

### Zadatak 281 (Lola, gimnazija)

Jedna kugla ima naboj  $Q_1 = -4 \text{ nC}$ , a druga  $Q_2 = 8 \text{ nC}$ . Kugle su međusobno udaljene 10 cm. Kolikom se silom privlače kugle u zraku, a kolikom u vodi relativne dielektričnosti  $\epsilon_r = 80$ ?

#### Rješenje 281

$$Q_1 = -4 \text{ nC} = -4 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad Q_2 = 8 \text{ nC} = 8 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad \epsilon_r = 80, \\ F = ?$$

#### Coulombov zakon

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) u vakuumu dana je relacijom:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su  $Q_1$  i  $Q_2$  naboji,  $r$  njihova međusobna udaljenost, konstanta  $k$  za vakuum

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

U sredstvu relativne permitivnosti  $\epsilon_r$  Coulombov zakon glasi

$$F = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje je  $\epsilon_r$  relativna permitivnost (relativna dielektrična konstanta) koja ovisi o sredstvu u kojem se nalaze naboji. To je broj bez dimenzije koji pokazuje koliko puta je manja sila  $F$  ako se naboji nalaze u sredstvu od one u vakuumu.

Sila kojom se kugle privlače u zraku iznosi:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 8 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0.1 \text{ m})^2} = -2.88 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Predznak minus (-) znači da je Coulombova sila privlačna (kugle su suprotnog naboja!).

Sila kojom se kugle privlače u vodi je 80 puta manja od sile kojom se privlače u zraku i iznosi:

$$F = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}{80} \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 8 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0.1 \text{ m})^2} = -3.6 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

Predznak minus (-) znači da je Coulombova sila privlačna (kugle su suprotnog naboja!).

#### Vježba 281

Jedna kugla ima naboj  $Q_1 = 4 \mu\text{C}$ , a druga  $Q_2 = 2 \mu\text{C}$ . Kugle su međusobno udaljene 3 cm. Kolikom se silom privlače kugle u zraku, a kolikom u ulju relativne dielektričnosti  $\epsilon_r = 2$ ?

**Rezultat:** 80 N, 40 N, naboji se odbijaju.

### Zadatak 282 (Lola, gimnazija)

Vodljivu kuglu polumjera 12 cm nabijenu s 55 nC električnog naboja spojimo tankim vodičem s nenabijenom kuglom polumjera 30 cm. Kolika količina naboja pritom prijeđe na veću kuglu?

#### Rješenje 282

$$r_1 = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}, \quad Q = 55 \text{ nC} = 5.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad r_2 = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}, \quad Q_2 = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti  $r$  od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}.$$

Potencijal točaka na površini nabijene kugle polumjera  $r$  jednak je

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}$$

Nakon spajanja vodičem na manjoj kugli bit će naboj  $Q_1$ , a na većoj  $Q_2$ . Ukupan naboj je  $Q$  pa vrijedi:

$$Q_1 + Q_2 = Q.$$

Budući da su kugle spojene, one imaju isti potencijal.

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} \Rightarrow k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{k} \Rightarrow Q_1 \cdot r_2 = Q_2 \cdot r_1.$$

Riješimo sustav jednačica i izračunamo  $Q_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 + Q_2 = Q \\ Q_2 \cdot r_1 = Q_1 \cdot r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_1 = Q - Q_2 \\ Q_2 \cdot r_1 = (Q - Q_2) \cdot r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_2 \cdot r_1 = (Q - Q_2) \cdot r_2 \Rightarrow Q_2 \cdot r_1 = Q \cdot r_2 - Q_2 \cdot r_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 \cdot r_1 + Q_2 \cdot r_2 = Q \cdot r_2 \Rightarrow Q_2 \cdot (r_1 + r_2) = Q \cdot r_2 \Rightarrow Q_2 \cdot (r_1 + r_2) = Q \cdot r_2 \cdot \frac{1}{r_1 + r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = Q \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 5.5 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot \frac{0.3 \text{ m}}{0.12 \text{ m} + 0.3 \text{ m}} = 3.93 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

### Vježba 282

Vodljivu kuglu polumjera 10 cm nabijenu s  $1.2 \cdot 10^{-7}$  C električnog naboja spojimo tankim vodičem s nenabijenom kuglom polumjera 5 cm. Kolika količina naboja pritom prijede na veću kuglu?

**Rezultat:**  $8 \cdot 10^{-8}$  C.

### Zadatak 283 (Lola, gimnazija)

Električna lokomotiva vozi brzinom 36 km/h i pritom razvije srednju vučnu silu 4500 N. Koliku jakost ima struja koju rabi motor ako je napon na njegovim stezaljkama 500 V, a korisnost djelovanja 90%?

#### Rješenje 283

$$v = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad F = 4500 \text{ N}, \quad U = 500 \text{ V}, \quad \eta = 90\% = 0.90,$$

$$I = ?$$

Korisnost  $\eta$  stroja je omjer korisnog rada (ili snage koju daje taj stroj) i uloženog ili dovedenog rada ili snage.

$$\eta = \frac{P_k}{P_u} \Rightarrow P_k = \eta \cdot P_u.$$

Snaga, sila i brzina mogu se povezati formulom

$$P = F \cdot v.$$

Snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije je

$$P = U \cdot I,$$

gdje je  $U$  napon između krajeva promatranog trošila, a  $I$  jakost struje.

$$\left. \begin{array}{l} P_k = F \cdot v \\ P_u = U \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow [P_k = \eta \cdot P_u] \Rightarrow F \cdot v = \eta \cdot U \cdot I \Rightarrow \eta \cdot U \cdot I = F \cdot v \Rightarrow \eta \cdot U \cdot I = F \cdot v \cdot \frac{1}{\eta \cdot U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{F \cdot v}{\eta \cdot U} = \frac{4500 \text{ N} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.9 \cdot 500 \text{ V}} = 100 \text{ A}.$$

### Vježba 283

Električna lokomotiva vozi brzinom 72 km / h i pritom razvije srednju vučnu silu 4500 N. Koliku jakost ima struja koju rabi motor ako je napon na njegovim stezaljkama 1000 V, a korisnost djelovanja 90%?

**Rezultat:** 100 A.

### Zadatak 284 (Matrix, gimnazija)

Električni vlak mase 200 t vozi brzinom 72 km / h. Otpori vuče (trenje, otpor zraka) iznose 0.6%, a napon 25 kV. Odredite potrebnu snagu i jakost struje. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

#### Rješenje 284

$$m = 200 \text{ t} = 2 \cdot 10^5 \text{ kg}, \quad v = 72 \text{ km / h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m / s}, \quad p = 0.6\% = 0.006, \\ U = 25 \text{ kV} = 2.5 \cdot 10^4 \text{ V}, \quad P = ?, \quad I = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

#### Prvi Newtonov poučak

Ako na tijelo ne djeluje nikakva sila ili je rezultanta svih sila jednaka nuli, tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Zato kažemo da je tijelo tromo.

Snaga, sila i brzina mogu se povezati formulom

$$P = F \cdot v.$$

Snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije je

$$P = U \cdot I,$$

gdje je U napon između krajeva promatranog trošila, a I jakost struje.

Kako se računa "... p% od x...?"

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Da bi se vlak gibao jednoliko vučna sila F mora biti jednaka sili otpora.

$$F = p \cdot G \Rightarrow F = 0.006 \cdot m \cdot g.$$

Potrebna snaga iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} F = 0.006 \cdot m \cdot g \\ P = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow P = 0.006 \cdot m \cdot g \cdot v = 0.006 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \\ = 235440 \text{ W} = 235.44 \text{ kW}.$$

Jakost struje je:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{235440 \text{ W}}{2.5 \cdot 10^4 \text{ V}} = 9.42 \text{ A}.$$

### Vježba 284

Električni vlak mase 100 t vozi brzinom 72 km / h. Otpori vuče (trenje, otpor zraka) iznose 0.5%, a napon 25 kV. Odredite potrebnu snagu i jakost struje. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 98.1 kW, 3.92 A.

### Zadatak 285 (Branimir, gimnazija)

Četiri jednaka točkasta naboja nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Sila između dvaju susjednih naboja jest  $F$ . Kolika je ukupna sila na pojedini naboj?

- A.  $1.41 \cdot F$     B.  $1.91 \cdot F$     C.  $2.12 \cdot F$     D.  $2.41 \cdot F$

### Rješenje 285

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q, \quad a, \quad F, \quad F_r = ?$$

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) dana je relacijom:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su  $Q_1$  i  $Q_2$  naboji,  $r$  njihova međusobna udaljenost,  $k$  konstanta u vakuumu (a praktično i u zraku). Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.

Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.

**Kvadrat** je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.

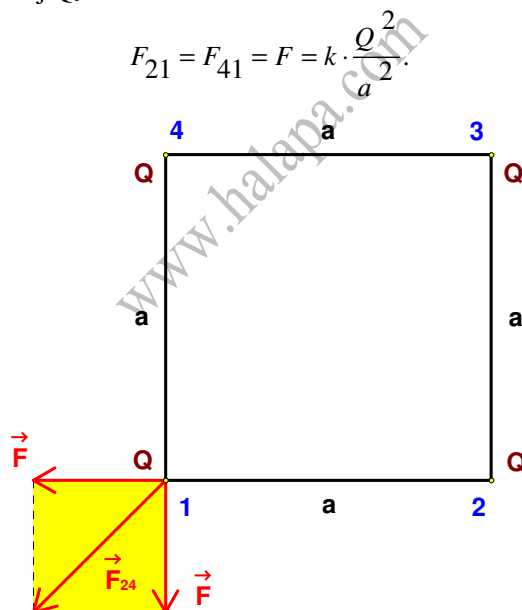
Duljina dijagonale  $d$  kvadrata stranice  $a$  izračunava se po formuli

$$d = a \cdot \sqrt{2}.$$

Naboji su jednaki pa su sile odbojne.

Da bismo izračunali ukupnu silu na, na primjer, naboj  $Q_1$  moramo izračunati silu kojom svaki od naboja  $Q_2$ ,  $Q_3$  i  $Q_4$  djeluje na  $Q_1$  i tada vektorski zbrojiti te sile.

Naboji  $Q_2$  i  $Q_4$  djeluju na naboj  $Q_1$  silom  $F$ .



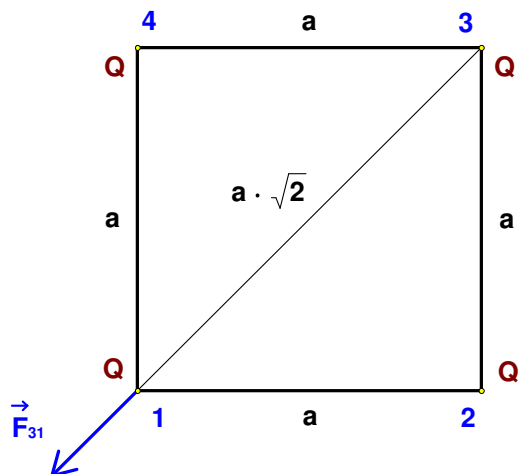
Njihova rezultantna sila je

$$F_{24} = F \cdot \sqrt{2}$$

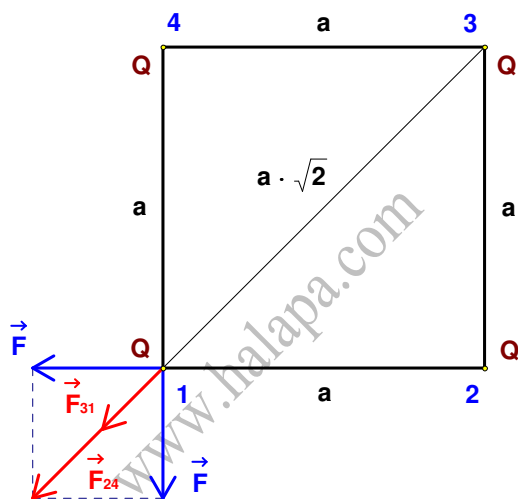
jer je  $F_{24}$  dijagonala kvadrata stranice  $F$ .

Naboj  $Q_3$  djeluje na naboj  $Q_1$  silom  $F_{31}$ .

$$\begin{aligned} F_{31} &= k \cdot \frac{Q^2}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \Rightarrow F_{31} = k \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot a^2} \Rightarrow F_{31} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{Q^2}{a^2} \Rightarrow \left[ F = k \cdot \frac{Q^2}{a^2} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_{31} = \frac{1}{2} \cdot F. \end{aligned}$$



Rezultantna sila  $F_r$  jednaka je zbroju sila  $F_{24}$  i  $F_{31}$ .



$$F_r = F_{24} + F_{31} \Rightarrow F_r = F \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot F \Rightarrow F_r = \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot F \Rightarrow F_r = 1.91 \cdot F.$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 285

Odmor!

**Rezultat:** ...

### Zadatak 286 (Ana, gimnazija)

Kroz srebrnu žicu polumjera 0.5 mm prenese se naboja 63 C za 75 minuta. Srebro ima  $5.8 \cdot 10^{28}$  slobodnih elektrona po metru kubičnom ( $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C). Kolika je srednja brzina usmjerenog gibanja elektrona kroz žicu?

### Rješenje 286

$$r = 0.5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad Q = 63 \text{ C}, \quad t = 75 \text{ min} = [75 \cdot 60] = 4500 \text{ s}, \\ n = 5.8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad v = ?$$

Jakost električne struje  $I$  količnik je električnog naboja  $Q$  i vremenskog intervala  $t$  u kojemu taj naboj prođe određenim presjekom vodiča.

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Jakost električne struje  $I$  izražava se jednadžbom

$$I = S \cdot v \cdot e \cdot n,$$

gdje je S površina poprečnog presjeka vodiča, v srednja brzina gibanja elektrona, e naboj elektrona, n koncentracija slobodnih elektrona.

Površina kruga polumjera r:

$$S = r^2 \cdot \pi.$$

$$\left. \begin{aligned} I &= S \cdot v \cdot e \cdot n \\ I &= \frac{Q}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S \cdot v \cdot e \cdot n = \frac{Q}{t} \Rightarrow S \cdot v \cdot e \cdot n = \frac{Q}{t} \cdot \frac{1}{S \cdot e \cdot n} \Rightarrow v = \frac{Q}{t \cdot S \cdot e \cdot n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ S = r^2 \cdot \pi \right] \Rightarrow v = \frac{Q}{t \cdot r^2 \cdot \pi \cdot e \cdot n} =$$

$$= \frac{63 \text{ C}}{4500 \text{ s} \cdot \left(5 \cdot 10^{-4} \text{ m}\right)^2 \cdot \pi \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5.8 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}} = 1.92 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Vježba 286

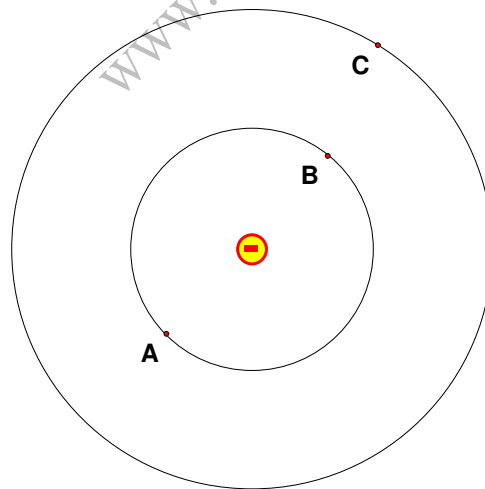
Kroz srebrnu žicu polumjera 0.5 mm prenese se naboja 126 C za 150 minuta. Srebro ima  $5.8 \cdot 10^{28}$  slobodnih elektrona po metru kubičnom ( $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C). Kolika je srednja brzina usmjerenog gibanja elektrona kroz žicu?

**Rezultat:**  $1.92 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ .

### Zadatak 287 (Maturant, strukovna škola)

Točke A, B i C nalaze se u električnom polju točkaste množine naboja kako je prikazano na slici.

- Koliki rad treba utrošiti da bismo neki naboj prenijeli iz točke A u točku B?
- Usporedi rad koji bi trebalo utrošiti da se taj naboj prenese iz A u C s radom pri prenošenju iz B u C.



### Rješenje 287

A, B, C

Potencijal zorno prikazujemo ekvipotencijalnim plohami. To je skup točaka jednakoga potencijala u prostoru. Svaka točka ekvipotencijalne plohe ima istu vrijednost potencijala. **Pomicanjem naboja po ekvipotencijalnoj plohi ne obavlja se rad.** Rad se obavlja ako se naboj premješta s jedne ekvipotencijalne plohe na drugu ekvipotencijalnu plohu. Ekvipotencijalne plohe u polju točkastog naboja su koncentrične kugle oko toga naboja.

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q onda je potencijal u točki na udaljenosti r od naboja za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}$$

Rad što se utroši pri prijenosu naboja  $q$  iz točke potencijala  $\varphi_1$  u točku potencijala  $\varphi_2$  jednak je promjeni potencijalne energije naboja, tj.

$$W = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

a)

Budući da točke A i B pripadaju istoj ekvipotencijalnoj plohi ne obavlja se rad. Rad koji treba utrošiti da bismo neki naboj  $q$  premjestili iz točke A u točku B iznosi

$$W_{AB} = 0 \text{ J.}$$

Ili ovako!

$$W_{AB} = q \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \Rightarrow [\varphi_A = \varphi_B] \Rightarrow W_{AB} = q \cdot 0 = 0 \text{ J.}$$

b)

Točke A i B leže na istoj ekvipotencijalnoj plohi. Budući da se isti naboj  $q$  prenosi iz točaka A i B na ekvipotencijalnu plohu gdje je točka C, bit će obavljen jednak rad.

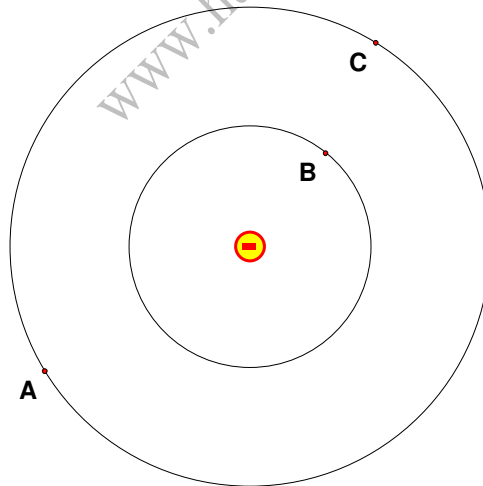
$$W_{AC} = W_{BC}.$$

Ili ovako!

$$\left. \begin{array}{l} W_{AC} = Q \cdot (\varphi_A - \varphi_C) \\ W_{BC} = Q \cdot (\varphi_B - \varphi_C) \end{array} \right\} \Rightarrow [\varphi_A = \varphi_B] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} W_{AC} = Q \cdot (\varphi_A - \varphi_C) \\ W_{BC} = Q \cdot (\varphi_A - \varphi_C) \end{array} \right\} \Rightarrow W_{AC} = W_{BC}.$$

### Vježba 287

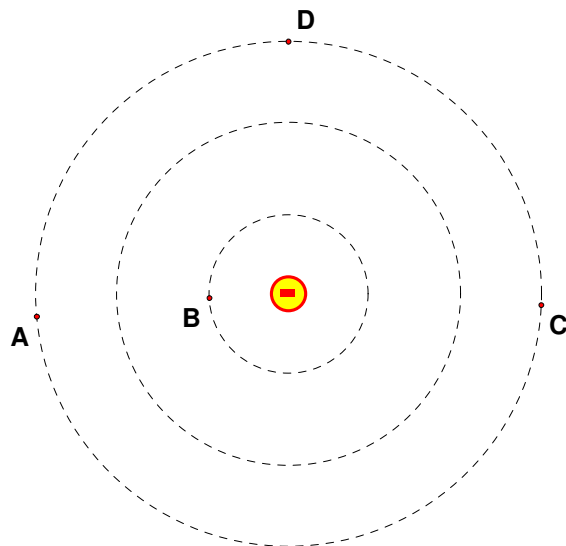
Točke A, B i C nalaze se u električnom polju točkaste množine naboja kako je prikazano na slici. Koliki rad treba utrošiti da bismo neki naboj prenijeli iz točke A u točku C?



**Rezultat:** 0 J.

### Zadatak 288 (Maturant, strukovna škola)

Na slici su prikazane ekvipotencijalne linije električnoga polja negativnoga naboja. Probni naboj  $q$  premješta se između dviju od prikazanih točaka A, B, C i D.



Koja od navedenih jednakosti vrijedi za odnos iznosa obavljenih radova pri premještanju probnoga naboja?

- A.  $W_{AB} = W_{BD}$       B.  $W_{BC} = W_{AC}$       C.  $W_{AB} = W_{AC}$       D.  $W_{BC} = W_{CD}$

### Rješenje 288

A, B, C, D

Potencijal zorno prikazujemo ekvipotencijalnim ploham. To je skup točaka jednakoga potencijala u prostoru. Svaka točka ekvipotencijalne plohe ima istu vrijednost potencijala. **Pomicanjem naboja po ekvipotencijalnoj plohi ne obavlja se rad.** Rad se obavlja ako se naboj premješta s jedne ekvipotencijalne plohe na drugu ekvipotencijalnu plohu. Ekvipotencijalne plohe u polju točkastog naboja su koncentrične kugle oko toga naboja.

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q onda je potencijal u točki na udaljenosti r od naboja za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}.$$

Rad što se utroši pri prijenosu naboja q iz točke potencijala  $\varphi_1$  u točku potencijala  $\varphi_2$  jednak je promjeni potencijalne energije naboja, tj.

$$W = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Budući da točke A, D i C pripadaju istoj ekvipotencijalnoj plohi ne obavlja se rad. Provjerimo prvu jednakost. Je li vrijedi

$$W_{AB} = W_{BD} ?$$

Točke A i D leže na istoj ekvipotencijalnoj plohi. Budući da se isti naboj q prenosi iz točaka A i D na ekvipotencijalnu plohu gdje je točka B, bit će jednak obavljeni rad.

$$W_{AB} = W_{BD}.$$

Odgovor je pod A.

Ili ovako!

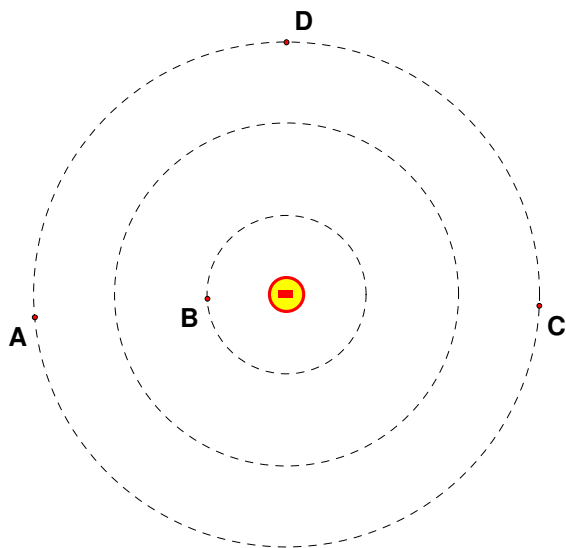
$$\left. \begin{array}{l} W_{AB} = q \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \\ W_{BD} = q \cdot (\varphi_D - \varphi_B) \end{array} \right\} \Rightarrow [\varphi_A = \varphi_D] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} W_{AB} = q \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \\ W_{BD} = q \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \end{array} \right\} \Rightarrow W_{AB} = W_{BD}.$$

Odgovor je pod A.



### Vježba 288

Na slici su prikazane ekvipotencijalne linije električnoga polja negativnoga naboja. Probni naboj  $q$  premješta se između dviju od prikazanih točaka A, B, C i D.



Koja od navedenih jednakosti vrijedi za odnos iznosa obavljenih radova pri premještanju probnoga naboja?

A.  $W_{AC} = W_{DC}$

B.  $W_{BC} = W_{AC}$

C.  $W_{AB} = W_{AC}$

D.  $W_{BC} = W_{CD}$

**Rezultat:** A.