Zadatak 321 (Malena, ekonomska škola)

Riješi nejednadžbu $3^x + 3^{x+1} > \frac{4}{9}$.

Rješenje 321

Ponovimo

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a > b \, , \, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \, , \, a > 1 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$3^x + 3^{x+1} > \frac{4}{9} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3^1 > \frac{4}{3^2} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 > 4 \cdot 3^{-2} \Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3) > 4 \cdot 3^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot 4 > 4 \cdot 3^{-2} \Rightarrow 3^x \cdot 4 > 4 \cdot 3^{-2} \; /: 4 \Rightarrow 3^x > 3^{-2} \Rightarrow x > -2.$$

Vježba 321

Riješi nejednadžbu $2^x + 2^{x+1} > \frac{3}{4}$.

Rezultat: $x > -2.$

Zadatak 322 (Lucy, ekonomska škola)

U jednome trgovačkom centru uočeno je da formula $k = t^{\frac{3}{2}} - 5$ povezuje vrijeme t (u minutama) koje je kupac proveo u trgovačkome centru i količinu novca k (u kunama) koji je potrošio. Formula vrijedi ako je kupac proveo više od 5 minuta u tome trgovačkom centru. Koliko je kuna, prema formuli, potrošio kupac koji je u trgovačkome centru proveo 25 minuta?

Rješenje 322

Ponovimo

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{a} = b.$$

$$\left.\begin{array}{l} k = t^{\frac{3}{2}} - 5 \\ t = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 25^{\frac{3}{2}} - 5 \Rightarrow k = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} - 5 \Rightarrow k = 5^3 - 5 \Rightarrow k = 125 - 5 \Rightarrow k = 120 \; kn.$$

Vježba 322

U jednome trgovačkom centru uočeno je da formula $k = t^{\frac{3}{2}} - 5$ povezuje vrijeme t (u minutama) koje je kupac proveo u trgovačkome centru i količinu novca k (u kunama) koji je potrošio. Formula vrijedi ako je kupac proveo više od 5 minuta u tome trgovačkom centru. Koliko je kuna, prema formuli, potrošio kupac koji je u trgovačkome centru proveo 16 minuta?

Rezultat: 59 kn.

Zadatak 323 (Lucy, ekonomska škola)

U jednome trgovačkom centru uočeno je da formula $k = t^{\frac{3}{2}} - 5$ povezuje vrijeme t (u minutama) koje je kupac proveo u trgovačkome centru i količinu novca k (u kunama) koji je potrošio. Formula vrijedi ako je kupac proveo više od 5 minuta u tome trgovačkom centru. Koliko je minuta, prema formuli, proveo u trgovačkome centru kupac koji je potrošio 995 kuna?

Rješenje 323

Ponovimo

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \quad a^{1} = a \quad , \quad a \cdot \frac{b}{a} = b \quad , \quad a = b \Rightarrow a^{n} = b^{n}.$$

$$\left.\begin{array}{l} k = t^{\frac{3}{2}} - 5 \\ k = 995 \end{array}\right\} \Rightarrow t^{\frac{3}{2}} - 5 = 995 \Rightarrow t^{\frac{3}{2}} = 995 + 5 \Rightarrow t^{\frac{3}{2}} = 1000 \Rightarrow t^{\frac{3}{2}} = 1000 \;/^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(t^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1000^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t^{1} = 1000^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t = \left(10^{3}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t = 10^{2} \Rightarrow t = 100 \text{ min}.$$

Vježba 323

U jednome trgovačkom centru uočeno je da formula $k = t^{\frac{3}{2}} - 5$ povezuje vrijeme t (u minutama) koje je kupac proveo u trgovačkome centru i količinu novca k (u kunama) koji je potrošio. Formula vrijedi ako je kupac proveo više od 5 minuta u tome trgovačkom centru. Koliko je minuta, prema formuli, proveo u trgovačkome centru kupac koji je potrošio 3370 kuna?

Rezultat: 225 min.

Zadatak 324 (Malecka, gimnazija)

Zadane su četiri jednadžbe:

$$\frac{2 \cdot x + 4}{5} = 1 \quad , \quad x^{2} - 3 = 0 \quad , \quad 2^{x+1} = \frac{1}{4} \quad , \quad \log_{2} x = 3.$$

Koliko jednadžbā ima rješenje koje pripada skupu **prirodnih** brojeva?

A. samo jedna jednadžba *B. točno dvije jednadžbe*
C. točno tri jednadžbe *D. sve četiri jednadžbe*

Rješenje 324

Ponovimo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_{b} a = c \qquad \log_{b} a = b^{c} \qquad a = b^{c}$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Racionalni broj je broj nastao dijeljenjem dva cijela broja. Skup svih racionalnih brojeva označavamo sa Q i pišemo:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z \; , \; b \in N \right\}.$$

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka. Skup iracionalnih brojeva označavamo slovom **I**. Iracionalni brojevi su na primjer: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, ...$

Riješimo svaku zadanu jednadžbu:

- $\frac{2 \cdot x + 4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot x + 4}{5} = 1 \; / \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot x + 4 = 5 \Rightarrow 2 \cdot x = 5 - 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2 \cdot x = 1 \; / : 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ *racionalan broj*
- $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ *iracionalni brojevi*
- $2^{x+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{x+1} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{-2} \Rightarrow x + 1 = -2 \Rightarrow x = -2 - 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x = -3$ *cijeli broj*
- $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$ *prirodan broj*.

Samo jedna jednadžba ima rješenje koje pripada skupu prirodnih brojeva. Odgovor je pod A.

Vježba 324

Zadane su četiri jednadžbe:

$$\frac{2 \cdot x + 4}{5} = 1 \quad , \quad x^2 - 3 = 0 \quad , \quad 2^{x+1} = \frac{1}{4} \quad , \quad \log_2 x = 3.$$

Koliko jednadžbā ima rješenje koje pripada skupu **iracionalnih** brojeva?

A. samo jedna jednadžba *B. točno dvije jednadžbe*
C. točno tri jednadžbe *D. sve četiri jednadžbe*

Rezultat: A

Zadatak 325 (Malecka, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x) = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1}$. Koji je interval slika (skup svih vrijednosti) te funkcije?

$$A. \left[0, +\infty \right\rangle \qquad B. \left[\frac{1}{4}, 16 \right] \qquad C. \left[\frac{1}{2}, 4 \right] \qquad D. \left[2, +\infty \right\rangle$$

Rješenje 325

Ponovimo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Maksimalna vrijednost funkcije f(x) = sin x, odnosno f(x) = sin ax i f(x) = cos x, odnosno f(x) = cos ax jednaka je 1, a minimalna vrijednost – 1.

Za eksponencijalnu funkciju $f(x) = a^x$ vrijedi:

- definirana je za svaki realni broj x
- poprima sve pozitivne vrijednosti
- ako je a > 1, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$ (funkcija je rastuća)
- ako je 0 < a < 1, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$ (funkcija je padajuća)

Budući da je najmanja vrijednost funkcije sinus jednaka – 1, slijedi:

$$2^{3\cdot\sin 4x+1}=\left[\,\sin 4x=-1\,\right]=2^{3\cdot(-1)+1}=2^{-3+1}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}.$$

Zadana funkcija poprima najmanju vrijednost $\frac{1}{4}$.

Budući da je najveća vrijednost funkcije sinus jednaka 1, slijedi:

$$2^{3\cdot\sin 4x+1}=\left[\,\sin 4x=1\,\right]=2^{3\cdot 1+1}=2^{3+1}=2^4=16.$$

Zadana funkcija poprima najveću vrijednost 16.

Zato je interval slike zadane funkcije $\left[\frac{1}{4},\ 16\right]$. Odgovor je pod B.

Vježba 325

Zadana je funkcija $f(x)=2^{3\cdot\cos 4x+1}$. Koji je interval slika (skup svih vrijednosti) te funkcije?

$A.\ \left[\,0,\ +\infty\right\rangle$ $\quad B.\ \left[\frac{1}{4},\ 16\right]$ $\quad C.\ \left[\frac{1}{2},\ 4\right]$ $\quad D.\ \left[\,2,\ +\infty\right\rangle$

Rezultat: B.

Zadatak 326 (Maja, gimnazija)

Ako je log 2 = a, onda je log 40 jednako:

$A.\ 1-2\cdot a$ $\quad B.\ 2+a$ $\quad C.\ 1+2\cdot a$ $\quad D.\ 2-a$

Rješenje 326M

Ponovimo

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log *x* zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x=\log x.$$

$$\log 1=0 \quad , \quad \log 10=1 \quad , \quad \log 100=2 \quad , \quad \log(a\cdot b)=\log a+\log b \quad , \quad \log a^n=n\cdot\log a.$$

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b \quad , \quad a=b \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a\cdot n=b\cdot n \\ a+n=b+n \;\; , \;\; n\in R \end{array}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\log 40=\log(10\cdot 4)=\log 10+\log 4=1+\log 4=1+\log 2^2=1+2\cdot\log 2=\left[\log 2=a\right]=1+2\cdot a.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\log 40=\log\frac{200}{5}=\log 200-\log 5=\log(2\cdot 100)-\log\frac{10}{2}=\log 2+\log 100-(\log 10-\log 2)=$$

$$=\log 2+\log 100-\log 10+\log 2=\left[\log 2=a\right]=a+2-1+a=1+2\cdot a.$$

Odgovor je pod C.

3.inačica

$$\log 2 = a \;\Rightarrow\; \log 2 = a \;/\cdot 2 \;\Rightarrow\; 2\cdot\log 2 = 2\cdot a \;\Rightarrow\; \log 2^{2} = 2\cdot a \;\Rightarrow\; \log 4 = 2\cdot a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \log 4 = 2\cdot a \;/+1 \;\Rightarrow\; 1+\log 4 = 1+2\cdot a \;\Rightarrow\; \log 10+\log 4 = 1+2\cdot a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \log(10\cdot 4) = 1+2\cdot a \;\Rightarrow\; \log 40 = 1+2\cdot a.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 326

Ako je log 2 = a, onda je log 80 jednako:

$A.\; 1-3\cdot a \qquad B.\; 3+a \qquad C.\; 1+3\cdot a \qquad D.\; 3-a$

Rezultat: C.

Zadatak 327 (Maja, gimnazija)

Nakon kraćenja razlomak $\dfrac{\log^{3} x}{\log x^{2}}$ jednak je:

$A.\; \log^{2} x \qquad B.\; 2\cdot\log^{2}\sqrt{x} \qquad C.\; \log^{2}\sqrt{x} \qquad D.\; \dfrac{\log^{2} x}{2\cdot x}$

Rješenje 327

Ponovimo

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^{c} \;\rightarrow \qquad a = b^{c}$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^{n} = n\cdot\log a \quad , \quad \log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\cdot\log a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\frac{\log^{3} x}{\log x^{2}} = \frac{\log^{3} x}{2\cdot\log x} = \frac{\log^{3} x}{2\cdot\log x} = \frac{\log^{2} x}{2} = \frac{2\cdot\log^{2} x}{2\cdot 2} = \frac{2\cdot\log^{2} x}{4} = 2\cdot\frac{\log^{2} x}{4} = 2\cdot\left(\frac{\log x}{2}\right)^{2} =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\log x\right)^{2} = 2\cdot\left(\log\sqrt{x}\right)^{2} = 2\cdot\log^{2}\sqrt{x}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 327

Nakon kraćenja razlomak $\frac{\log^2 x}{\log x^2}$ jednak je:

$A.\ 2\cdot\log x \qquad B.\ 2\cdot\log\sqrt{x} \qquad C.\ \log\sqrt{x} \qquad D.\ \log x$

Rezultat: C.

Zadatak 328 (Maja, gimnazija)

Koliko je $\log\sqrt[9]{5}$, ako je a = log 8?

$A.\ \frac{a-3}{9} \qquad B.\ \frac{3-a}{27} \qquad C.\ \frac{3}{1-a} \qquad D.\ \frac{a-1}{3-a}$

Rješenje 328

Ponovimo

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\rightarrow\qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 10 = 1 \quad , \quad \log 1000 = 3 \quad , \quad \log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\cdot\log a \quad , \quad \log\frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

$$\log a^n = n\cdot\log a \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\log\sqrt[9]{5} = \frac{1}{9}\cdot\log 5 = \frac{1}{9}\cdot\log\frac{10}{2} = \frac{1}{9}\cdot(\log 10 - \log 2) = \frac{1}{9}\cdot(1-\log 2) = \frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\log 2 =$$

$$= \frac{1}{9}-\frac{3\cdot 1}{3\cdot 9}\cdot\log 2 = \frac{1}{9}-\frac{3}{27}\cdot\log 2 = \frac{1}{9}-\frac{1}{27}\cdot 3\cdot\log 2 = \frac{1}{9}-\frac{1}{27}\cdot\log 2^3 = \frac{1}{9}-\frac{1}{27}\cdot\log 8 = [a=\log 8] =$$

$$= \frac{1}{9}-\frac{1}{27}\cdot a = \frac{1}{9}-\frac{a}{27} = \frac{3-a}{27}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\log\sqrt[9]{5} = \frac{1}{9}\cdot\log 5 = \frac{3\cdot 1}{3\cdot 9}\cdot\log 5 = \frac{3}{27}\cdot\log 5 = \frac{1}{27}\cdot 3\cdot\log 5 = \frac{1}{27}\cdot\log 5^3 = \frac{1}{27}\cdot\log 125 = \frac{1}{27}\cdot\log\frac{1000}{8} =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot(\log 1000 - \log 8) = \frac{1}{27}\cdot(3-\log 8) = [a=\log 8] = \frac{1}{27}\cdot(3-a) = \frac{3-a}{27}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 328

Koliko je $\log \sqrt[9]{5}$, ako je a = log 4?

$$A.\ \frac{a-2}{9} \qquad B.\ \frac{2-a}{18} \qquad C.\ \frac{2}{1-a} \qquad D.\ \frac{a-1}{2-a}$$

Rezultat: B.

Zadatak 329 (Goran, gimnazija)

Ako je $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$ izračunati $\log_{45} 100$.

Rješenje 329

Ponovimo

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1.$$

Preoblikujemo izraz $\log_{45} 100$.

$$\log_{45} 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 45} = \frac{\log_5 (4 \cdot 25)}{\log_5 (5 \cdot 9)} = \frac{\log_5 4 + \log_5 25}{\log_5 5 + \log_5 9} = \frac{\log_5 2^2 + \log_5 5^2}{1 + \log_5 3^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \log_5 2 + 2 \cdot \log_5 5}{1 + 2 \cdot \log_5 3} = \begin{bmatrix} \log_5 2 = a \\ \log_5 3 = b \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot a + 2 \cdot 1}{1 + 2 \cdot b} = \frac{2 \cdot a + 2}{1 + 2 \cdot b}.$$

Vježba 329

Ako je $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$ izračunati $\log_{45} 50$.

Rezultat: $\frac{a+2}{1+2 \cdot b}$.

Zadatak 330 (Martina, ekonomska škola)

Neka je $\log_a m = k$. Izračunajte:

$$a)\ \log_a (a \cdot m) \qquad b)\ \log_a \frac{m}{a} \qquad c)\ \log_a m^k \qquad d)\ \log_a \sqrt[k]{m}$$

Rješenje 330

Ponovimo

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\; \rightarrow \qquad a = b^c$$

$$\log_b b = 1 \quad , \quad \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y.$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a.$$

$$a) \;\; \log_a (a \cdot m) = \log_a a + \log_a m = \left[\log_a m = k \right] = 1 + k.$$

$$b) \;\; \log_a \frac{m}{a} = \log_a m - \log_a a = \left[\log_a m = k \right] = k - 1.$$

$$c) \;\; \log_a m^k = k \cdot \log_a m = \left[\log_a m = k \right] = k \cdot k = k^2.$$

$$d) \;\; \log_a \sqrt[k]{m} = \frac{1}{k} \cdot \log_a m = \left[\log_a m = k \right] = \frac{1}{k} \cdot k = \frac{1}{k} \cdot k = 1.$$

Vježba 330

Neka je $\log_b a = c$. Izračunajte $\log_b \frac{a^2}{b}$.

Rezultat: $2 \cdot c - 1.$

Zadatak 331 (Vinko, srednja škola)

Izrazite log 32 pomoću log 25.

Rješenje 331

Ponovimo

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\; \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \log 10 = 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\log 32 = \log 2^5 = 5 \cdot \log 2 = 5 \cdot \log \frac{10}{5} = 5 \cdot (\log 10 - \log 5) = 5 \cdot (1 - \log 5) = 5 - 5 \cdot \log 5 =$$

$$= 5 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log 5 = 5 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log 5 = 5 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \log 5) = 5 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log 5^2 = 5 - \frac{5}{2} \cdot \log 25.$$

Vježba 331

Izrazite log 16 pomoću log 25.

Rezultat: $4 - 2 \cdot \log 25.$

Zadatak 332 (Vinko, srednja škola)

Odredite nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y za koje vrijedi jednakost log (x + y) = log x + log y.

Rješenje 332

Ponovimo

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad a=b\;\Rightarrow\;b=a\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c\qquad \log_b a=b^c\qquad a=b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x=\log x.$$

$$\log(x\cdot y)=\log x+\log y\quad,\quad \log f(x)=\log g(x)\;\Rightarrow\;f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\log(x+y)=\log x+\log y\;\Rightarrow\;\log(x+y)=\log(x\cdot y)\;\Rightarrow\;x+y=x\cdot y\;\Rightarrow\;x\cdot y=x+y\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;x\cdot y-y=x\;\Rightarrow\;y\cdot(x-1)=x\;\Rightarrow\;y\cdot(x-1)=x\;/\cdot\frac{1}{x-1}\;\Rightarrow\;y=\frac{x}{x-1}.$$

Računamo nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y.

- $$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x}{x-1}\\ x=2\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{2}{2-1}\;\Rightarrow\;y=\frac{2}{1}\;\Rightarrow\;y=2\;\Rightarrow\;(x,\,y)=(2,\,2)$$
- $$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x}{x-1}\\ x=3\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{3}{3-1}\;\Rightarrow\;y=\frac{3}{2}\;\Rightarrow\;(x,\,y)=\left(3,\,\frac{3}{2}\right)$$
- $$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x}{x-1}\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}\;\Rightarrow\;y=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{1}}\;\Rightarrow\;y=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3-2}{2}}\;\Rightarrow\;y=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\;\Rightarrow\;y=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;y=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{1}}\;\Rightarrow\;y=\frac{3}{1}\;\Rightarrow\;y=3\;\Rightarrow\;(x,\,y)=\left(\frac{3}{2},\,3\right).$$

Vježba 332

Odredite nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y za koje vrijedi jednakost log (x + y) = log x + log y.

Rezultat: $\left(4, \frac{4}{3}\right), \left(5, \frac{5}{4}\right), \left(6, \frac{6}{5}\right), \left(7, \frac{7}{6}\right), \ldots$

Zadatak 333 (Log, matematička gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\log_2^2 (x+y) + \log_2^2 (x \cdot y) + 1 = 2 \cdot \log_2 (x+y).$

Rješenje 333

Ponovimo

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \sqrt{a} = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \; , \; b = 0.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$\log_2^2 (x+y) + \log_2^2 (x \cdot y) + 1 = 2 \cdot \log_2 (x+y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2^2 (x+y) + \log_2^2 (x \cdot y) + 1 - 2 \cdot \log_2 (x+y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2^2 (x \cdot y) + \log_2^2 (x+y) - 2 \cdot \log_2 (x+y) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2^2 (x \cdot y) + \left(\log_2 (x+y) - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\log_2 (x \cdot y)\right)^2 + \left(\log_2 (x+y) - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_2 (x \cdot y) = 0 \\ \log_2 (x+y) - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_2 (x \cdot y) = 0 \\ \log_2 (x+y) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 2^0 \\ x+y = 2^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 1 \\ x+y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 1 \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot (2-x) = 1 \Rightarrow 2 \cdot x - x^2 = 1 \Rightarrow 2 \cdot x - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow -x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \;/ \sqrt{} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{array}{l} x+y = 2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1.$$

Rješenje jednadžbe je:

$$(x, \; y) = (1, \; 1).$$

Vježba 333

Riješite jednadžbu: $1 + \log_2^2 (x \cdot y) = \log_2 (x+y) \cdot \left(2 - \log_2 (x+y)\right).$

Rezultat: $(x, \; y) = (1, \; 1).$

Zadatak 334 (Help, srednja škola)

Riješite jednadžbu: $32^{x-3}=0.25^{1-x}\cdot 0.125^{x}$.

Rješenje 334

Ponovimo

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$32^{x-3}=0.25^{1-x}\cdot 0.125^{x} \Rightarrow \left(2^{5}\right)^{x-3}=\left(\frac{25}{100}\right)^{1-x}\cdot\left(\frac{125}{1000}\right)^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2^{5}\right)^{x-3}=\left(\frac{25}{100}\right)^{1-x}\cdot\left(\frac{125}{1000}\right)^{x} \Rightarrow \left(2^{5}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{5\cdot x-15}=\left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{1-x}\cdot\left(\frac{1}{2^{3}}\right)^{x} \Rightarrow 2^{5\cdot x-15}=\left(2^{-2}\right)^{1-x}\cdot\left(2^{-3}\right)^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{5\cdot x-15}=2^{-2+2\cdot x}\cdot 2^{-3\cdot x} \Rightarrow 2^{5\cdot x-15}=2^{-2+2\cdot x-3\cdot x} \Rightarrow 2^{5\cdot x-15}=2^{-2-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x-15=-2-x \Rightarrow 5\cdot x+x=-2+15 \Rightarrow 6\cdot x=13 \Rightarrow 6\cdot x=13 \ /:6 \Rightarrow x=\frac{13}{6}.$$

Vježba 334

Riješite jednadžbu: $32^{x-3}=4^{-1+x}\cdot 0.125^{x}$.

Rezultat: $x=\frac{13}{6}.$

Zadatak 335 (Help, srednja škola)

Riješite jednadžbu: $100\cdot 10^{2\cdot x-2}=1000^{\frac{x+1}{9}}$.

Rješenje 335

Ponovimo

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$100\cdot 10^{2\cdot x-2}=1000^{\frac{x+1}{9}} \Rightarrow 10^{2}\cdot 10^{2\cdot x-2}=\left(10^{3}\right)^{\frac{x+1}{9}} \Rightarrow 10^{2+2\cdot x-2}=10^{3\cdot\frac{x+1}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{2+2\cdot x-2}=10^{3\cdot\frac{x+1}{9}} \Rightarrow 10^{2\cdot x}=10^{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow 2\cdot x=\frac{x+1}{3} \Rightarrow 2\cdot x=\frac{x+1}{3} \;/\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot x=x+1 \Rightarrow 6\cdot x-x=1 \Rightarrow 5\cdot x=1 \Rightarrow 5\cdot x=1 \;/\cdot\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{5}.$$

Vježba 335

Riješite jednadžbu: $10^{2\cdot x-2}=0.01\cdot 1000^{\frac{x+1}{9}}$.

Rezultat: $x=\frac{1}{5}$.

Zadatak 336 (Help, srednja škola)

Riješite jednadžbu: $4^{x}=2^{\frac{x+1}{x}}$.

Rješenje 336

Ponovimo

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x) \quad , \quad a^{1}=a.$$

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot b=a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;, \; n\neq 0 \;, \; n\neq 1.$$

$$4^{x}=2^{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow \left(2^{2}\right)^{x}=2^{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow 2^{2\cdot x}=2^{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow 2\cdot x=\frac{x+1}{x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ x\neq 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=\frac{x+1}{x} \;/\cdot x \Rightarrow 2\cdot x^{2}=x+1 \Rightarrow 2\cdot x^{2}-x-1=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}2\cdot x^{2}-x-1=0\\ a=2 \;,\; b=-1 \;,\; c=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}a=2 \;,\; b=-1 \;,\; c=-1\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^{2}-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_{1}=\dfrac{1+3}{4}\\ x_{2}=\dfrac{1-3}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}x_{1}=\dfrac{4}{4}\\ x_{2}=-\dfrac{2}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_{1}=\dfrac{4}{4}\\ x_{2}=-\dfrac{2}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_{1}=1\\ x_{2}=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 336

Riješite jednadžbu: $0.25^{-x}=2^{\frac{x+1}{x}}$.

Rezultat: $x_1 = 1\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$

Zadatak 337 (Ivana, ekonomska škola)

Riješite jednadžbu: $4^x - 4^{x-2} = 60.$

Rješenje 337

Ponovimo

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

$$4^x - 4^{x-2} = 60 \Rightarrow 4^x - 4^x \cdot 4^{-2} = 60 \Rightarrow 4^x - 4^x \cdot 4^{-2} = 60 \Rightarrow 4^x \cdot \left(1 - 4^{-2}\right) = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = 60 \Rightarrow 4^x \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 60 \Rightarrow 4^x \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{16}\right) = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x \cdot \frac{16-1}{16} = 60 \Rightarrow 4^x \cdot \frac{15}{16} = 60 \Rightarrow 4^x \cdot \frac{15}{16} = 60\ / \cdot \frac{16}{15} \Rightarrow 4^x = 60 \cdot \frac{16}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x = 60 \cdot \frac{16}{15} \Rightarrow 4^x = 4 \cdot 16 \Rightarrow 4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3.$$

Vježba 337

Riješite jednadžbu: $4^{x-1} = 15 + 4^{x-3}.$

Rezultat: x = 3.

Zadatak 338 (Dajana, tehnička škola)

Riješite jednadžbu: $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$

Rješenje 338

Ponovimo

$$a = b\ ,\ c \in R \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1} \Rightarrow 3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1} \;/\cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x+2}=36\cdot 4^{x+1}-3\cdot 9^{x+1} \Rightarrow 2\cdot 9^{x+2}+3\cdot 9^{x+1}=36\cdot 4^{x+1}-18\cdot 4^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 9^{x}\cdot 9^{2}+3\cdot 9^{x}\cdot 9^{1}=36\cdot 4^{x}\cdot 4^{1}-18\cdot 4^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 9^{x}\cdot 9^{2}+3\cdot 9^{x}\cdot 9^{1}=36\cdot 4^{x}\cdot 4^{1}-18\cdot 4^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^{x}\cdot\left(2\cdot 9^{2}+3\cdot 9^{1}\right)=4^{x}\cdot\left(36\cdot 4^{1}-18\right) \Rightarrow 9^{x}\cdot(2\cdot 81+3\cdot 9)=4^{x}\cdot(36\cdot 4-18) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^{x}\cdot(162+27)=4^{x}\cdot(144-18) \Rightarrow 9^{x}\cdot 189=4^{x}\cdot 126 \Rightarrow 9^{x}\cdot 189=4^{x}\cdot 126 \;/\cdot\frac{1}{4^{x}\cdot 189} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9^{x}}{4^{x}}=\frac{126}{189} \Rightarrow \frac{9^{x}}{4^{x}}=\frac{126}{189} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{kratimo}\\ \text{s } 63\end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{9^{x}}{4^{x}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{9^{x}}{4^{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right)^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=-1 \Rightarrow 2\cdot x=-1 \;/:2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Vježba 338

Riješite jednadžbu: $3\cdot 4^{x}+3\cdot 9^{x+1}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

Rezultat: $x=-\frac{1}{2}$.

Zadatak 339 (Paula, maturantica)

Zadana je funkcija $f(x)=\log_{2}(5\cdot x-1)$. Odredite nultočku funkcije f.

Rješenje 339

Ponovimo

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_{b} a=c \qquad \log_{b} a=b^{c} \qquad a=b^{c}$$

$$\log_{b} 1=0 \quad , \quad a^{0}=1 \; , \; a\neq 0 \quad , \quad \log_{b} f(x)=\log_{b} g(x) \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x)=\log_{b} x,$$

gdje je b > 0 i b ≠ 1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x\in\langle 0, +\infty\rangle.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Računamo nultočku funkcije tako da postavimo jednadžbu.

1.inačica

$$f(x)=0 \Rightarrow \log_2(5\cdot x-1)=0 \Rightarrow 5\cdot x-1=2^0 \Rightarrow 5\cdot x-1=1 \Rightarrow 5\cdot x=1+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x=2 \Rightarrow 5\cdot x=2 \ /:5 \Rightarrow x=\frac{2}{5}.$$

2.inačica

$$f(x)=0 \Rightarrow \log_2(5\cdot x-1)=0 \Rightarrow \log_2(5\cdot x-1)=\log_2 1 \Rightarrow 5\cdot x-1=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x=1+1 \Rightarrow 5\cdot x=2 \Rightarrow 5\cdot x=2 \ /:5 \Rightarrow x=\frac{2}{5}.$$

Vježba 339

Zadana je funkcija $f(x)=\log_2(10\cdot x-2)$. Odredite nultočku funkcije f.

Rezultat: $x=\frac{3}{10}.$

Zadatak 340 (Paula, maturantica)

Zadana je funkcija $f(x)=\log(1+x)-\log(3-2\cdot x)$. Riješite jednadžbu f(x) = 0.

Rješenje 340

Ponovimo

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log *x* zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x=\log x.$$

$$\log f(x)=\log g(x) \Rightarrow f(x)=g(x) \quad , \quad a>b \ , \ c<0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c.$$

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x)=\log_b x,$$

gdje je b > 0 i b ≠ 1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x\in\langle 0, +\infty\rangle.$$

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da baza mora biti pozitivan broj i različit od 1, a logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postavit ćemo sljedeće nejednadžbe koje tražena rješenja moraju zadovoljiti:

$$\left.\begin{matrix}1+x>0\\3-2\cdot x>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x>-1\\-2\cdot x>-3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x>-1\\-2\cdot x>-3 \ /:(-2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x>-1\\x<\frac{3}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{presjek}\\\text{zajednički dio}\\\text{oba rješenja}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left\langle -1, \frac{3}{2}\right\rangle.$$

Tražimo rješenje jednadžbe.

$$f(x)=0 \Rightarrow \log(1+x)-\log(3-2\cdot x)=0 \Rightarrow \log(1+x)=\log(3-2\cdot x) \Rightarrow 1+x=3-2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x + 2 \cdot x = 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot x = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot x = 2 \;\; /:3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Budući da vrijedi

$$\frac{2}{3} \in \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle,$$

rješenje jednadžbe je

$$x = \frac{2}{3}.$$

Vježba 340

Zadana je funkcija $f(x) = \log(2 + 2 \cdot x) - \log(6 - 4 \cdot x)$. Riješite jednadžbu f(x) = 0.

Rezultat: $x = \frac{2}{3}.$