Zadatak 001 (Anela, ekonomska škola)

Izračunaj: $\log_2 8$.

Rješenje 001

1.inačica

Iz definicije logaritma:

$$\log_b a = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a,$$

slijedi:

$$\log_2 8 = x,$$

$$2^x = 8 \;\Rightarrow\; 2^x = 2^3 \;\Rightarrow\; x = 3.$$

2.inačica

Koristimo svojstva logaritamske funkcije:

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a, \; \log_b b = 1.$$

Tada je:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3..$$

Vježba 001

Izračunaj: $\log_3 81$.

Rezultat: 4.

Zadatak 002 (Denis, ekonomska škola)

Racionaliziraj razlomak:

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}.$$

Rješenje 002

Razlomak ćemo proširiti

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} = \left[\begin{array}{l} \textit{razlomak smo proširili s } \sqrt{7}-\sqrt{5} \textit{ tako da uvijek u} \\ \textit{nazivniku dobijemo razliku kvadrata} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{7-5} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{2} = \left[\textit{kratimo s } 2\right] = \sqrt{7}-\sqrt{5}$$

Vježba 002

Racionaliziraj razlomak:

$$\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Rezultat: $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

Zadatak 003 (Denis, ekonomska škola)

Riješi logaritamsku jednadžbu:

$$\log(x + 2) + \log(x - 2) = 2 \cdot \log(x - 1).$$

Rješenje 003

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeći sustav nejednadžbi koje tražena rješenja moraju zadovoljiti:

$$x + 2 > 0 \;\;,\;\; x - 2 > 0 \;\;,\;\; x - 1 > 0.$$

Slijedi da su rješenje nejednadžbi:

$$x > -2 \;\;,\;\; x > 2 \;\;,\;\; x > 1.$$

Rješenje sustava nejednadžbi je njihov presjek, zajednički dio, a to je $x > 2$.

Logaritamsku jednadžbu rješavamo tako da koristimo pravila za logaritam umnoška i logaritam potencije:

$$\log x + \log y = \log (x \cdot y),$$

$$\log (x \cdot y) = \log x + \log y,$$

$$\log x^n = n \cdot \log x,$$
$$n \cdot \log x = \log x^n$$

pa je zato:

$$\log(x+2)+\log(x-2)=2\cdot\log(x-1),$$
$$\left[\log a+\log b=\log\left(a\cdot b\right)\right]\left[n\cdot\log a=\log a^n\right]$$
$$\log\left[\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)\right]=\log(x-1)^2\ ,$$

budući da je logaritamska funkcija injektivna,
tj. da vrijedi $\log f(x)=\log g(x)\ \Rightarrow\ f(x)=g(x)$,
izjednačimo logaritmande:

$$\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)=\left(x-1\right)^2.$$

Kako je na lijevoj strani razlika kvadrata, a na desnoj kvadrat razlike vrijedi:

$$x^2-4=x^2-2x+1\ \Rightarrow\ x^2-x^2+2x=1+4\ \Rightarrow\ 2x=5/:2\ \Rightarrow\ x=\frac{5}{2}$$

Uvjet je bio da je x > 2. Dobili smo broj veći od 2 pa je to rješenje zadane jednadžbe. Ako ne želimo na početku zadatka provesti diskusiju možemo na kraju dobivene rezultate uvrstiti u zadanu jednadžbu. Ako su svi logaritmandi pozitivni, zaključujemo da je to rješenje. Ako je neki logaritmand negativan, takav rezultat se odbacuje. Pogledajmo to na našem primjeru:

$$x=\frac{5}{2}=2.5$$
$$\log(x+2)+\log(x-2)=2\cdot\log(x-1)\ \Rightarrow\ \log(2.5+2)+\log(2.5-2)=2\cdot\log(2.5-1)\ \Rightarrow\ \log 4.5+\log 0.5=2\cdot\log 1.5$$

Logaritmandi su: 4.5, 0.5 i 1.5 pa je x = 2.5 traženo rješenje.

Vježba 003

Riješi logaritamsku jednadžbu:

$$\log(x+5)+\log(x+4)=2\cdot\log(1-x).$$

Rezultat: $x=-\frac{19}{11}$.

Zadatak 004 (Mirjana, trgovačka škola)

Napiši u obliku potencije jednog broja

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

Rješenje 004

Ponovimo pravilo množenja potencija istih eksponenata:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)^5=\left[kratimo\ razlomke\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Vježba 004

Napiši u obliku potencije jednog broja

$$\left(\frac{8}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{15}{4}\right)^7.$$

Rezultat: 6^7.

Zadatak 005 (Sanela, gimnazija)

Dokazati jednakost: $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

Rješenje 005

1.inačica

Kvadriramo obje strane jednakosti:

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2,$$
$$7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3,$$
$$7+4\sqrt{3}=7+4\sqrt{3}.$$
Znači jednakost je valjana.

2.inačica

Koristimo Lagrangeov identitet:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},\ 0<A,\ 0<B,\ B<A^2.$$

Sada računamo:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\left[\textit{najprije broj 4 unesemo pod korijen}\right]=\sqrt{7+\sqrt{4^2\cdot 3}}=$$
$$=\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{1}}{2}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}.$$

3.inačica

Budući da je zadan drugi korijen, pokušajmo izraz pod korijenom, $7 + \sqrt{3}$, napisati kao kvadrat zbroja. Za drugi član uzmemo $\sqrt{3}$, a broj 4 podijelimo brojem 2 da bismo našli prvi član. Prvi član je 2. Znači da vrijedi:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2.$$

Sada se lako dokaže jednakost:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left[\textit{kratimo eksponente korijena i radikanda}\right]=2+\sqrt{3}.$$

Vježba 005

Dokazati jednakost: $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 006 (Antonia, ekonomska škola)

Neka je a = log 2. Koliko iznosi log 25?

Rješenje 006

Riječ je o logaritmima s bazom 10:

$$\log_{10} a=\log a.$$

Uporabit ćemo sljedeće relacije:

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b,$$
$$\log a^n=n\cdot\log a,$$
$$\log 100=2.$$

Sada pišemo:

$$\log 25=\log\frac{100}{4}=\log 100-\log 4=2-\log 2^2=2-2\cdot\log 2=2-2\cdot a=2\cdot(1-a).$$

Vježba 006

Neka je a = log 4. Koliko iznosi log 25?

Rezultat: 2 – a.

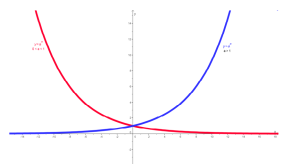
Zadatak 007 (Ivana, Ines, Bojan i Zoran, hotelijerska škola)

Riješi nejednadžbu:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} \le \frac{3}{2}.$$

Rješenje 007

Graf funkcije $\mathbf{y = a^x}$ za $\mathbf{0 < a < 1}$ i za $\mathbf{a > 1}$.



1.inačica

Najprije ponovimo teorijske činjenice.

Suprotni predznak u eksponentu potencije znači recipročnu potenciju:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b}{a} \quad , \quad \frac{a}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}.$$

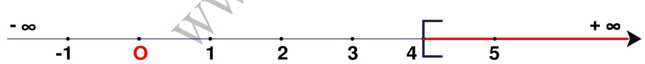
Ako za bazu b vrijedi 0 < b < 1 onda je

$$\begin{aligned} b^{f(x)} &> b^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x), \\ b^{f(x)} &\ge b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \le g(x), \\ b^{f(x)} &< b^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x), \\ b^{f(x)} &\le b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \ge g(x). \end{aligned}$$

Do rezultata dolazimo na sljedeći način:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} \le \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x-5 \ge -1 \Rightarrow x \ge -1+5 \Rightarrow x \ge 4.$$

Grafički prikaz:



Rješenje je polusegment $x \in [4, +\infty \rangle$.

2.inačica

Iznovice spomenimo se teorije.

Suprotni predznak u eksponentu potencije znači recipročnu potenciju:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b}{a} \quad , \quad \frac{a}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}.$$

Ako je eksponent 1 vrijedi:

$$a = a^1.$$

Kada se potencija potencira, eksponenti se množe, baza ostaje ista.

$$\left(b^n\right)^m = b^{n \cdot m}.$$

Ako je baza b > 1 onda vrijedi

$$\begin{aligned} b^{f(x)} &> b^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x), \\ b^{f(x)} &\ge b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \ge g(x), \\ b^{f(x)} &< b^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x), \\ b^{f(x)} &\le b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \le g(x). \end{aligned}$$

Sada je:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} \le \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{x-5} \le \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+5} \le \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+5} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+5 \le 1 \Rightarrow -x \le 1-5 \Rightarrow -x \le -4 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x \ge 4.$$

Grafički prikaz:

Rješenje je polusegment $x \in [4, +\infty \rangle$.

Vježba 007

Riješi nejednadžbu:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-4} \le \frac{4}{3}.$$

Rezultat: $x \in [3, +\infty \rangle$.

Zadatak 008 (Tena, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2^{2x}} + \sqrt{4^x} - \sqrt{8^x} = 0.$

Rješenje 008

$$\sqrt{2^{2x}} + \sqrt{4^x} - \sqrt{8^x} = 0 \Rightarrow \sqrt{2^{2x}} + \sqrt{\left(2^2\right)^x} - \sqrt{\left(2^3\right)^x} = 0 \Rightarrow \sqrt{2^{2x}} + \sqrt{2^{2x}} - \sqrt{2^{3x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\right] \Rightarrow 2^{\frac{2x}{2}} + 2^{\frac{2x}{2}} - 2^{\frac{3x}{2}} = 0 \Rightarrow 2^x + 2^x - 2^{\frac{3x}{2}} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^x = 2^{\frac{3x}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{1+x} = 2^{\frac{3x}{2}} \Rightarrow 1 + x = \frac{3}{2}x \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 + 2x = 3x \Rightarrow x = 2.$$

Vježba 008

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2^{2x}} + \sqrt{4^x} - \sqrt{16^x} = 0.$

Rezultat: x = 1.

Zadatak 009 (Viki, gimnazija)

Kolika je vrijednost izraza

$$5^{4 \cdot \log_{25} \sqrt{2}}.$$

Rješenje 009

1.inačica

Koristimo sljedeća svojstva logaritama:

$$n \cdot \log_b a = \log_b a^n \quad , \quad \log_{b^n} a^n = \log_b a \quad , \quad b^{\log_b a} = a$$

Zato je:

$$5^{4 \cdot \log_{25} \sqrt{2}} = 5^{\log_{25} \left(\sqrt{2}\right)^4} = 5^{\log_{25} 2^2} = 5^{\log_{5^2} 2^2} = 5^{\log_5 2} = 2.$$

2.inačica

Uporabit ćemo ova svojstva logaritama:

$$n \cdot \log_b a = \log_b a^n \quad , \quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad b^{\log_b a} = a$$

Sada je:

$$5^{4\cdot\log_{25}\sqrt{2}} = 5^{\log_{25}\left(\sqrt{2}\right)^4} = 5^{\log_{25}2^2} = 5^{\log_{25}4} = 5^{\frac{\log_5 4}{\log_5 25}} =$$

$$= 5^{\frac{\log_5 4}{2}} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\log_5 4} = 5^{\log_5 4^{\frac{1}{2}}} = 5^{\log_5\sqrt{4}} = 5^{\log_5 2} = 2.$$

3.inačica

$$5^{4\cdot\log_{25}\sqrt{2}} = \left(5^2\right)^{2\cdot\log_{25}\sqrt{2}} = 25^{2\cdot\log_{25}\sqrt{2}} = 25^{\log_{25}\left(\sqrt{2}\right)^2} = 25^{\log_{25}2} = 2.$$

Vježba 009

Kolika je vrijednost izraza

$$3^{4\cdot\log_9\sqrt{2}}$$

Rezultat: 2.

Zadatak 010 (Mia, hotelijerska škola)

Riješite jednadžbu: $9^{x-2}\cdot 2^{2x-1} = 8.$

Rješenje 010

1.inačica

$$\left[\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n \quad , \quad a^{n+m} = a^n\cdot a^m \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right]$$

$$9^{x-2}\cdot 2^{2x-1} = 8 \Rightarrow \left(3^2\right)^{x-2}\cdot 2^{2x-1} = 8 \Rightarrow 3^{2x-4}\cdot 2^{2x-1} = 8 \Rightarrow 3^{2x}\cdot 3^{-4}\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-1} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2x}\cdot 2^{2x}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{2^1} = 8 \Rightarrow 6^{2x}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{2} = 8 \;/\cdot 2\cdot 81 \Rightarrow 6^{2x} = 8\cdot 2\cdot 81 \Rightarrow 6^{2x} = 2^3\cdot 2\cdot 3^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{2x} = 2^4\cdot 3^4 \Rightarrow 6^{2x} = 6^4 \Rightarrow 2x = 4 \;/:2 \Rightarrow x = 2.$$

2.inačica

$$\left[a^{n\cdot m} = \left(a^n\right)^m \quad , \quad a^{n+m} = a^n\cdot a^m \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right]$$

$$9^{x-2}\cdot 2^{2x-1} = 8 \Rightarrow 9^x\cdot 9^{-2}\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-1} = 8 \Rightarrow 9^x\cdot\frac{1}{9^2}\cdot\left(2^2\right)^x\cdot\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 9^x\cdot\frac{1}{81}\cdot 4^x\cdot\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^x\cdot 4^x\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 36^x\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{2} = 8 \;/\cdot 2\cdot 81 \Rightarrow 36^x = 8\cdot 2\cdot 81 \Rightarrow 36^x = 16\cdot 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36^x = 4^2\cdot 9^2 \Rightarrow 36^x = 36^2 \Rightarrow x = 2.$$

Vježba 010

Riješite jednadžbu: $3^{x-2}\cdot 4^{x-1} = 4.$

Rezultat: $x = 2.$

Zadatak 011 (Ema, hotelijerska škola)

Nađite zbroj kvadrata rješenja jednadžbe: $27^{x^2+x-6} - 9^{3x} = 0.$

Rješenje 011

$$27^{x^2+x-6} - 9^{3x} = 0 \Rightarrow \left[\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}\right] \Rightarrow \left(3^3\right)^{x^2+x-6} - \left(3^2\right)^{3x} = 0 \Rightarrow 3^{3x^2+3x-18} = 3^{6x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x - 18 = 6x \Rightarrow 3x^2 - 3x - 18 = 0 \;/:3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$a = 1,\ b = -1,\ c = -6.$$

Pomoću Vièteovih formula dobiju se rješenja x_1 i x_2:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{-1}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-6}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{array}\right\}.$$

Tada je:

$$x_1^2 + x_2^2 = 3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13.$$

Ali, do rezultata može se doći i ovako:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1x_2 = (+1)^2 - 2 \cdot (-6)^2 = 1 + 12 = 13.$$

Vježba 011

Nađite zbroj kvadrata rješenja jednadžbe: $125^{x^2+x-6} - 25^{3x} = 0.$

Rezultat: 13.

Zadatak 012 (Maja, gimnazija)

Odredi realni broj x, ako je $\log_{\sqrt{2}} x = -6.$

Rješenje 012

Operacija kojom se iz zadane baze i vrijednosti potencije izračunava eksponent zove se logaritmiranje.

Definicija:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Rješenje zadatka:

$$\log_{\sqrt{2}} x = -6 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{-6} = x \Rightarrow \left[\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-6} = x \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Vježba 012

Odredi realni broj x, ako je $\log_{\sqrt{3}} x = -4.$

Rezultat: $\frac{1}{9}.$

Zadatak 013 (Ivana, Ivana, Dijana, Marina, Zoran, hotelijerska škola)

Odredite skup rješenja nejednadžbe:

$$\log_{\frac{1}{2}} \sin x < 0.$$

Rješenje 013

Podsjetimo se:

- $\log_b 1 = 0$
- Ako je **0 < b < 1**, vrijedi:

$$\log_b f(x) < \log_b g(x) \Rightarrow f(x) > g(x),$$

$$\log_b f(x) \le \log_b g(x) \Rightarrow f(x) \ge g(x),$$
$$\log_b f(x) > \log_b g(x) \Rightarrow f(x) < g(x),$$
$$\log_b f(x) \ge \log_b g(x) \Rightarrow f(x) \le g(x).$$

Tada je:

$$\log_{\frac{1}{2}} \sin x < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \sin x < \log_{\frac{1}{2}} 1 \Rightarrow \sin x > 1.$$

Budući da je maksimalna vrijednost funkcije sinus jednaka 1, skup rješenja nejednadžbe je prazan skup, Ø.

Vježba 013

Odredite skup rješenja nejednadžbe:

$$\log_{\frac{1}{2}} \cos x < 0.$$

Rezultat: Ø.

Zadatak 014 (Marko, gimnazija)

Nađite rješenje jednadžbe: $\log_2\left(3^x + 1\right) = 7.$

Rješenje 014

Ponovimo definiciju logaritma:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Zato je:

$$\log_2\left(3^x + 1\right) = 7 \Rightarrow 3^x + 1 = 2^7 \Rightarrow 3^x + 1 = 128 \Rightarrow 3^x = 127 \; /\log \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 127 \Rightarrow x = \frac{\log 127}{\log 3} = 4.41.$$

Vježba 014

Nađite rješenje jednadžbe: $\log_2\left(3^x + 2\right) = 7.$

Rezultat: 4.40.

Zadatak 015 (Anastazija, gimnazija)

Riješite logaritamsku jednadžbu: $\log \frac{x^2 - 1}{(2x+1)^2} + 2 \cdot \log \frac{2x+1}{x-1} - 1 = 0.$

Rješenje 015

Podsjetimo se nekih pravila za logaritme:

$$n \cdot \log a = \log a^n \quad , \quad \log a + \log b = \log(a \cdot b).$$

Tada je:

$$\log \frac{x^2 - 1}{(2x+1)^2} + 2 \cdot \log \frac{2x+1}{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow \log \frac{x^2 - 1}{(2x+1)^2} + \log \frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log \frac{x^2 - 1}{(2x+1)^2} \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow \log \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow \log \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x-1)} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow \log \frac{x+1}{x-1} = \log 10 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 10 \; / \cdot (x-1) \Rightarrow x + 1 = 10 \cdot (x-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 1 = 10x - 10 \Rightarrow 1 + 10 = 10x - x \Rightarrow 9x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{9}.$$

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu vidi se da je to rješenje.

Vježba 015

Riješite logaritamsku jednadžbu: $\log\dfrac{x^2-1}{(2x+1)^2}+2\cdot\log\dfrac{2x+1}{x-1}=0.$

Rezultat: Ø.

Zadatak 016 (Ines, hotelijerska škola)

Nađi vrijednost izraza: log tg 1° + log tg 2° + log tg 3° + ... + log tg 87° + log tg 88° + log tg 89.

Rješenje 016

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \log \operatorname{tg} 87^\circ + \log \operatorname{tg} 88^\circ + \log \operatorname{tg} 89 =$$

$$= [\log a + \log b = \log (a \cdot\ )] =$$

$$= \log [\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ] =$$

$$= \log [(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ] =$$

$$= [\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha)] =$$

$$= \log [(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ] =$$

$$= [\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1] =$$

$$= \log [1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1] = \log 1 = 0.$$

Vježba 016

Nađi vrijednost izraza: log tg 1° + log ctg 1° + log tg 2° + log ctg 2°.

Rezultat: 0.

Zadatak 017 (Zoran, Marina, Ivana, Dijana, hotelijerska škola)

Ako je $y^{\frac{1}{x}}=0.1,\ \ y^x=0.0001,$ koliko iznosi | x | + | log y | ?

Rješenje 017

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} y^{\frac{1}{x}}=0.1 \\ y^x=0.0001 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^{\frac{1}{x}}=0.1 \ /^{x} \\ y^x=0.0001 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(y^{\frac{1}{x}}\right)^x=0.1^x \\ y^x=0.0001 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0.1^x \\ y^x=0.0001 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(0.1^x\right)^x=0.0001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0.1)^{x^2}=0.1^4 \Rightarrow x^2=4 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2.$$

Za $x_1 = 2$ => $y_1 = 0.1^2 = 0.01$ => $\log y_1 = -2$.
Za $x_2 = -2$ => $y_1 = 0.1^{-2} = 100$ => $\log y_2 = 2$. Zato je:

$$| x | + | \log y | = | \pm 2 | + | \pm 2 | = 2 + 2 = 4.$$

Vježba 017

Ako je $y^{\frac{1}{x}}=0.1,\ \ y^x=0.0001,$ koliko iznosi | x | – | log y | ?

Rezultat: 0.

Zadatak 018 (Anastazija, gimnazija)

Koliko iznosi zbroj rješenja jednadžbe: (log x – 2) · (log x – 3) = 0?

Rješenje 018

Ponovimo!

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

1.inačica

Prvo provedemo diskusiju:

$$x > 0.$$

$$(\log x - 2) \cdot (\log x - 3) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x - 2 = 0 \\ \log x - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 2 \\ \log x = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 10^2 \\ x_2 = 10^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 100 \\ x_2 = 1000 \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$x_1 + x_2 = 100 + 1000 = 1100.$$

2.inačica

Prvo provedemo diskusiju:

$$x > 0.$$

Uvedemo supstituciju (zamjenu) **log x = t** i riješimo dobivenu kvadratnu jednadžbu po nepoznanici t:

$(t - 2) \cdot (t - 3) = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 2t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow$ [**Vièteove formule**] $\Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 2.$

Ili riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 5 \cdot t + 6 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 - 5 \cdot t + 6 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -5 \;,\; c = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -5 \;,\; c = 6 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{5+1}{2} \\ t_2 = \dfrac{5-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{6}{2} \\ t_2 = \dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\log x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 10^3 = 1000,$$
$$\log x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 10^2 = 100.$$
$$x_1 + x_2 = 1000 + 100 = 1100.$$

Vježba 018

Koliko iznosi dvostruki zbroj rješenja jednadžbe: $(\log x - 2) \cdot (\log x - 3) = 0$?

Rezultat: 2200.

Zadatak 019 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko iznosi x + y ako je $\log_4 \log_2 \log_3 x = \log_3 \log_2 \log_4 y = 0$?

Rješenje 019

Napišemo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} \log_4 \log_2 \log_3 x = 0 \\ \log_3 \log_2 \log_4 y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_2 \log_3 x = 4^0 \\ \log_2 \log_4 y = 3^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_2 \log_3 x = 1 \\ \log_2 \log_4 y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_3 x = 2^1 \\ \log_4 y = 2^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_4 y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3^2 \\ y = 4^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = 9 + 16 = 25.$$

Vježba 019

Koliko iznosi y – x ako je $\log_4 \log_2 \log_3 x = \log_3 \log_2 \log_4 y = 0$?

Rezultat: 7.

Zadatak 020 (Anastazija, gimnazija)

Izračunaj: $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

Rješenje 020

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\cdot\frac{x^2-\sqrt{x}}{1}=\left[x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x},\ x^2=\left(\sqrt{x}\right)^4=\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^3\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^3-\sqrt{x}}{1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\cdot\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}\cdot\left[\left(\sqrt{x}\right)^3-1\right]}{1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{1}=\left[a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)\right]=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}+1\right]}{1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left[x+\sqrt{x}+1\right]}{1}=\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1.$$

Vježba 020

Izračunaj: $\left(\sqrt{x}+1\right)^2.$

Rezultat: $x+2\sqrt{x}+1.$