Zadatak 281 (Tin, gimnazija)

Ako je $\log 5 = a$, $\log 3 = b$, koliko je $\log_{30} 8$?

Rješenje 281

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\log_{30} 8 = \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log 2^3}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 10 + \log 3} = \frac{3 \cdot \log \frac{10}{5}}{1 + \log 3} = \frac{3 \cdot (\log 10 - \log 5)}{1 + \log 3} = \frac{3 \cdot (1 - \log 5)}{1 + \log 3} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \log 5 = a \\ \log 3 = b \end{matrix} \right] = \frac{3 \cdot (1 - a)}{1 + b} = \frac{3 - 3 \cdot a}{1 + b}.$$

Vježba 281

Ako je $\log 5 = a$, $\log 3 = b$, koliko je $\log_8 30$?

Rezultat: $\frac{1 + b}{3 - 3 \cdot a}.$

Zadatak 282 (Ana, gimnazija)

Ako je $\log 64 = p$, koliko je $\log \sqrt[3]{25}$?

Rješenje 282

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

$$\log 10 = 1 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Transformiramo jednakost log 64 = p.

$$\log 64=p\ \Rightarrow\ \log 2^{6}=p\ \Rightarrow\ 6\cdot\log 2=p\ \Rightarrow\ 6\cdot\log 2=p\ /:6\ \Rightarrow\ \log 2=\frac{p}{6}.$$

Sada je:

$$\log\sqrt[3]{25}=\frac{1}{3}\cdot\log 25=\frac{1}{3}\cdot\log 5^{2}=\frac{2}{3}\cdot\log 5=\frac{2}{3}\cdot\log\frac{10}{2}=\frac{2}{3}\cdot\left(\log 10-\log 2\right)=\left[\log 2=\frac{p}{6}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{p}{6}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{p}{6}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{6-p}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6-p}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6-p}{3}=\frac{6-p}{9}.$$

Vježba 282

Ako je $\log 64=p$, koliko je $\log\sqrt[3]{\frac{100}{4}}$?

Rezultat: $\frac{6-p}{9}.$

Zadatak 283 (Ana, gimnazija)

Za sve $x>1$, nakon kraćenja, razlomak $\frac{\log^{2}(x-1)}{\log(x-1)^{2}}$ prima oblik :

$A.\ x-1\qquad B.\ \log\sqrt{x-1}\qquad C.\ 1\qquad D.\ \log(x-1)$

Rješenje 283

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_{b}a=c\qquad \log_{b}a=b^{c}\qquad a=b^{c}$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\cdot\log a\quad ,\quad \log a^{n}=n\cdot\log a\quad ,\quad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

$$\log 10=1\quad ,\quad n=\frac{n}{1}\quad ,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad ,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{\log^{2}(x-1)}{\log(x-1)^{2}}=\frac{\log(x-1)\cdot\log(x-1)}{2\cdot\log(x-1)}=\frac{\log(x-1)\cdot\log(x-1)}{2\cdot\log(x-1)}=\frac{\log(x-1)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\log(x-1)=\log\sqrt{x-1}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 283

Za sve $x > 1$, nakon kraćenja, razlomak $\dfrac{\log^2(x-1)}{\log(x-1)^3}$ prima oblik:

$$A.\ x-1 \qquad B.\ \log\sqrt[3]{x-1} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ \log(x-1)$$

Rezultat: B.

Zadatak 284 (Dado, gimnazija)

Izraz $\log_2(4\cdot a)+\log_2\left(2\cdot a^2\right)$ jednak je:

$$A.\ 3+3\cdot\log_2 a \qquad B.\ 2\cdot a+2 \qquad C.\ 4+3\cdot\log_2 a \qquad D.\ 4\cdot a+3$$

Rješenje 284

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \to \qquad a = b^c$$

$$\log_b(x\cdot y)=\log_b x+\log_b y \quad , \quad \log_b a^n = n\cdot\log_b a \quad , \quad \log_b b = 1.$$

$$\log_2(4\cdot a)+\log_2\left(2\cdot a^2\right)=\log_2 4+\log_2 a+\log_2 2+\log_2 a^2=$$

$$=\log_2 2^2+\log_2 a+\log_2 2+\log_2 a^2=2\cdot\log_2 2+\log_2 a+\log_2 2+2\cdot\log_2 a=$$

$$=2\cdot 1+\log_2 a+1+2\cdot\log_2 a=2+\log_2 a+1+2\cdot\log_2 a=3+3\cdot\log_2 a.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 284

Izraz $\log_2(4\cdot a)+\log_2(2\cdot a)$ jednak je:

$$A.\ 2+3\cdot\log_2 a \qquad B.\ 2\cdot a+2 \qquad C.\ 3+2\cdot\log_2 a \qquad D.\ 3\cdot a+3$$

Rezultat: C.

Zadatak 285 (Anđelka, Katarina, HTT)

Riješi nejednadžbu: $8\cdot 16^x \ge 7\cdot 14^x$.

$$A.\ x\le 1 \qquad B.\ x\le -1 \qquad C.\ x\ge -1 \qquad D.\ x\ge 1$$

Rješenje 285

Ponovimo!

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n \quad , \quad a\ge b\ ,\ c>0 \Rightarrow a\cdot c\ge b\cdot c.$$

$$a^{f(x)}\ge a^{g(x)} \Rightarrow f(x)\ge g(x)\ ,\ a>1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

$$8\cdot 16^{x}\ge 7\cdot 14^{x}\ \Rightarrow\ 8\cdot 16^{x}\ge 7\cdot 14^{x}\ /\cdot\frac{1}{8\cdot 14^{x}}\ \Rightarrow\ \frac{16^{x}}{14^{x}}\ge\frac{7}{8}\ \Rightarrow\ \left(\frac{16}{14}\right)^{x}\ge\frac{7}{8}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{16}{14}\right)^{x}\ge\frac{7}{8}\ \Rightarrow\ \Rightarrow\ \left(\frac{8}{7}\right)^{x}\ge\frac{7}{8}\ \Rightarrow\ \left(\frac{8}{7}\right)^{x}\ge\left(\frac{8}{7}\right)^{-1}\ \Rightarrow\ \left[\frac{8}{7}>1\right]\ \Rightarrow\ x\ge -1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 285

Riješi nejednadžbu: $8\cdot 24^{x}\ge 7\cdot 21^{x}$.

$A.\ x\le 1 \qquad B.\ x\le -1 \qquad C.\ x\ge -1 \qquad D.\ x\ge 1$

Rezultat: C.

Zadatak 286 (Lucija, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $2^{x}\cdot 8^{\frac{1}{x}}-16=0.$

Rješenje 286

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

$$2^{x}\cdot 8^{\frac{1}{x}}-16=0\ \Rightarrow\ 2^{x}\cdot 8^{\frac{1}{x}}=16\ \Rightarrow\ 2^{x}\cdot\left(2^{3}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{4}\ \Rightarrow\ 2^{x}\cdot 2^{\frac{3}{x}}=2^{4}\ \Rightarrow\ 2^{x+\frac{3}{x}}=2^{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x+\frac{3}{x}=4\ \Rightarrow\ x+\frac{3}{x}=4\ /\cdot x\ \Rightarrow\ x^{2}+3=4\cdot x\ \Rightarrow\ x^{2}-4\cdot x+3=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x^{2}-4\cdot x+3=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3\end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^{2}-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_{1}=\dfrac{4+2}{2} \\ x_{2}=\dfrac{4-2}{2}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_{1}=\dfrac{6}{2} \\ x_{2}=\dfrac{2}{2}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_{1}=3 \\ x_{2}=1\end{array}\right\}.$$

Vježba 286

Riješi jednadžbu: $2^{x+1}\cdot 8^{\frac{1}{x}}-32=0.$

Rezultat: $x_1 = 3,\ x_2 = 1.$

Zadatak 287 (Sara, srednja škola)

Ako je $\log_{a} 2=x$ i $\log_{a} 3=y$, koliko je $\log_{a} 24$?

$A.\ 3+x \qquad B.\ 3+y \qquad C.\ 3\cdot x+y \qquad D.\ x+3\cdot y$

Rješenje 287

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^{c} \;\underset{\rightarrow}{} \qquad a = b^{c}$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b a^{n} = n \cdot \log_b a.$$

$$\log_a 24 = \log_a (8 \cdot 3) = \log_a 8 + \log_a 3 = \log_a 2^{3} + \log_a 3 = 3 \cdot \log_a 2 + \log_a 3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \log_a 2 = x \\ \log_a 3 = y \end{bmatrix} = 3 \cdot x + y.$$

Odgovor je pod C

Vježba 287

Ako je $\log_a 2 = x$ i $\log_a 3 = y$, koliko je $\log_a 12$?

$A.\ 2 + x \qquad B.\ 2 + y \qquad C.\ 2 \cdot x + y \qquad D.\ x + 2 \cdot y$

Rezultat: C.

Zadatak 288 (Sara, srednja škola)

Zadane su funkcije $f(x) = 2 \cdot x$ i $g(x) = \log_5 x$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = 7$.

Rješenje 288

Ponovimo!

Kompozicija funkcija

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^{c} \;\underset{\rightarrow}{} \qquad a = b^{c}$$

1.inačica

$$(f \circ g)(x) = 7 \Rightarrow f(g(x)) = 7 \Rightarrow f(g(x)) = 7 \Rightarrow 2 \cdot g(x) = 7 \Rightarrow 2 \cdot g(x) = 7 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = 3.5 \Rightarrow \log_5 x = 3.5 \Rightarrow x = 5^{3.5} \Rightarrow x = 279.51.$$

2.inačica

$$(f \circ g)(x) = 7 \Rightarrow f(g(x)) = 7 \Rightarrow f(g(x)) = 7 \Rightarrow f(\log_5 x) = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_5 x = 7 \Rightarrow 2 \cdot \log_5 x = 7 \ /:2 \Rightarrow \log_5 x = 3.5 \Rightarrow x = 5^{3.5} \Rightarrow x = 279.51.$$

Vježba 288

Zadane su funkcije $f(x) = 7 \cdot x$ i $g(x) = \log_5 x$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = 7$.

Rezultat: x = 5.

Zadatak 289 (Ines, srednja škola)

Vrijednost brojevnog izraza $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ jednaka je:

$A.\ x = \log 8 \qquad B.\ x = 3 \qquad C.\ x = \log 3 \qquad D.\ x = 8$

Rješenje 289

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Transformiramo zadani izraz.

$$x = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} \cdot \frac{\log 7}{\log 6} \cdot \frac{\log 8}{\log 7} \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} \cdot \frac{\log 7}{\log 6} \cdot \frac{\log 8}{\log 7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 2}.$$

1.inačica

$$x = \frac{\log 8}{\log 2} \Rightarrow x = \log_2 8 \Rightarrow x = 3.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$x = \frac{\log 8}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{\log 2^3}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 2} \Rightarrow x = 3.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 289

Vrijednost brojevnog izraza $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$ jednaka je:

$A.\ x = \log 2 \qquad B.\ x = 1 \qquad C.\ x = \log 3 \qquad D.\ x = 2$

Rezultat: D.

Zadatak 290 (KH, gimnazija)

Riješi nejednadžbu: $\log_x 2 \cdot \log_2 (4 \cdot x) > 1.$

Rješenje 290

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je b > 0 i b ≠ 1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x \in \left\langle 0, +\infty \right\rangle.$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad a + c > b + c \;\Rightarrow\; a > b \quad , \quad \frac{a}{b} > 0 \;,\; a > 0 \;\Rightarrow\; b > 0.$$

$$\log_b 1 = 0 \quad , \quad \log_b f(x) > \log_b g(x) \;,\; b > 1 \;\Rightarrow\; f(x) > g(x) \quad , \quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Dekadski logaritam

$$\log_{10} x = \log x.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da baza mora biti pozitivan broj i različit od 1, a logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeće nejednadžbe koje tražena rješenja moraju zadovoljiti:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \;,\; x \neq 1 \\ 4 \cdot x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \;,\; x \neq 1 \\ 4 \cdot x > 0 \;/ : 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \;,\; x \neq 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{presjek} \\ \text{zajednički dio} \\ \text{oba rješenja} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > 0 \;,\; x \neq 1 \;\Rightarrow\; x \in \left\langle 0, +\infty \right\rangle \setminus \{1\}.$$

Tražimo rješenje jednadžbe.

1.inačica

$$\log_x 2 \cdot \log_2 (4 \cdot x) > 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\log_2 x} \cdot \log_2 (4 \cdot x) > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log_2 (4 \cdot x)}{\log_2 x} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log_2 4 + \log_2 x}{\log_2 x} > 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 4}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 x} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log_2 2^2}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 x} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{2 \cdot \log_2 2}{\log_2 x} + 1 > 1 \;\Rightarrow\; \frac{2 \cdot 1}{\log_2 x} + 1 > 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\log_2 x} > 0 \;\Rightarrow\; \log_2 x > 0 \;\Rightarrow\; \log_2 x > \log_2 1 \;\Rightarrow\; x > 1.$$

2.inačica

$$\log_x 2 \cdot \log_2 (4 \cdot x) > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log 2}{\log x} \cdot \frac{\log (4 \cdot x)}{\log 2} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log 2}{\log x} \cdot \frac{\log (4 \cdot x)}{\log 2} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log (4 \cdot x)}{\log x} > 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 4 + \log x}{\log x} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log 4}{\log x} + \frac{\log x}{\log x} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log 4}{\log x} + \frac{\log x}{\log x} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log 4}{\log x} + 1 > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\log 4}{\log x} + 1 > 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 4}{\log x} > 0 \;\Rightarrow\; \log x > 0 \;\Rightarrow\; \log x > \log 1 \;\Rightarrow\; x > 1.$$

Vježba 290

Riješi nejednadžbu: $\log_x 3 \cdot \log_3 (9 \cdot x) > 1.$

Rezultat: $x > 1.$

Zadatak 291 (Vedran, gimnazija)

Dokaži jednakost: $\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_{a^2} n}+\frac{1}{\log_{a^3} n}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^k} n}=\frac{k\cdot(k+1)}{2}\cdot\log_n a.$

Rješenje 291

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b} \quad , \quad \log_b a^n=n\cdot\log_b a \quad , \quad 1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_{a^2} n}+\frac{1}{\log_{a^3} n}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^k} n}=\log_n a+\log_n a^2+\log_n a^3+\ldots+\log_n a^k=$$

$$=\log_n a+2\cdot\log_n a+3\cdot\log_n a+\ldots+k\cdot\log_n a=\log_n a\cdot(1+2+3+\ldots+k)=$$

$$=\log_n a\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2}=\frac{k\cdot(k+1)}{2}\cdot\log_n a.$$

Vježba 291

Dokaži jednakost: $\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_{a^2} n}+\frac{1}{\log_{a^3} n}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^{20}} n}=210\cdot\log_n a.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 292 (4A, TUPŠ)

Riješite jednadžbu $2\cdot 6^x=\frac{1}{18}.$

Rješenje 292

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^0=1.$$

1.inačica

$$2\cdot 6^x=\frac{1}{18} \Rightarrow 2\cdot 6^x=\frac{1}{18} \ /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 6^x=\frac{1}{36} \Rightarrow 6^x=\frac{1}{6^2} \Rightarrow 6^x=6^{-2} \Rightarrow x=-2.$$

2.inačica

$$2\cdot 6^x=\frac{1}{18} \Rightarrow 2\cdot 6^x=\frac{1}{18} \ /\cdot 18 \Rightarrow 36\cdot 6^x=1 \Rightarrow 6^2\cdot 6^x=1 \Rightarrow 6^{2+x}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{2+x}=6^0 \Rightarrow 2+x=0 \Rightarrow x=-2.$$

Vježba 292

Riješite jednadžbu $2\cdot 4^{x}=\frac{1}{8}.$

Rezultat: x = – 2.

Zadatak 293 (Ivan, srednja škola)

Riješite jednadžbu $100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=25.$

Rješenje 293

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x)\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}\quad,\quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}.$$

$$a^{1}=a\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad a^{0}=1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

$$100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=25\ /:100\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=\frac{25}{100}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=\frac{25}{100}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot x=2\ \Rightarrow\ 2\cdot x=2\ /:2\ \Rightarrow\ x=1.$$

2.inačica

$$100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot\left(2^{-1}\right)^{2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot 2^{-2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot 2^{-2\cdot x}=25\ /:100\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{-2\cdot x}=\frac{25}{100}\ \Rightarrow\ 2^{-2\cdot x}=\frac{25}{100}\ \Rightarrow\ 2^{-2\cdot x}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ 2^{-2\cdot x}=\frac{1}{2^{2}}\ \Rightarrow\ 2^{-2\cdot x}=2^{-2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot x=-2\ \Rightarrow\ -2\cdot x=-2\ /:(-2)\ \Rightarrow\ x=1.$$

3.inačica

$$100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot\left(2^{-1}\right)^{2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot 2^{-2\cdot x}=25\ \Rightarrow\ 100\cdot 2^{-2\cdot x}=25\ /:25\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot 2^{-2\cdot x}=1\ \Rightarrow\ 2^{2}\cdot 2^{-2\cdot x}=1\ \Rightarrow\ 2^{2-2\cdot x}=1\ \Rightarrow\ 2^{2-2\cdot x}=2^{0}\ \Rightarrow\ 2-2\cdot x=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot x=-2\ \Rightarrow\ -2\cdot x=-2\ /:(-2)\ \Rightarrow\ x=1.$$

Vježba 293

Riješite jednadžbu $20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x}=5.$

Rezultat: x = 1.

Zadatak 294 (Tonka, srednja škola)

Stupanj glasnoće D nekog TV – aparata izražena u decibelima opada s udaljenošću d od izvora zvuka prema zakonu $D = 10 \cdot \log \frac{10^7}{3 \cdot d^2}$. Udaljenost d izražena je u centimetrima. Kako daleko mora biti gledatelj tako da stupanj glasnoće bude jednak nuli?

Rješenje 294

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 1 = 0 \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \quad , \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \quad , \quad 1\ m = 100\ cm.$$

Udaljenost d izražena u centimetrima na kojoj je stupanj glasnoće D jednak nuli iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} D = 10 \cdot \log \frac{10^7}{3 \cdot d^2} \\ D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow 10 \cdot \log \frac{10^7}{3 \cdot d^2} = 0 \Rightarrow 10 \cdot \log \frac{10^7}{3 \cdot d^2} = 0 \ /:10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{10^7}{3 \cdot d^2} = 0 \Rightarrow \log \frac{10^7}{3 \cdot d^2} = \log 1 \Rightarrow \frac{10^7}{3 \cdot d^2} = 1 \Rightarrow \frac{10^7}{3 \cdot d^2} = 1 \ / \cdot 3 \cdot d^2 \Rightarrow 10^7 = 3 \cdot d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot d^2 = 10^7 \Rightarrow 3 \cdot d^2 = 10^7 \ /:3 \Rightarrow d^2 = \frac{10^7}{3} \Rightarrow d^2 = \frac{10^7}{3} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow d = \sqrt{\frac{10^7}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 1825.74\ cm \Rightarrow d = 18.26\ m.$$

Vježba 294

Ako slovom I označimo intenzitet potresa, a I_0 osnovni intenzitet "standardnog" malog zemljotresa, onda je vrijednost $R = \log \frac{I}{I_0}$ mjera koju potres intenziteta I ima na tzv. Richterovoj skali. Koju vrijednost na Richterovoj skali ima potres intenziteta $100 \cdot I_0$?

Rezultat: 2.

Zadatak 295 (Tonka, srednja škola)

Nakon kraćenja razlomak $\frac{\log^3 x}{\log x^2}$ jednak je:

$A.\ \log^2 x \qquad B.\ 2 \cdot \log^2 \sqrt{x} \qquad C.\ \log^2 \sqrt{x} \qquad D.\ \frac{\log^2 x}{2 \cdot x}$

Rješenje 295

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log a \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{\log^3 x}{\log x^2} = \frac{\log^3 x}{2 \cdot \log x} = \frac{\log^3 x}{2 \cdot \log x} = \frac{\log^2 x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log^2 x = \frac{1}{2} \cdot \log x \cdot \log x = \left(\frac{1}{2} \cdot \log x\right) \cdot \log x =$$

$$= \log \sqrt{x} \cdot \log x = \log \sqrt{x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log x = \log \sqrt{x} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \log x\right) = \log \sqrt{x} \cdot 2 \cdot \log \sqrt{x} = 2 \cdot \log^2 \sqrt{x}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 295

Nakon kraćenja razlomak $\dfrac{\log^2 x}{\log x^2}$ jednak je:

$A.\ 2 \cdot \log x \qquad B.\ \log \sqrt{x} \qquad C.\ \dfrac{1}{2} \cdot \log x \qquad D.\ \dfrac{\log \sqrt{x}}{2}$

Rezultat: B.

Zadatak 296 (Ivan, srednja škola)

Kompjutorski virus za t sati zarazi n računala, pri čemu je $n(t) = 1000 \cdot e^{3.5 \cdot t}$. Koliko računala zarazi virus za 1 sat i 45 minuta?

Rješenje 296

Ponovimo!

$$1\ h = 60\ \min.$$

Zadano vrijeme pretvorimo u sate.

$$t = 1\ h\ 45\ \min \ \Rightarrow \ t = 1\ h + \frac{45}{60}\ h \ \Rightarrow \ t = 1\ h + 0.75\ h \ \Rightarrow \ t = 1.75\ h.$$

Tada broj zaraženih računala iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n(t) = 1000 \cdot e^{3.5 \cdot t} \\ t = 1.75 \end{array}\right\} \Rightarrow \ n(1.75) = 1000 \cdot e^{3.5 \cdot 1.75} \ \Rightarrow \ n(1.75) = 1000 \cdot e^{6.125} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n(1.75) = 1000 \cdot 457.145 \ \Rightarrow \ n(1.75) = 457145.$$

Vježba 296

Kompjutorski virus za t sati zarazi n računala, pri čemu je $n(t) = 1000 \cdot e^{3.5 \cdot t}$. Koliko računala zarazi virus za 2 sata?

Rezultat: 1096633.

Zadatak 297 (Ivona, srednja škola)

Riješi jednadžbu $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + \ldots = 2.$

Rješenje 297

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \ \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \;\Rightarrow\; f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

$$\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + \ldots = 2 \;\Rightarrow\; \log x + \frac{1}{2} \cdot \log x + \frac{1}{4} \cdot \log x + \frac{1}{8} \cdot \log x + \ldots = 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 2.$$

Odredimo zbroj konvergentnog geometrijskog reda.

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \\ a_1 = 1 \ , \ q = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s = \frac{a_1}{1 - q} \right] \Rightarrow s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow s = \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} \Rightarrow s = \frac{1}{\frac{2 - 1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad s=\frac{1}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad s=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad s=2.$$

Tada rješenje postavljene jednadžbe iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \log x \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots\right)=2 \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \log x \cdot 2=2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \log x=2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \log x=2 \ /:2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log x=1 \quad \Rightarrow \quad \log x=\log 10 \quad \Rightarrow \quad x=10.$$

Vježba 297

Riješi jednadžbu $\log x+\log \sqrt{x}+\log \sqrt[4]{x}+\log \sqrt[8]{x}+\ \ldots=4.$

Rezultat: x = 100.

Zadatak 298 (Matea, strukovna škola)

Koji je realan broj x rješenje jednadžbe $\log_a b+\log_a x=2,$ gdje je $a>0,\ a \neq 1,\ b>0$?

$$A.\ x=\frac{a^2}{b} \qquad B.\ x=\frac{b^2}{a} \qquad C.\ x=\frac{2 \cdot a}{b} \qquad D.\ x=\frac{2 \cdot b}{a}$$

Rješenje 298

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \ \rightarrow \qquad a=b^c$$

$$\log_b (x \cdot y)=\log_b x+\log_b y \quad , \quad a=b \ \Rightarrow \ b=a.$$

$$\log_a b+\log_a x=2 \ \Rightarrow \ \log_a (b \cdot x)=2 \ \Rightarrow \ a^2=b \cdot x \ \Rightarrow \ b \cdot x=a^2 \ \Rightarrow \ b \cdot x=a^2 \ /\cdot \frac{1}{b} \ \Rightarrow \ x=\frac{a^2}{b}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 298

Koji je realan broj x rješenje jednadžbe $\log_a b+\log_a x=1,$ gdje je $a>0,\ a \neq 1,\ b>0$?

$$A.\ x=\frac{a}{b} \qquad B.\ x=\frac{b}{a} \qquad C.\ x=a \cdot b \qquad D.\ x=a-b$$

Rezultat: A.

Zadatak 299 (4A, 4B, TUPŠ)

Riješi jednadžbu $8^7 : 4^x=2^9.$

Rješenje 299

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n : a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)}.$$

$$8^7 : 4^x = 2^9 \Rightarrow \left(2^3\right)^7 : \left(2^2\right)^x = 2^9 \Rightarrow 2^{21} : 2^{2\cdot x} = 2^9 \Rightarrow 2^{21-2\cdot x} = 2^9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21-2\cdot x = 9 \Rightarrow -2\cdot x = 9-21 \Rightarrow -2\cdot x = -12 \Rightarrow -2\cdot x = -12 \;/ : (-2) \Rightarrow x = 6.$$

Vježba 299

Riješi jednadžbu $8^5 : 4^x = 2^9$.

Rezultat: x = 3.

Zadatak 300 (4A, 4B, TUPŠ)

Koliki je zbroj svih potencija broja 3 koje su veće od 1000, a manje od 10000?

Rješenje 300

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = \underset{\rightarrow}{b^c} \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n\cdot\log a \quad , \quad \log f(x) < \log g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) \quad , \quad a < b \;,\; c > 0 \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c.$$

$$\log 1000 = 3 \quad , \quad \log 10000 = 4.$$

Tražimo eksponente n, prirodne brojeve, za koje je potencija 3^n veća od 1000, a manja od 10000.

$$1000 < 3^n < 10\,000 \Rightarrow 1000 < 3^n < 10\,000 \;/\log \Rightarrow \log 1000 < \log 3^n < \log 10\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 < n\cdot\log 3 < 4 \Rightarrow 3 < n\cdot\log 3 < 4 \;/\cdot\frac{1}{\log 3} \Rightarrow \frac{3}{\log 3} < n < \frac{4}{\log 3} \Rightarrow 6.29 < n < 8.38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{prirodni} \\ \text{brojevi}\end{bmatrix} \Rightarrow n \in \{7, 8\}.$$

Tada je

$$3^7 + 3^8 = 2187 + 6561 = 8748.$$

Vježba 300

Koliki je umnožak svih potencija broja 3 koje su veće od 1000, a manje od 10000?

Rezultat: 14348907.