Zadatak 261 (Tea, gimnazija)

Izračunaj: $2^{2+\log_4 3}$.

Rješenje 261

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \xrightarrow{} \qquad a = b^c$$

$$\boxed{b^{\log_b a} = a.}$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \quad , \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$2^{2+\log_4 3} = 2^2 \cdot 2^{\log_4 3} = 4 \cdot 2^{\log_4 3} = 4 \cdot \left(\sqrt{4}\right)^{\log_4 3} = 4 \cdot \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_4 3} = 4 \cdot \left(4^{\log_4 3}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{3}.$$

Vježba 261

Izračunaj: $2^{3+\log_4 3}$.

Rezultat: $8 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 262 (Ofelija ☺, ekonomska škola)

Prema zakonu zaboravljanja, ako je neko gradivo naučeno s uspješnosti U_0, tada t mjeseci nakon toga uspješnost U rješavanja toga gradiva zadovoljava jednadžbu $\log U = \log U_0 - c \cdot \log(t+1)$, gdje je c konstanta koja ovisi o vrsti gradiva. Uspješnost U mjeri se brojem postignutih bodova na ispitu. Tin je na ispitu iz matematike postigao 82 boda. Nakon godinu dana ponovno piše ispit koji provjerava isto gradivo. Koliko bi bodova prema zakonu zaboravljanja postigao ako je c = 0.3?

A. 38   *B.* 44   *C.* 59   *D.* 78

Rješenje 262

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \xrightarrow{} \qquad a = b^c$$

$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

$$\log f(x) = \log g(x) \ \Rightarrow \ f(x) = g(x).$$

$$\log U = \log U_0 - c \cdot \log(t+1) \Rightarrow \log U = \log U_0 - \log(t+1)^c \Rightarrow \log U = \log \frac{U_0}{(t+1)^c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{U_0}{(t+1)^c} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_0 = 82 \\ t = 1 \ god = 12 \ mj \\ c = 0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \frac{82}{(12+1)^{0.3}} \Rightarrow U = \frac{82}{13^{0.3}} \Rightarrow U = 37.9866 \Rightarrow U \approx 38.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 262

Prema zakonu zaboravljanja, ako je neko gradivo naučeno s uspješnosti U_0, tada t mjeseci nakon toga uspješnost U rješavanja toga gradiva zadovoljava jednadžbu $\log U = \log U_0 - c \cdot \log(t+1)$, gdje je c konstanta koja ovisi o vrsti gradiva. Uspješnost U mjeri se brojem postignutih bodova na ispitu. Tin je na ispitu iz matematike postigao 82 boda. Nakon dvije godine ponovno piše ispit koji provjerava isto gradivo. Koliko bi bodova prema zakonu zaboravljanja postigao ako je c = 0.3?

$$A.\ 36 \qquad B.\ 31 \qquad C.\ 41 \qquad D.\ 58$$

Rezultat: B.

Zadatak 263 (Ofelija ☺, ekonomska škola)

Riješite eksponencijalnu nejednadžbu: $8 \cdot 16^x \ge 7 \cdot 14^x$.

$$A.\ x > -1 \qquad B.\ x \ge -1 \qquad C.\ x < -1 \qquad D.\ x \le -1$$

Rješenje 263

Ponovimo!

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n .$$

$$\left.\begin{array}{l} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a^{f(x)} \le a^{g(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow [a > 1] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) \ge g(x) \\ f(x) < g(x) \\ f(x) \le g(x) \end{array}\right\}.$$

$$8 \cdot 16^x \ge 7 \cdot 14^x \Rightarrow 8 \cdot 16^x \ge 7 \cdot 14^x \ / \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow 16^x \ge \frac{7}{8} \cdot 14^x \Rightarrow 16^x \ge \frac{7}{8} \cdot 14^x \ / \cdot \frac{1}{14^x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16^x}{14^x} \ge \frac{7}{8} \Rightarrow \left(\frac{16}{14}\right)^x \ge \frac{7}{8} \Rightarrow \left(\frac{16}{14}\right)^x \ge \frac{7}{8} \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x \ge \frac{7}{8} \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x \ge \left(\frac{7}{8}\right)^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x \ge \left(\frac{8}{7}\right)^{-1} \Rightarrow x \ge -1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 263

Riješite eksponencijalnu nejednadžbu: $8 \cdot 16^x > 7 \cdot 14^x$.

$$A.\ x > -1 \qquad B.\ x \ge -1 \qquad C.\ x < -1 \qquad D.\ x \le -1$$

Rezultat: A.

Zadatak 264 (Franjo, strukovna škola)

Ako za svaki x > 0 vrijedi $\log_a x = 2 \cdot \log_b x$, tada brojevi a i b zadovoljavaju uvjet:

$$A.\ a \cdot b \qquad B.\ \frac{a}{b} \qquad C.\ b = a^2 \qquad D.\ a = b^2$$

Rješenje 264

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

$$\log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$\log_a x = 2 \cdot \log_b x \Rightarrow \frac{1}{\log_x a} = 2 \cdot \frac{1}{\log_x b} \Rightarrow \frac{1}{\log_x a} = \frac{2}{\log_x b} \Rightarrow \log_x b = 2 \cdot \log_x a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x b = \log_x a^2 \Rightarrow b = a^2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 264

Ako za svaki x > 0 vrijedi $2 \cdot \log_a x = \log_b x,$ tada brojevi a i b zadovoljavaju uvjet:

$$A.\ a \cdot b \qquad B.\ \frac{a}{b} \qquad C.\ b = a^2 \qquad D.\ a = b^2$$

Rezultat: D.

Zadatak 265 (Mimi, Ivonchy, HTT)

Riješite jednadžbu: $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 25.$

$$A.\ 5 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 10 \qquad D.\ 1$$

Rješenje 265

Ponovimo!

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 25 \Rightarrow 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 25 \ / \cdot \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = \frac{25}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = \frac{25}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{5} = 2 \Rightarrow \frac{x}{5} = 2 \ / \cdot 5 \Rightarrow x = 10.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 265

Riješite jednadžbu: $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 50.$

$$A.\ 5 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 10 \qquad D.\ 1$$

Rezultat: A.

Zadatak 266 (Mimi, Ivonchy, HTT)

Riješite jednadžbu: $2^x \cdot 5^x = 0.1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5.$

Rješenje 266

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad 0.1 = 10^{-1} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$2^x \cdot 5^x = 0.1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5 \Rightarrow (2 \cdot 5)^x = 10^{-1} \cdot 10^{5 \cdot (x-1)} \Rightarrow 10^x = 10^{-1} \cdot 10^{5 \cdot x - 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^x = 10^{-1+5 \cdot x - 5} \Rightarrow 10^x = 10^{5 \cdot x - 6} \Rightarrow x = 5 \cdot x - 6 \Rightarrow x - 5 \cdot x = -6 \Rightarrow -4 \cdot x = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot x = -6 \;/ : (-4) \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vježba 266

Riješite jednadžbu: $2^x \cdot 5^x = \left(10^{x-1}\right)^5$.

Rezultat: $x = \frac{5}{4}$.

Zadatak 267 (Ive, gimnazija)

Riješite jednadžbu $\log^4 (x-1)^2 + \log^2 (x-1)^3 = 25.$

Rješenje 267

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad a^2 \geq 0 \;,\; a \in R.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

dana su izrazima

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

ili kraće

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Bikvadratna jednadžba je jednadžba četvrtog stupnja oblika

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \;,\; a \neq 0,$$

gdje su koeficijenti a, b i c realni brojevi. Zamjenom

$$x^2 = t$$

rješavanje bikvadratne jednadžbe prevodimo na rješavanje kvadratne jednadžbe

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0 \;,\; a \neq 0.$$

Bikvadratna jednadžba ima uvijek četiri rješenja. Iz kvadratne jednadžbe dobiju se rješenja t_1 i t_2 pa bikvadratna jednadžba ima rješenja

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \quad , \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}.$$

Pritom vrijedi:

- ako je $t_1 \geq 0$ i $t_2 \geq 0$, sva su četiri rješenja realna,
- ako je $t_1 \geq 0$ i $t_2 < 0$ (ili $t_1 < 0$ i $t_2 \geq 0$) dva su rješenja realna, a dva su konjugirano kompleksni brojevi,

- ako je $t_1 < 0$ i $t_2 < 0$ rješenja su dva para konjugirano kompleksnih brojeva.

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

Prvo moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeću nejednadžbu koju traženo rješenje mora zadovoljiti:

$$x-1>0 \;\Rightarrow\; x>1.$$

Tražimo rješenje jednadžbe:

$$\log^4 (x-1)^2 + \log^2 (x-1)^3 = 25 \;\Rightarrow\; \left(\log (x-1)^2\right)^4 + \left(\log (x-1)^3\right)^2 = 25 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(2\cdot \log (x-1)\right)^4 + \left(3\cdot \log (x-1)\right)^2 = 25 \;\Rightarrow\; 2^4 \cdot \left(\log (x-1)\right)^4 + 3^2 \cdot \left(\log (x-1)\right)^2 = 25 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 16\cdot \log^4 (x-1) + 9\cdot \log^2 (x-1) = 25 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{bikvadratna} \\ \text{jednadžba} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; 16\cdot \log^4 (x-1) + 9\cdot \log^2 (x-1) - 25 = 0.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$t = \log^2 (x-1).$$

$$\left.\begin{matrix} 16\cdot \log^4 (x-1) + 9\cdot \log^2 (x-1) - 25 = 0 \\ t = \log^2 (x-1) \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; 16\cdot t^2 + 9\cdot t - 25 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 16\cdot t^2 + 9\cdot t - 25 = 0 \\ a = 16 \;,\; b = 9 \;,\; c = -25 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a = 16 \;,\; b = 9 \;,\; c = -25 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 16\cdot (-25)}}{2\cdot 16} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+1600}}{32} \;\Rightarrow\; t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{1681}}{32} \;\Rightarrow\; t_{1,2} = \frac{-9 \pm 41}{32} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{-9+41}{32} \\ t_2 = \dfrac{-9-41}{32} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{32}{32} \\ t_2 = -\dfrac{50}{32} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{32}{32} \\ t_2 = -\dfrac{50}{32} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = -\dfrac{25}{16} \end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni (supstituciji).

- $$\left.\begin{matrix} t = \log^2 (x-1) \\ t = 1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \log^2 (x-1) = 1 \;\Rightarrow\; \log^2 (x-1) = 1 \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; \log (x-1) = \pm\sqrt{1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \log (x-1) = \pm 1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} \log (x-1) = 1 \\ \log (x-1) = -1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x-1 = 10^1 \\ x-1 = 10^{-1} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x-1 = 10 \\ x-1 = 0.1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x = 10+1 \\ x = 0.1+1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x = 11 \\ x = 1.1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{to su rješenja jer} \\ \text{zadovoljavaju uvjet } x>1 \end{bmatrix}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} t=\log^2(x-1) \\ t=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \log^2(x-1)=-1. \left[\begin{array}{l} \text{nema smisla jer kvadrat realnog broja} \\ \text{može biti samo pozitivan broj ili nula} \end{array}\right]$$

Vježba 267

Riješite jednadžbu $\log x+\log(x-3)=2\cdot\log(6-x)$.

Rezultat: x = 4.

Zadatak 268 (M-K-N, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x}=2.$

Rješenje 268

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^0=1.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x}=2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^{1-x}=2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-1+x}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=2 \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=2 \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=2 \;/:2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{0} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Vježba 268

Riješite jednadžbu: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2-x}=2.$

Rezultat: x = 2.

Zadatak 269 (M-K-N, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $2^x\cdot 3^{x+1}\cdot 5^{x-3}=21.6.$

Rješenje 269

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$2^x \cdot 3^{x+1} \cdot 5^{x-3} = 21.6 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x \cdot 3^1 \cdot 5^x \cdot 5^{-3} = \frac{216}{10} \Rightarrow 2^x \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{216}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x \cdot 3 \cdot \frac{1}{125} = \frac{108}{5} \Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x \cdot \frac{3}{125} = \frac{108}{5} \Rightarrow 30^x \cdot \frac{3}{125} = \frac{108}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30^x \cdot \frac{3}{125} = \frac{108}{5} \;/ \cdot \frac{125}{3} \Rightarrow 30^x = \frac{108}{5} \cdot \frac{125}{3} \Rightarrow 30^x = \frac{108}{5} \cdot \frac{125}{3} \Rightarrow 30^x = \frac{36}{5} \cdot \frac{125}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30^x = \frac{36}{5} \cdot \frac{125}{1} \Rightarrow 30^x = \frac{36}{1} \cdot \frac{25}{1} \Rightarrow 30^x = \frac{900}{1} \Rightarrow 30^x = 900 \Rightarrow 30^x = 30^2 \Rightarrow x = 2.$$

Vježba 269

Riješite jednadžbu: $3 \cdot 6^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} = 21.6.$

Rezultat: x = 2.

Zadatak 270 (M-K-N, gimnazija)

Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x) = \log_2(x+2) + 1$ siječe koordinatne osi.

$A. \left(-\frac{3}{2}, 0\right), (0, 1)$ $\quad B. \left(-\frac{3}{2}, 0\right), (0, 2)$ $\quad C. \left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 1)$ $\quad D. \left(\frac{3}{2}, 0\right), (0, 2)$

Rješenje 270

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ordinata svake točke T na x osi jednaka je 0. Točka ima koordinate T(x, 0).
Apscisa svake točke T na y osi jednaka je 0. Točka ima koordinate T(0, y).
Ako graf zadane funkcije siječe x os, ordinata sjecišta jednaka je nuli, y = 0

$$\left.\begin{array}{l} y = \log_2(x+2) + 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_2(x+2) + 1 = 0.$$

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeću nejednadžbu koju traženo rješenje mora zadovoljiti:

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2.$$

Sada je:

$$\log_2(x+2) + 1 = 0 \Rightarrow \log_2(x+2) = -1 \Rightarrow x + 2 = 2^{-1} \Rightarrow x + 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-4}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Koordinate sjecišta su:

$$S_1(x, y) = S_1\left(-\frac{3}{2}, 0\right).$$

Ako graf zadane funkcije siječe y os, apscisa sjecišta jednaka je nuli, x = 0.

$$\left.\begin{array}{l} y=\log_2(x+2)+1 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\log_2(0+2)+1 \Rightarrow y=\log_2 2+1 \Rightarrow y=1+1 \Rightarrow y=2.$$

Koordinate sjecišta su:

$$S_2(x,\ y)=S_2(0,\ 2).$$

Graf funkcije $f(x)=\log_2(x+2)+1$ siječe koordinatne osi u točkama:

$$S_1\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)\ ,\ S_2(0,\ 2).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 270

Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x)=\log_3(x+3)+1$ siječe koordinatne osi.

$A.\ \left(-\frac{8}{3},\ 0\right),\ (0,\ 1)$ $\quad B.\ \left(-\frac{8}{3},\ 0\right),\ (0,\ 2)$ $\quad C.\ \left(\frac{8}{3},\ 0\right),\ (0,\ 1)$ $\quad D.\ \left(\frac{8}{3},\ 0\right),\ (0,\ 2)$

Rezultat: B.

Zadatak 271 (Irena, srednja škola)

Temperatura u peći raste po zakonu $T(t)=12\cdot 2^{3\cdot t}$ gdje je t vrijeme u satima.

a) Kolika će temperatura biti u peći nakon sat i pol?
b) Koliko vremena treba proći da se temperatura popne na 192 °C?

Rješenje 271

Ponovimo!

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x) \quad , \quad 1\ h=60\ \text{min}.$$

a) Temperaturu peći izračunamo tako da vrijeme od sat i pol, t = 1.5 h, uvrstimo u formulu za temperaturu.

$$\left.\begin{array}{l} t=1.5 \\ T(t)=12\cdot 2^{3\cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow T(1.5)=12\cdot 2^{3\cdot 1.5} \Rightarrow T(1.5)=12\cdot 2^{4.5} \Rightarrow [\ \ ] \Rightarrow T(1.5)\approx 271.53\ {}^0C.$$

b) Vrijeme za koje se temperatura popne na 192 °C iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} T(t)=12\cdot 2^{3\cdot t} \\ T(t)=192 \end{array}\right\} \Rightarrow 12\cdot 2^{3\cdot t}=192 \Rightarrow 12\cdot 2^{3\cdot t}=192\ /:12 \Rightarrow 2^{3\cdot t}=16 \Rightarrow 2^{3\cdot t}=2^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot t=4 \Rightarrow 3\cdot t=4\ /:3 \Rightarrow t=\frac{4}{3}.$$

Vrijeme za koje se temperatura popne na 192 °C iznosi:

$$t=\frac{4}{3}\ h \Rightarrow t=1\frac{1}{3}\ h \Rightarrow t=1\ h+\frac{1}{3}\ h \Rightarrow t=1\ h+\frac{1}{3}\cdot 60\ \text{min} \Rightarrow t=1\ h\ 20\ \text{min}.$$

Vježba 271

Temperatura u peći raste po zakonu $T(t)=12\cdot 2^{3\cdot t}$ gdje je t vrijeme u satima. Kolika će temperatura biti u peći nakon dva sata?

Rezultat: 768 °C.

Zadatak 272 (Tanja, srednja škola)

Koliko je $\log \sqrt[9]{5}$ ako je $a = \log 8$?

$$A.\ \frac{a-3}{9} \qquad B.\ \frac{3-a}{27} \qquad C.\ \frac{3}{1-a} \qquad D.\ \frac{a-1}{3-a}$$

Rješenje 272

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \ \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

1.inačica

$$\log \sqrt[9]{5} = \frac{1}{9} \cdot \log 5 = \frac{1}{9} \cdot \log \frac{10}{2} = \frac{1}{9} \cdot (\log 10 - \log 2) = \frac{1}{9} \cdot (1 - \log 2) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 2\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 2\right) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \log 2^3\right) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \log 8\right) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot a\right) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{a}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{a}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3-a}{3} = \frac{3-a}{27}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Iz jednakosti

$$a = \log 8$$

dobije se:

$$a = \log 8 \ \Rightarrow \ a = \log 2^3 \ \Rightarrow \ a = 3 \cdot \log 2 \ \Rightarrow \ a = 3 \cdot \log 2 \ / \cdot \frac{1}{3} \ \Rightarrow \ \log 2 = \frac{a}{3}.$$

Sada je:

$$\log \sqrt[9]{5} = \frac{1}{9} \cdot \log 5 = \frac{1}{9} \cdot \log \frac{10}{2} = \frac{1}{9} \cdot (\log 10 - \log 2) = \frac{1}{9} \cdot (1 - \log 2) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{a}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{a}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3-a}{3} = \frac{3-a}{27}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 272

Koliko je $\log \sqrt[7]{5}$ ako je $a = \log 8$?

$$A.\ \frac{a-3}{21} \qquad B.\ \frac{3-a}{21} \qquad C.\ \frac{7}{1-a} \qquad D.\ \frac{a-1}{7-a}$$

Rezultat: B.

Zadatak 273 (Tanja, srednja škola)

$$\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c)-\log(c\cdot a)=$$

$A.\ \log(a\cdot b\cdot c)\qquad B.\ -2\cdot\log a\qquad C.\ -2\cdot\log b\qquad D.\ -2\cdot\log c$

Rješenje 273

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c\qquad \log_b a=b^c\ \to\qquad a=b^c$$

Dekadski logaritam

$$\log_{10}x=\log x.$$

$$\log(x\cdot y)=\log x+\log y\quad,\quad \log\frac{x}{y}=\log x-\log y\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad \log a^n=n\cdot\log a.$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c)-\log(c\cdot a)=\log a+\log b-(\log b+\log c)-(\log c+\log a)=$$

$$=\log a+\log b-\log b-\log c-\log c-\log a=\log a+\log b-\log b-\log c-\log c-\log a=-2\cdot\log c.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c)-\log(c\cdot a)=(\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c))-\log(c\cdot a)=\log\frac{a\cdot b}{b\cdot c}-\log(c\cdot a)=$$

$$=\log\frac{a\cdot b}{b\cdot c}-\log(c\cdot a)=\log\frac{a}{c}-\log(c\cdot a)=\log\frac{\frac{a}{c}}{c\cdot a}=\log\frac{\frac{a}{c}}{\frac{c\cdot a}{1}}=\log\frac{a}{a\cdot c^2}=$$

$$=\log\frac{a}{a\cdot c^2}=\log\frac{1}{c^2}=\log c^{-2}=-2\cdot\log c.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

$$\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c)-\log(c\cdot a)=\log(a\cdot b)-(\log(b\cdot c)+\log(c\cdot a))=\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c\cdot c\cdot a)=$$

$$=\log(a\cdot b)-\log\left(a\cdot b\cdot c^2\right)=\log\frac{a\cdot b}{a\cdot b\cdot c^2}=\log\frac{a\cdot b}{a\cdot b\cdot c^2}=\log\frac{1}{c^2}=\log c^{-2}=-2\cdot\log c.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 273

$$\log\frac{1}{b\cdot c}+\log\frac{1}{c\cdot a}-\log\frac{1}{a\cdot b}=$$

$A.\ \log(a\cdot b\cdot c)\qquad B.\ -2\cdot\log a\qquad C.\ -2\cdot\log b\qquad D.\ -2\cdot\log c$

Rezultat: D.

Zadatak 274 (Doris, srednja škola)

Riješite nejednadžbu $6^x - 16 \cdot 3^x < 0$.

Rješenje 274

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x) \; , \; a > 1.$$

$$6^x - 16 \cdot 3^x < 0 \Rightarrow 6^x < 16 \cdot 3^x \Rightarrow 6^x < 16 \cdot 3^x \; / \cdot \frac{1}{3^x} \Rightarrow \frac{6^x}{3^x} < 16 \Rightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^x < 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x < 16 \Rightarrow 2^x < 2^4 \Rightarrow x < 4.$$

$$x \in \langle -\infty, 4 \rangle.$$

Vježba 274

Riješite nejednadžbu $10^x - 16 \cdot 5^x < 0$.

Rezultat: $x < 4$.

Zadatak 275 (Darko, srednja škola)

Izračunaj: $\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \frac{1}{\log_5 100!} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} 100!}$, gdje je $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Rješenje 275

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$\log_b b = 1 \quad , \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , \quad \log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b \quad , \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \quad , \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

$1! = 1$,
$2! = 1 \cdot 2$,
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$,
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$,
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$,
$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ itd.

$$\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \frac{1}{\log_5 100!} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} 100!} =$$

$$= \log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \log_{100!} 4 + \log_{100!} 5 + \ldots + \log_{100!} 100 = \log_{100!} (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 100) =$$

$$= \log_{100!} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 100) = \log_{100!} 100! = 1.$$

Vježba 275

Izračunaj: $\frac{1}{\log_2 100!}+\frac{1}{\log_3 100!}+\frac{1}{\log_4 100!}+\frac{1}{\log_5 100!}+\ldots+\frac{1}{\log_{100} 100!}-\frac{1}{\log_{100} 100}$,

gdje je $100!=100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Rezultat: 0.

Zadatak 276 (Antonio, srednja škola)

Nađi realno rješenje jednadžbe $\frac{1}{7^{1+x}-3\cdot 2^{3+x}}=\frac{1}{5\cdot 7^{x}+2^{-1+x}}$.

Rješenje 276

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}.$$

$$\frac{a^{n}}{b^{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)}\Rightarrow f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{1}{7^{1+x}-3\cdot 2^{3+x}}=\frac{1}{5\cdot 7^{x}+2^{-1+x}}\Rightarrow 7^{1+x}-3\cdot 2^{3+x}=5\cdot 7^{x}+2^{-1+x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7^{1}\cdot 7^{x}-3\cdot 2^{3}\cdot 2^{x}=5\cdot 7^{x}+2^{-1}\cdot 2^{x}\Rightarrow 7\cdot 7^{x}-3\cdot 8\cdot 2^{x}=5\cdot 7^{x}+\frac{1}{2}\cdot 2^{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\cdot 7^{x}-24\cdot 2^{x}=5\cdot 7^{x}+\frac{1}{2}\cdot 2^{x}\Rightarrow 7\cdot 7^{x}-24\cdot 2^{x}=5\cdot 7^{x}+\frac{1}{2}\cdot 2^{x}\ /\cdot 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\cdot 7^{x}-48\cdot 2^{x}=10\cdot 7^{x}+2^{x}\Rightarrow 14\cdot 7^{x}-10\cdot 7^{x}=2^{x}+48\cdot 2^{x}\Rightarrow(14-10)\cdot 7^{x}=(1+48)\cdot 2^{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot 7^{x}=49\cdot 2^{x}\Rightarrow 4\cdot 7^{x}=49\cdot 2^{x}\ /\cdot\frac{1}{4\cdot 2^{x}}\Rightarrow\frac{7^{x}}{2^{x}}=\frac{49}{4}\Rightarrow\left(\frac{7}{2}\right)^{x}=\left(\frac{7}{2}\right)^{2}\Rightarrow x=2.$$

Vježba 276

Nađi realno rješenje jednadžbe $\frac{1}{7^{1+x}-6\cdot 2^{2+x}}=\frac{1}{5\cdot 7^{x}+2^{-1+x}}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 277 (Ana, gimnazija)

Pojednostavnite izraz: $\left(\log_a b\right)^{-1}+\left(\log_{a^2} b\right)^{-1}+\left(\log_{a^3} b\right)^{-1}+\left(\log_{a^4} b\right)^{-1}$.

Rješenje 277

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c\qquad \log_b a=b^{c}\qquad a=b^{c}$$
$$\rightarrow$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

1.inačica

$$\left(\log_a b\right)^{-1} + \left(\log_{a^2} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^3} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^4} b\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 =$$

$$= \log_b \left(a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4\right) = \log_b \left(a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4\right) = \log_b a^{1+2+3+4} = \log_b a^{10} = 10 \cdot \log_b a.$$

2.inačica

$$\left(\log_a b\right)^{-1} + \left(\log_{a^2} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^3} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^4} b\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 =$$

$$= \log_b a + 2 \cdot \log_b a + 3 \cdot \log_b a + 4 \cdot \log_b a = 10 \cdot \log_b a.$$

3.inačica

$$\left(\log_a b\right)^{-1} + \left(\log_{a^2} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^3} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^4} b\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{\log_b a}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\log_b a^2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\log_b a^3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\log_b a^4}\right)^{-1} =$$

$$= \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 =$$

$$= \log_b \left(a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4\right) = \log_b \left(a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4\right) = \log_b a^{1+2+3+4} = \log_b a^{10} = 10 \cdot \log_b a.$$

Vježba 277

Pojednostavnite izraz $\left(\log_a b\right)^{-1} + \left(\log_{a^2} b\right)^{-1} + \left(\log_{a^3} b\right)^{-1}.$

Rezultat: $6 \cdot \log_b a.$

Zadatak 278 (Marko, tehnička škola)

Riješi nejednadžbu: $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-3) \le 3.$

Rješenje 278

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \to \qquad a = b^c$$

$$\log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y) \quad , \quad \log_b b^n = n.$$

$$\log_b f(x) \le \log_b g(x) \ , \ b > 1 \ \Rightarrow \ f(x) \le g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Diskusija!

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je b > 0 i b ≠ 1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeće nejednadžbe koje tražena rješenja moraju zadovoljiti:

$$\left.\begin{matrix} x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x > 1 \\ x > 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{presjek} \\ \text{zajednički dio} \\ \text{oba rješenja} \end{bmatrix} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in \langle 3, +\infty \rangle.$$

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 3) \le 3 \ \Rightarrow \ \log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 3) \le \log_2 2^3 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 3) \le \log_2 8 \ \Rightarrow \ \log_2 (x - 1) \cdot (x - 3) \le \log_2 8 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x - 1) \cdot (x - 3) \le 8 \ \Rightarrow \ x^2 - 3 \cdot x - x + 3 \le 8 \ \Rightarrow \ x^2 - 3 \cdot x - x + 3 - 8 \le 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 4 \cdot x - 5 \le 0.$$

Trebamo riješiti nejednadžbu

$$x^2 - 4 \cdot x - 5 \le 0.$$

Najprije odredimo nultočke ove funkcije:

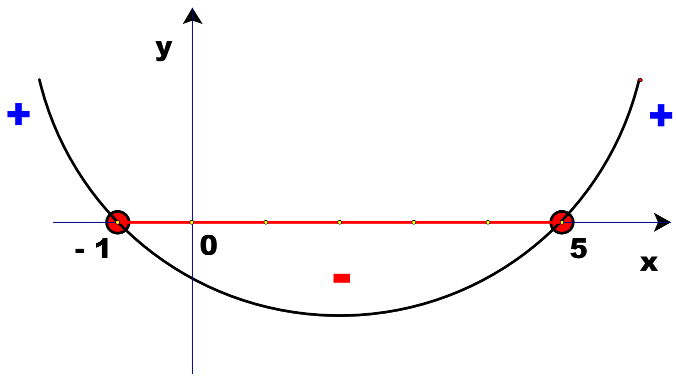
$$x^2 - 4 \cdot x - 5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 4 \cdot x - 5 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -5 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{4 + 6}{2} \\ x_2 = \dfrac{4 - 6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{10}{2} \\ x_2 = \dfrac{-2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{10}{2} \\ x_2 = \dfrac{-2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right\}.$$

Nakon toga skiciramo njezin graf (to je parabola "otvorom" okrenuta prema gore jer je a = 1 > 0). Graf kvadratne funkcije (parabola) siječe x – os u dvije točke $x_1 = 5$ i $x_2 = -1$.
U točkama $x_1 = 5$ i $x_2 = -1$ vrijedi jednakost =, pa su i one rješenja zadane nejednadžbe ≤.
Zato smo ih popunili. Funkcija je negativna na onom intervalu gdje se njezin graf nalazi ispod x – osi.
Taj je interval (označeno crveno na slici) skup rješenja kvadratne nejednadžbe

$$x^2 - 4 \cdot x - 5 \le 0.$$



Nejednadžba

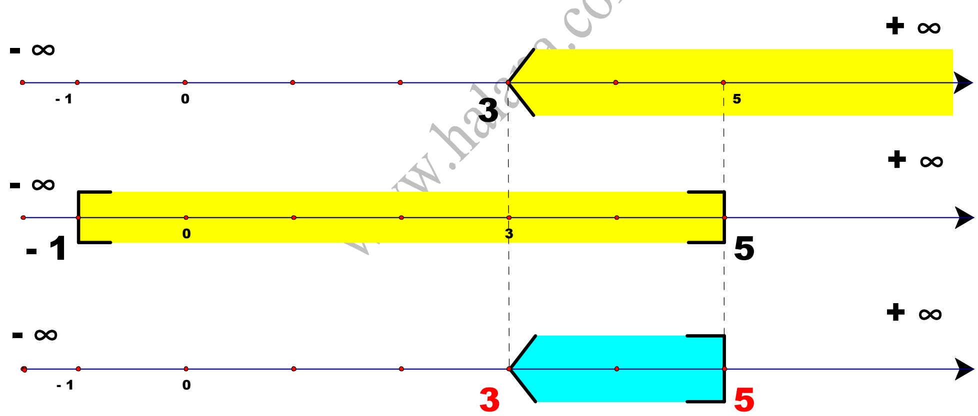
$$x^2 - 4 \cdot x - 5 \le 0$$

vrijedi za:

$$x \in [-1, 5].$$

Konačno rješenje je presjek (zajednički dio) rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \langle 3, +\infty \rangle \\ x \in [-1, 5] \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{presjek} \\ \text{zajednički dio} \end{array}\right] \Rightarrow x \in \langle 3, 5].$$



Vježba 278

Riješi nejednadžbu: $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-3) - 3 \le 0.$

Rezultat: $x \in \langle 3, 5].$

Zadatak 279 (Darko, srednja škola)

Riješite sustav jednadžbi: $\left\{\begin{array}{l} \log_5 (8 \cdot x) = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. .$

Rješenje 279

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\rightarrow\; a = b^c$$

$$\log_b b = 1 \quad , \quad \log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y) \quad , \quad \log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a^1 = a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Diskusija!

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je b > 0 i b ≠ 1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeću nejednadžbu koju traženo rješenje mora zadovoljiti:

$$8 \cdot x > 0 \Rightarrow 8 \cdot x > 0 \;/ : 8 \Rightarrow x > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \log_5 (8 \cdot x) = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_5 (8 \cdot x) = \log_5 5 + \log_5 4 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_5 (8 \cdot x) = \log_5 (5 \cdot 4) \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_5 (8 \cdot x) = \log_5 20 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 \cdot x = 20 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 \cdot x = 20 \;/ : 8 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{20}{8} \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{20}{8} \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^y = \frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^y = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \Rightarrow y = -1.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1\right).$$

Vježba 279

Riješite sustav jednadžbi: $\left\{\begin{array}{l} \log_5 8 - 1 = \log_5 4 - \log_5 x \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array}\right.$.

Rezultat: $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1\right).$

Zadatak 280 (Tin, gimnazija)

Ako je $\log_6 2 = m$, koliko je $\log_6 9$?

Rješenje 280

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

1.inačica

$$\log_6 9 = \log_6 \frac{36}{4} = \log_6 36 - \log_6 4 = \log_6 6^2 - \log_6 2^2 = 2 \cdot \log_6 6 - 2 \cdot \log_6 2 =$$

$$= \left[\log_6 2 = m\right] = 2 \cdot 1 - 2 \cdot m = 2 - 2 \cdot m.$$

2.inačica

$$\log_6 9 = \log_6 3^2 = 2 \cdot \log_6 3 = 2 \cdot \log_6 \frac{6}{2} = 2 \cdot \left(\log_6 6 - \log_6 2\right) = \left[\log_6 2 = m\right] =$$

$$= 2 \cdot (1 - m) = 2 - 2 \cdot m.$$

Vježba 280

Ako je $\log_6 2 = m$, koliko je $\log_6 27$?

Rezultat: $3 - 3 \cdot m.$