}, \quad d_2 = 0.25 \text{ cm} = 0.0025 \text{ m}, \quad v_2 = ?$$

Električni titrajni krug sastoji se od kondenzatora kapaciteta C i zavojnice induktiviteta L . Vrijeme jednog titraja struje ili napona takvog kruga određujemo pomoću Thomsonove formule

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \Rightarrow v = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

jer između frekvencije v i perioda T postoji ova veza:

$$T = \frac{1}{v}, \text{ odnosno } v = \frac{1}{T}.$$

Kapacitet pločastog kondenzatora upravo je razmjernan površini S jedne ploče, a obrnuto razmjernan udaljenosti d između ploča:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}.$$

Ako ploče kondenzatora približimo na udaljenost d_2 , rezonantna frekvencija ν_2 iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_1}} \\ \nu_2 &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_1}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_2}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{L \cdot C_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{L \cdot C_1}}{\sqrt{L \cdot C_2}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{L \cdot C_1}{L \cdot C_2}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{L \cdot C_1}{L \cdot C_2}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d_1}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d_1}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{d_1}{d_2}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{0.0025 \text{ m}}{0.01 \text{ m}}} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = 0.5 \Rightarrow \nu_2 = 0.5 \cdot \nu_1 \Rightarrow \nu_2 = 0.5 \cdot 100 \text{ MHz} = 50 \text{ MHz}.$$

Vježba 130

Titrajni krug ima zavojnicu i kondenzator s dvije paralelne ploče međusobno razmaknute za 1 cm. Rezonantna frekvencija kruga iznosi 50 MHz. Kolika će mu biti rezonantna frekvencija ako ploče kondenzatora približimo na udaljenost 0.25 cm?

Rezultat: 25 MHz.

Zadatak 131 (Matija, elektrostrojarska škola)

Ako $2 \cdot 10^4$ elektrona oduzmemo nekom neutralnom tijelu koliki je tada naboj tijela? (naboj elektrona $e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

Rješenje 131

$$n = 2 \cdot 10^4, \quad e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad Q = ?$$

Atom se sastoji od jezgre (protona i neutrona) i elektronskog omotača (elektrona). Električni naboji elektrona i protona najmanje su količine elektriciteta u prirodi. Zovu se elementarni električni naboji. Ti naboji sadrže jednako veliku količinu elektriciteta suprotnog predznaka.

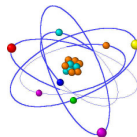
- naboj elektrona $e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- naboj protona $p = +1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Naboj je elektrona negativan ($-$), dok je naboj protona pozitivan ($+$). Atom je električki neutralan jer ima istu količinu pozitivnog i negativnog naboja. Kad atom izgubi jedan ili više elektrona postaje električki pozitivan, a atom s viškom elektrona postaje električki negativan. Ako neutralnom tijelu (ima jednaku količinu negativnog i pozitivnog naboja) oduzmemo određeni broj elektrona (negativan naboj), tijelo postaje električki pozitivno. Budući da n elektrona ima naboj

$$Q = n \cdot e,$$

tijelo će imati pozitivan naboj koji iznosi

$$Q = n \cdot e = 2 \cdot 10^4 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3.204 \cdot 10^{-15} \text{ C}.$$



Vježba 131

Ako $1 \cdot 10^4$ elektrona oduzmemo nekom neutralnom tijelu koliki je tada naboj tijela? (naboj elektrona $e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ C)

Rezultat: $1.602 \cdot 10^{-15}$ C.

Zadatak 132 (Ivica, elektrotehnička škola)

Titrajni krug sastoji se od zavojnice induktiviteta 15 mH i pločastog kondenzatora kojemu su ploče svaka površine 56.5 cm^2 razmaknute 1 mm. Među pločama je zrak. Kolika je rezonantna frekvencija kruga? (električna permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$)

Rješenje 132

$L = 15 \text{ mH} = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ H}$, $S = 56.5 \text{ cm}^2 = 5.65 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$,
 $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, $\nu = ?$

Električni titrajni krug sastoji se od kondenzatora kapaciteta C i zavojnice induktiviteta L. Vrijeme jednog titraja struje ili napona takvog kruga određujemo pomoću Thomsonove formule

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

jer između frekvencije ν i perioda T postoji ova veza:

$$T = \frac{1}{\nu}, \text{ odnosno } \nu = \frac{1}{T}.$$

Kapacitet pločastog kondenzatora upravo je razmjernan površini S jedne ploče, a obrnuto razmjernan udaljenosti d između ploča:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

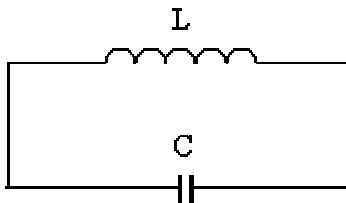
Ako je među pločama kondenzatora zrak vrijedi:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$$

Rezonantna frekvencija iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \\ C &= \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 \cdot S \cdot L}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10^{-3} \text{ m}}{8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 5.65 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ H}}} = 1.84 \cdot 10^5 \text{ Hz.}$$



Vježba 132

Titrajni krug sastoji se od zavojnice induktiviteta 0.015 H i pločastog kondenzatora kojemu su ploče svaka površine 56.5 cm^2 razmaknute 0.1 cm. Među pločama je zrak. Kolika je rezonantna frekvencija kruga? (električna permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$)

Rezultat: $1.84 \cdot 10^5$ Hz.

Zadatak 133 (Marko, elektrotehnička škola)

U bljeskalici fotoaparata nalazi se kondenzator kapaciteta $350 \mu\text{F}$. Kondenzator se nabije do napona 300 V . Bljesak koji proizvede bljeskalica traje jednu desettisućinku sekunde. Kolika je snaga bljeska?

Rješenje 133

$$C = 350 \mu\text{F} = 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ F}, \quad U = 300 \text{ V}, \quad t = 0.0001 \text{ s} = 10^{-4} \text{ s}, \quad P = ?$$

Energija nabijenog kondenzatora jednaka je

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.



$$P = \frac{W}{t}.$$

Snaga bljeska iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}{t} \Rightarrow P = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot t} =$$
$$= \frac{3.5 \cdot 10^{-4} \text{ F} \cdot (300 \text{ V})^2}{2 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 157500 \text{ W} = 157.5 \cdot 10^3 \text{ W} = 157.5 \text{ kW}.$$

Vježba 133

U bljeskalici fotoaparata nalazi se kondenzator kapaciteta $700 \mu\text{F}$. Kondenzator se nabije do napona 300 V . Bljesak koji proizvede bljeskalica traje jednu desettisućinku sekunde. Kolika je snaga bljeska?

Rezultat: 315 kW.

Zadatak 134 (Suzy, srednja škola)

Dvije metalne kugle polumjera 10 cm i 20 cm nalaze se na međusobnoj udaljenosti mnogo većoj od njihovih polumjera, a međusobno su povezane tankom vodljivom žicom. Ako je naboj prve kugle 12 C , a druge 24 C , koliki je omjer električnog polja na površini prve i druge kugle?

Rješenje 134

$$r_1 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad r_2 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad Q_1 = 12 \text{ C}, \quad Q_2 = 24 \text{ C}, \quad \frac{E_1}{E_2} = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q smještena u praznini, onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti r od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenost r od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \text{ ili } \varphi = r \cdot E.$$



1. inačica

Budući da se jakost električnog polja definira:

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2},$$

slijedi

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \frac{k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2}}{k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2}}{k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1 \cdot r_2^2}{Q_2 \cdot r_1^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{12 \text{ C}}{24 \text{ C}} \cdot \left(\frac{0.2 \text{ m}}{0.1 \text{ m}}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 2 \end{aligned}$$

2. inačica

Budući da su kugle povezane vodljivom žicom, imaju jednak potencija pa slijedi:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow r_1 \cdot E_1 = r_2 \cdot E_2 \Rightarrow r_1 \cdot E_1 = r_2 \cdot E_2 \cdot \frac{1}{r_1 \cdot E_2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{0.2 \text{ m}}{0.1 \text{ m}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 2.$$

Vježba 134

Dvije metalne kugle polumjera 100 mm i 200 mm nalaze se na međusobnoj udaljenosti mnogo većoj od njihovih polumjera, a međusobno su povezane tankom vodljivom žicom. Ako je naboj prve kugle 12 C, a druge 24 C, koliki je omjer električnog polja na površini prve i druge kugle?

Rezultat: 2.

Zadatak 135 (Josip, srednja škola)

Dva tijela, jednakih masa, $m = 10 \text{ g}$, naelektrizirana su tako da Coulombova sila poništava djelovanje gravitacijske sile među njima. Koliki su naboji tijela i kakvog su predznaka, ako se tijela nalaze u zraku? ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

Rješenje 135

$$m_1 = m_2 = m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}, \\ Q_1 = Q_2 = Q = ?$$

Coulombov zakon

Električna sila kojom uzajamno djeluju dva točkasta naboja upravo je razmjerna s umnoškom naboja Q_1 i Q_2 , a obrnuto razmjerna s kvadratom njihove međusobne udaljenosti r :

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje konstanta k za vakuum (i zrak) ima vrijednost

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

Opći zakon gravitacije

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

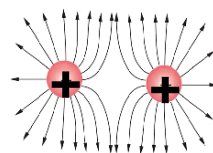
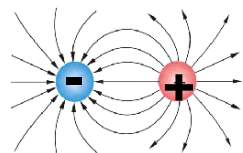
$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta koja je eksperimentalno određena i iznosi

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

Električna i gravitacijska sila djeluju na daljinu, odnosno na tijela koja nisu u dodiru. Gravitacijska sila je uvijek privlačna, a električna može biti i privlačna i odbojna.

Budući da je gravitacijska sila uvijek privlačna, Coulombova sila između dva tijela naboja Q_1 i Q_2 mora biti odbojna. Znači da naboji moraju imati iste predznake (jer se istoimeni naboji odbijaju).



Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$F = F_g \Rightarrow k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow k \cdot \frac{Q^2}{r^2} = G \cdot \frac{m^2}{r^2} \Rightarrow k \cdot \frac{Q^2}{r^2} = G \cdot \frac{m^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^2 = G \cdot \frac{m^2}{k} \Rightarrow Q^2 = G \cdot \frac{m^2}{k} \cdot \sqrt{} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm \sqrt{G \cdot \frac{m^2}{k}} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm m \cdot \sqrt{\frac{G}{k}} =$$

$$= \pm 0.01 \text{ kg} \cdot \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}} = \pm 8.609 \cdot 10^{-13} \text{ C} = \pm 8.609 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-12} \text{ C} = \pm 0.8609 \text{ pC}.$$

1. slučaj

Oba su naboja pozitivna:

$$Q_1 = Q_2 = 0.8609 \text{ pC}.$$

2. slučaj

Oba su naboja negativna:

$$Q_1 = Q_2 = -0.8609 \text{ pC}.$$

Vježba 135

Dva tijela, jednakih masa, $m = 1$ dag, naelektrizirana su tako da Coulombova sila poništava djelovanje gravitacijske sile među njima. Koliki su naboji tijela i kakvog su predznaka, ako se tijela nalaze u zraku? ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

Rezultat: $\pm 0.8609 \text{ pC}$.

Zadatak 136 (Marija, gimnazija)

Udaljenost između ploča kondenzatora iznosi 0.5 mm. Ako se on stavi u ulje, njegov se kapacitet promijeni. Kada se ploče udalje na udaljenost 1.2 mm, kondenzator i u ulju ima prijašnju vrijednost kapaciteta. Kolika je relativna permitivnost ulja?

Rješenje 136

$$d_1 = 0.5 \text{ mm}, \quad d_2 = 1.2 \text{ mm}, \quad C_1 = C_2, \quad \epsilon_r = ?$$

Kapacitet pločastog kondenzatora u vakuumu (praznini, zrakopraznom prostoru):

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d},$$

gdje je ϵ_0 električna permitivnost vakuuma (praznine, zrakopraznog prostora), S površina jedne ploče kondenzatora, d udaljenost između ploča kondenzatora.

Kapacitet pločastog kondenzatora u sredstvu relativne permitivnosti ϵ_r :

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d},$$

gdje je ϵ_0 električna permitivnost vakuuma (praznine, zrakopraznog prostora), ϵ_r relativna permitivnost sredstva, S površina jedne ploče kondenzatora, d udaljenost između ploča kondenzatora.

Kapacitet kondenzatora u vakuumu, kada su njegove ploče međusobno udaljene za d_1 , iznosi:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d_1}$$

Kapacitet kondenzatora u ulju, kada su njegove ploče međusobno udaljene za d_2 , iznosi:

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{d_2}$$

Budući da prema uvjetu zadatka kapacitet mora ostati isti, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{d_2} \\ C_1 = C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d_1} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{d_2} \Rightarrow \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d_1} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{d_2} \cdot \frac{d_2}{\epsilon_0 \cdot S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1.2 \text{ mm}}{0.5 \text{ mm}} = 2.4.$$

Vježba 136

Udaljenost između ploča kondenzatora iznosi 0.4 mm. Ako se on stavi u ulje, njegov se kapacitet promijeni. Kada se ploče udalje na udaljenost 0.96 mm, kondenzator i u ulju ima prijašnju vrijednost kapaciteta. Kolika je relativna permitivnost ulja?

Rezultat: 2.4.

Zadatak 137 (Maturant, gimnazija)

- Točka T je na udaljenosti 3 cm od točkastoga električnoga naboja $q = +2 \text{ nC}$.
- Koliki je iznos električnoga polja točkastoga naboja q u točki T?
 - Ucrtajte na slici vektor električnoga polja u točki T. ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$)



Rješenje 137

$$r = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad q = 2 \text{ nC} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}, \quad E = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q smještena u praznini, onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti r od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Iznos električnoga polja točkastoga naboja q u točki T je:

$$E = k \cdot \frac{q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0.03 \text{ m})^2} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Slika vektora električnoga polja u točki T.



Vježba 137

Točka T je na udaljenosti 30 mm od točkastoga električnoga naboja $q = +2 \text{ nC}$. Koliki je iznos električnoga polja točkastoga naboja q u točki T? ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$)

Rezultat: 20000 N/C.

Zadatak 138 (Jelena, gimnazija)

Pomoću kondenzatora $C_1 = 10 \text{ pF}$, $C_2 = 8 \text{ pF}$ i C_3 želi se napraviti spoj koji ima kapacitet 6 pF . Koliki mora biti kapacitet C_3 ?

Rješenje 138

$$C_1 = 10 \text{ pF}, \quad C_2 = 8 \text{ pF}, \quad C = 6 \text{ pF}, \quad C_3 = ?$$

Ukupni kapacitet od n serijski spojenih kondenzatora možemo naći iz izraza

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Uočimo da je ukupni otpor manji od najmanjeg pojedinačnog otpora u spoju.

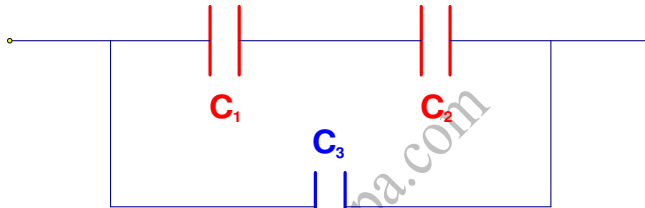
Ukupni kapacitet od n usporedno (paralelno) spojenih kondenzatora možemo naći iz izraza

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n.$$

Uočimo da je ukupni otpor veći od najvećeg pojedinačnog otpora u spoju.

Moramo gledati mješoviti spoj. Prema uvjetima zadatka kondenzatori C_1 i C_2 moraju biti serijski spojeni. Budući da su kondenzatori kapaciteta C_1 i C_2 serijski vezani njihov ukupni kapacitet je:

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{1,2}} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{1,2}} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} \Rightarrow C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$



Ukupni kapacitet C usporedno (paralelno) spojenih kondenzatora kapaciteta $C_{1,2}$ i C_3 iznosi:

$$C = C_{1,2} + C_3 \Rightarrow C_3 = C - C_{1,2} \Rightarrow C_3 = C - \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 6 \text{ pF} - \frac{10 \text{ pF} \cdot 8 \text{ pF}}{10 \text{ pF} + 8 \text{ pF}} = 1.56 \text{ pF}.$$

Vježba 138

Pomoću kondenzatora $C_1 = 10 \text{ pF}$, $C_2 = 8 \text{ pF}$ i C_3 želi se napraviti spoj koji ima kapacitet 7 pF . Koliki mora biti kapacitet C_3 ?

Rezultat: 2.56 pF .

Zadatak 139 (Jelena, gimnazija)

Dva naboja $Q_1 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ i $Q_2 = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ nalaze se u zraku na udaljenosti 1 m . Koliki rad treba izvršiti da bi ih približili na udaljenost 0.2 m ? ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$)

Rješenje 139

$$Q_1 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad Q_2 = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad r_1 = 1 \text{ m}, \quad r_2 = 0.2 \text{ m},$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, \quad W = ?$$

Ako se točkasti naboj Q_1 prenosi u električnom polju naboja Q_2 pod djelovanjem vanjskih sila, onda je njihov rad jednak

$$W = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

gdje je r_1 početni razmak između naboja, r_2 konačni razmak između naboja.

Obavljeni rad W iznosi:

$$W = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}} \cdot 4 \cdot 10^{-8} C \cdot 2.5 \cdot 10^{-8} C \cdot \left(\frac{1}{0.2 m} - \frac{1}{1 m} \right) = 3.6 \cdot 10^{-5} J.$$

Vježba 139

Dva naboja $Q_1 = 8 \cdot 10^{-8} C$ i $Q_2 = 2.5 \cdot 10^{-8} C$ nalaze se u zraku na udaljenosti 1 m. Koliki rad treba izvršiti da bi ih približili na udaljenost 0.2 m? ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$)

Rezultat: $7.2 \cdot 10^{-5} J.$

Zadatak 140 (Jelena, gimnazija)

Dva su točkasta naboja dovedena iz velike međusobne udaljenosti na udaljenost 1 m i pri tome je izvršen rad od 10 J. Koliki je rad potrebno utrošiti da se ta dva naboja dovedu od međusobne udaljenosti 1 m na 0.2 m?

Rješenje 140

$R = \infty$ velika međusobna udaljenost, $r_1 = 1 m$, $W_1 = 10 J$, $r_2 = 0.2 m$, $W_2 = ?$

Ako se točkasti naboj Q_1 prenosi u električnom polju naboja Q_2 pod djelovanjem vanjskih sila, onda je njihov rad jednak

$$W = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

gdje je r_1 početni razmak između naboja, r_2 konačni razmak između naboja.

- Kada se dva točkasta naboja Q_1 i Q_2 dovedu iz velike udaljenosti R na udaljenost r_1 obavljeni rad W_1 iznosi:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right) \Rightarrow W_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - 0 \right) \Rightarrow W_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1}. \end{aligned}$$

POZOR!

$\frac{1}{\infty} = 0$ nije korektno napisano, ali služi svrsi, trebalo bi pisati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

- Kada se dva točkasta naboja Q_1 i Q_2 dovedu od međusobne udaljenosti r_1 na r_2 obavljeni rad W_2 iznosi:

$$W_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

1. inačica

Iz sustava jednadžbi izračuna se rad W_2 .

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1} \\ W_2 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1}} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = r_1 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_1} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_1} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{r_1}{r_2} - 1 \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{r_1}{r_2} - 1 \cdot W_1 \Rightarrow W_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right) \cdot W_1 =$$

$$\Rightarrow W_2 = \left(\frac{1 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} - 1 \right) \cdot 10 \text{ J} = 40 \text{ J}.$$

2. inačica
Iz jednadžbe

$$W_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1}$$

dobije se

$$W_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1} \Rightarrow W_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot r_1 \Rightarrow \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 = W_1 \cdot r_1.$$

Dobiveni rezultat uvrstimo u drugu jednadžbu za rad W_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 &= W_1 \cdot r_1 \\ W_2 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow W_2 = W_1 \cdot r_1 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_2 = W_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_1} \right) \Rightarrow W_2 = W_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_1} \right) \Rightarrow W_2 = W_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right) = 10 \text{ J} \cdot \left(\frac{1 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} - 1 \right) = 40 \text{ J}.$$

Vježba 140

Dva su točkasta naboja dovedena iz velike međusobne udaljenosti na udaljenost 1 m i pri tome je izvršen rad od 30 J. Koliki je rad potrebno utrošiti da se ta dva naboja dovedu od međusobne udaljenosti 1 m na 0.2 m?

Rezultat: 120 J.