Zadatak 441 (Mirela, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $5^x - 2^{1-x} \cdot 10^x = -25.$

Rješenje 441

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a^\circ = 1 \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

1.inačica

$$5^x - 2^{1-x} \cdot 10^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2^1 \cdot 2^{-x} \cdot (2 \cdot 5)^x = -25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x - 2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^x \cdot 5^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2 \cdot 2^{-x+x} \cdot 5^x = -25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x - 2 \cdot 2^\circ \cdot 5^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2 \cdot 1 \cdot 5^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2 \cdot 5^x = -25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5^x = -25 \Rightarrow -5^x = -25 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2.$$

2.inačica

$$5^x - 2^{1-x} \cdot 10^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2^1 \cdot 2^{-x} \cdot 10^x = -25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x - 2 \cdot \frac{1}{2^x} \cdot 10^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2 \cdot \frac{10^x}{2^x} = -25 \Rightarrow 5^x - 2 \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^x = -25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x - 2 \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^x = -25 \Rightarrow 5^x - 2 \cdot 5^x = -25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5^x = -25 \Rightarrow -5^x = -25 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2.$$

Vježba 441

Riješi jednadžbu: $5^x + 25 = 2^{1-x} \cdot 10^x.$

Rezultat: x = 2.

Zadatak 442 (Mirela, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $a^x \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{a^x}.$

Rješenje 442

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$a^{x}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n]{a^{x}} \Rightarrow a^{x}\cdot a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{x}{n}} \Rightarrow a^{x+\frac{1}{m}}=a^{\frac{x}{n}} \Rightarrow x+\frac{1}{m}=\frac{x}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{m}=\frac{x}{n} \;/\cdot m\cdot n \Rightarrow m\cdot n\cdot x+n=m\cdot x \Rightarrow m\cdot n\cdot x-m\cdot x=-n \Rightarrow m\cdot x\cdot(n-1)=-n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot x\cdot(n-1)=-n \;/\cdot\frac{1}{m\cdot(n-1)} \Rightarrow x=\frac{-n}{m\cdot(n-1)} \Rightarrow x=\frac{n}{-m\cdot(n-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{n}{m\cdot(1-n)}\ ,\ m\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Vježba 442

Riješi jednadžbu: $a^{x}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{x}}}{\sqrt[m]{a}}$.

Rezultat: $x=\dfrac{n}{m\cdot(1-n)}\ ,\ m\neq 0\ ,\ n\neq 1.$

Zadatak 443 (Marija, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\log_{2}(x-2)=\log_{4}(2\cdot x)$.

Rješenje 443

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_{b}a=c \qquad \log_{b}a=b^{c} \qquad a=b^{c}$$

$$\log_{b^{n}}a=\frac{1}{n}\cdot\log_{b}a\quad,\quad \log_{b}a^{n}=n\cdot\log_{b}a\quad,\quad \log_{b}f(x)=\log_{b}g(x)\Rightarrow f(x)=g(x).$$

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}.$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10}x=\log x.$$

$$\log_{b}a=\frac{\log a}{\log b}\quad,\quad \log a^{n}=n\cdot\log a\ ,\ \log f(x)=\log g(x)\Rightarrow f(x)=g(x).$$

$$a>b\ ,\ c>0\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\quad,\quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.
Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x\in D$ pridružen točno jedan element $f(x)\in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f:D\rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.
Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\log_{b}x$ je interval realnih brojeva

$$D(f)=\langle 0,\ +\infty\rangle.$$

Uočimo da iz $\log x$ slijedi $x>0$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\log_2(x-2)=\log_4(2\cdot x).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{matrix}x-2>0\\ 2\cdot x>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x>2\\ 2\cdot x>0\ /:2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x>2\\ x>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{zajednički dio}\\ \text{presjek}\end{bmatrix}\Rightarrow x>2.$$

1.inačica

$$\log_2(x-2)=\log_4(2\cdot x)\Rightarrow\log_2(x-2)=\log_{2^2}(2\cdot x)\Rightarrow\log_2(x-2)=\frac{1}{2}\cdot\log_2(2\cdot x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_2(x-2)=\frac{1}{2}\cdot\log_2(2\cdot x)\ /\cdot 2\Rightarrow 2\cdot\log_2(x-2)=\log_2(2\cdot x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_2(x-2)^2=\log_2(2\cdot x)\Rightarrow(x-2)^2=2\cdot x\Rightarrow x^2-4\cdot x+4=2\cdot x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4\cdot x+4-2\cdot x=0\Rightarrow x^2-6\cdot x+4=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2-6\cdot x+4=0\\ a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=4\\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4\cdot 5}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 2\cdot\sqrt{5}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(3\pm\sqrt{5})}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(3\pm\sqrt{5})}{2}\Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=3+\sqrt{5}\\ x_2=3-\sqrt{5}\ \text{nema smisla jer mora biti}\ x>2\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=3+\sqrt{5}.$$

2.inačica

$$\log_2(x-2)=\log_4(2\cdot x)\Rightarrow\frac{\log(x-2)}{\log 2}=\frac{\log(2\cdot x)}{\log 4}\Rightarrow\frac{\log(x-2)}{\log 2}=\frac{\log(2\cdot x)}{\log 2^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\log(x-2)}{\log 2}=\frac{\log(2\cdot x)}{2\cdot\log 2}\Rightarrow\frac{\log(x-2)}{\log 2}=\frac{\log(2\cdot x)}{2\cdot\log 2}\ /\cdot 2\cdot\log 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\log(x-2)=\log(2\cdot x)\Rightarrow\log(x-2)^2=\log(2\cdot x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-2)^2=2\cdot x\Rightarrow x^2-4\cdot x+4=2\cdot x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4\cdot x+4-2\cdot x=0 \Rightarrow x^2-6\cdot x+4=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-6\cdot x+4=0 \\ a=1 \;,\; b=-6 \;,\; c=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=-6 \;,\; c=4 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4\cdot 5}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 2\cdot\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(3\pm\sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(3\pm\sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3+\sqrt{5} \\ x_2=3-\sqrt{5} \text{ nema smisla jer mora biti } x>2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=3+\sqrt{5}.$$

Vježba 443

Riješi jednadžbu: $\log_2(x-2)-\log_4(2\cdot x)=0.$

Rezultat: $x=3+\sqrt{5}.$

Zadatak 444 (Paula, gimnazija)

Ako je $27^m=8$, koliko je 9^m?

$A.\ 2 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 6$

Rješenje 444

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad \sqrt[3]{a^3}=a.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \;\rightarrow \qquad a=b^c$$

$$b^{\log_b a}=a.$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x=\log x.$$

$$\log a^n=n\cdot\log a \quad , \quad \log_b a=\frac{\log a}{\log b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

Iz zadane jednadžbe dobije se:

$$27^m = 8 \Rightarrow \left(3^3\right)^m = 2^3 \Rightarrow \left(3^m\right)^3 = 2^3 \Rightarrow \left(3^m\right)^3 = 2^3 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\left(3^m\right)^3} = \sqrt[3]{2^3} \Rightarrow 3^m = 2.$$

Tada je:

$$9^m = \left(3^2\right)^m = \left(3^m\right)^2 = \left[3^m = 2\right] = 2^2 = 4.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Iz zadane jednadžbe pomoću logaritmiranja izračunamo m.

$$27^m = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow 27^m = 8 \ / \log \Rightarrow \log 27^m = \log 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot \log 27 = \log 8 \Rightarrow m \cdot \log 27 = \log 8 \ / \cdot \frac{1}{\log 27} \Rightarrow m = \frac{\log 8}{\log 27} \Rightarrow m = \frac{\log 2^3}{\log 3^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{3 \cdot \log 2}{3 \cdot \log 3} \Rightarrow m = \frac{3 \cdot \log 2}{3 \cdot \log 3} \Rightarrow m = \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow m = \log_3 2.$$

Sada je:

$$9^m = 9^{\log_3 2} = \left(3^2\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 444

Ako je $81^m = 16$, koliko je 9^m?

$A.\ 2 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 6$

Rezultat: C.

Zadatak 445 (Ante, srednja škola)

Riješite nejednadžbu $7^{x-1} \le 2$.

Rješenje 445

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \rightarrow \qquad a = b^c$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad a \le b \ , \ c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}.$$

$$\log_b f(x) \le \log_b g(x) \ , \ b > 1 \Rightarrow f(x) \le g(x).$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^{n} = n \cdot \log a \quad , \quad \log_{b} a = \frac{\log a}{\log b} \quad , \quad \log f(x) \le \log g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \le g(x).$$

1.inačica

$$7^{x-1} \le 2 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{nejednadžbu}\end{array}\right] \;\Rightarrow\; 7^{x-1} \le 2 \;/\; \log \;\Rightarrow\; \log 7^{x-1} \le \log 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x-1)\cdot \log 7 \le \log 2 \;\Rightarrow\; (x-1)\cdot \log 7 \le \log 2 \;/\!:\; \log 7 \;\Rightarrow\; x-1 \le \frac{\log 2}{\log 7} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \le 1 + \frac{\log 2}{\log 7} \;\Rightarrow\; x \le 1 + \log_{7} 2.$$

2.inačica

$$7^{x-1} \le 2 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{nejednadžbu}\end{array}\right] \;\Rightarrow\; 7^{x-1} \le 2 \;/\; \log_{7} \;\Rightarrow\; \log_{7} 7^{x-1} \le \log_{7} 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x-1)\cdot \log_{7} 7 \le \log_{7} 2 \;\Rightarrow\; (x-1)\cdot 1 \le \log_{7} 2 \;\Rightarrow\; x-1 \le \log_{7} 2 \;\Rightarrow\; x \le 1 + \log_{7} 2.$$

Vježba 445

Riješite nejednadžbu $5^{x-1} \le 3.$

Rezultat: $x \le 1 + \log_{5} 3.$

Zadatak 446 (Ante, srednja škola)

Napišite izraz $\dfrac{1}{\log_{5} a^{2}}$ s pomoću logaritma po bazi a.

Rješenje 446

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_{b} a = c \qquad \log_{b} a = b^{c} \; \rightarrow \qquad a = b^{c}$$

$$\log_{b} a^{n} = n \cdot \log_{b} a \quad , \quad \log_{b} a = \frac{1}{\log_{a} b} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_{b} a = \frac{\log a}{\log b}.$$

1.inačica

$$\frac{1}{\log_{5} a^{2}} = \frac{1}{2 \cdot \log_{5} a} = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot \frac{1}{\log_{a} 5}} = \frac{\log_{a} 5}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_{a} 5.$$

2.inačica

$$\frac{1}{\log_5 a^2}=\frac{1}{2\cdot\log_5 a}=\frac{\log_a 5}{2}=\frac{1}{2}\cdot\log_a 5.$$

3.inačica

$$\frac{1}{\log_5 a^2}=\frac{1}{2\cdot\log_5 a}=\frac{\frac{1}{1}}{2\cdot\frac{\log a}{\log 5}}=\frac{\log 5}{2\cdot\log a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log 5}{\log a}=\frac{1}{2}\cdot\log_a 5.$$

Vježba 446

Napišite izraz $\frac{1}{\log_3 a^4}$ s pomoću logaritma po bazi a.

Rezultat: $\frac{1}{4}\cdot\log_a 3.$

Zadatak 447 (Max, gimnazija)

Dokažite da je $\left(\log_2 3\right)^{-1}+\left(\log_5 3\right)^{-1}>2.$.

Rješenje 447

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \ \rightarrow \qquad a=b^c$$

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b} \quad , \quad \log_b x+\log_b y=\log_b(x\cdot y) \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1=a.$$

Treba dokazati da je

$$\left(\log_2 3\right)^{-1}+\left(\log_5 3\right)^{-1}>2.$$

Preoblikujemo lijevu stranu nejednakosti.

$$\left(\log_2 3\right)^{-1}+\left(\log_5 3\right)^{-1}=\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 2+\log_3 5=\log_3(2\cdot 5)=\log_3 10.$$

Ako stavimo

$$\log_3 10=x$$

dobije se

$$\log_3 10=x \ \Rightarrow\ 3^x=10 \ \Rightarrow\ x>2.$$

Vježba 447

Dokažite da je $\left(\log_2 3\right)^{-1}+\left(\log_5 3\right)^{-1}>\frac{3}{2}.$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 448 (Max, gimnazija)

Dokažite da je $\left(\log_2 \pi\right)^{-1} + \left(\log_5 \pi\right)^{-1} > 2.$.

Rješenje 448

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , \quad \log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y) \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$\pi^2 \approx 9.86960.$$

Treba dokazati da je

$$\left(\log_2 \pi\right)^{-1} + \left(\log_5 \pi\right)^{-1} > 2.$$

Preoblikujemo lijevu stranu nejednakosti.

$$\left(\log_2 \pi\right)^{-1} + \left(\log_5 \pi\right)^{-1} = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi (2 \cdot 5) = \log_\pi 10.$$

Ako stavimo

$$\log_\pi 10 = x$$

dobije se

$$\log_\pi 10 = x \Rightarrow \pi^x = 10 \Rightarrow x > 2.$$

Vježba 448

Dokažite da je $\left(\log_2 \pi\right)^{-1} + \left(\log_5 \pi\right)^{-1} > \frac{3}{2}.$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 449 (Marko, ekonomska škola)

Odredite dva uzastopna cijela broja između kojih se nalazi n, ako je $5^n = 8.$.

Rješenje 449

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \; , \; a > 1 \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Skup cijelih brojeva Z predstavlja skup

$$Z = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

1.inačica

$$5^n = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow 5^n = 8 \ / \log \Rightarrow \log 5^n = \log 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \log 5 = \log 8 \Rightarrow n \cdot \log 5 = \log 8 \ / \cdot \frac{1}{\log 5} \Rightarrow n = \frac{\log 8}{\log 5} \Rightarrow n = 1.292 \Rightarrow 1 < n < 2.$$

2.inačica

$$\left. \begin{array}{l} 5^1 = 5 \\ 5^n = 8 \\ 5^2 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 < 8 < 25 \Rightarrow 5^1 < 5^n < 5^2 \Rightarrow 1 < n < 2.$$

Vježba 449

Odredite dva uzastopna cijela broja između kojih se nalazi n, ako je $4^n = 11.$.

Rezultat: $1 < n < 2.$

Zadatak 450 (Sandra, maturantica)

Ako je $\log_a 2 = x$ i $\log_a 3 = y$, koliko je $\log_a 24$?

$A.\ 3 + x \qquad B.\ 3 + y \qquad C.\ 3 \cdot x + y \qquad D.\ x + 3 \cdot y$

Rješenje 450

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.

Broj 24 rastavimo na proste faktore.

$$\begin{array}{r|l} 24 = & 2 \cdot 12 \\ = & 2 \cdot 2 \cdot 6 \\ = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ = & 2^3 \cdot 3 \end{array}$$

Dalje imamo:

$$\log_a 24 = \log_a \left(2^3 \cdot 3\right) = \log_a 2^3 + \log_a 3 = 3 \cdot \log_a 2 + \log_a 3 = \begin{bmatrix} \log_a 2 = x \\ \log_a 3 = y \end{bmatrix} = 3 \cdot x + y.$$

Vježba 450

Ako je $\log_a 2 = x$ i $\log_a 3 = y$, koliko je $\log_a 12$?

$A.\ 2 + x \qquad B.\ 2 + y \qquad C.\ 2 \cdot x + y \qquad D.\ x + 2 \cdot y$

Rezultat: C.

Zadatak 451 (Danijel, gimnazija)

Riješite sustav jednadžbi: $\begin{cases} \log_5 (8 \cdot x) = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$.

Rješenje 451

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_b b = 1 \quad , \quad \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Preoblikujemo prvu jednadžbu sustava.

$$\log_5 (8 \cdot x) = 1 + \log_5 4 \Rightarrow \log_5 (8 \cdot x) = \log_5 5 + \log_5 4 \Rightarrow \log_5 (8 \cdot x) = \log_5 (5 \cdot 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 (8 \cdot x) = \log_5 20 \Rightarrow 8 \cdot x = 20 \Rightarrow 8 \cdot x = 20 \ /:8 \Rightarrow x = \frac{20}{8} \Rightarrow x = \frac{20}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Sada riješimo sustav jednadžbi:

$$\left. \begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ x^y = \dfrac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^y = \frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^y = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^y = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \Rightarrow y = -1.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x, \ y) = \left(\frac{5}{2}, \ -1\right).$$

Vježba 451

Riješite sustav jednadžbi: $\begin{cases} \log_5 8 + \log_5 x = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$.

Rezultat: $(x, \ y) = \left(\dfrac{5}{2}, \ -1\right).$

Zadatak 452 (4A, 4B, TUPŠ)

Ako je $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$, onda $\dfrac{5 + a}{b + 2 \cdot a}$ iznosi:

$A. \ \log_{45} 96 \qquad B. \ \log_{96} 45 \qquad C. \ \log_{15} 96 \qquad D. \ 1$

Rješenje 452

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \xrightarrow{} \qquad a = b^c$$

$$\log_b b^n = n \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y.$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

$$\frac{5+a}{b+2\cdot a} = \begin{bmatrix} \log_2 3 = a \\ \log_2 5 = b \end{bmatrix} = \frac{5+\log_2 3}{\log_2 5 + 2\cdot \log_2 3} = \frac{\log_2 2^5 + \log_2 3}{\log_2 5 + 2\cdot \log_2 3} =$$

$$= \frac{\log_2 \left(2^5 \cdot 3\right)}{\log_2 \left(5 \cdot 3^2\right)} = \frac{\log_2 (32\cdot 3)}{\log_2 (5\cdot 9)} = \frac{\log_2 96}{\log_2 45} = \log_{45} 96.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 452

Ako je $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$, onda $\dfrac{a+5}{2\cdot a+b}$ iznosi:

$A.\ \log_{45} 96 \qquad B.\ \log_{96} 45 \qquad C.\ \log_{15} 96 \qquad D.\ 1$

Rezultat: A.

Zadatak 453 (Miroslav, gimnazija)

Riješite nejednadžbu: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8.$

Rješenje 453

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \ , \ a>1 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

$$a > b \ , \ c < 0 \Rightarrow a\cdot c < b \cdot c \quad , \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \ , \ 0<a<1 \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \xrightarrow{} \qquad a = b^c$$

$$\log_b b^n = n \quad , \quad \log_b f(x) > \log_b g(x) \ , \ b>1 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

$$\log_b f(x) > \log_b g(x) \ , \ 0<b<1 \Rightarrow f(x) < g(x).$$

1.inačica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2^1}\right)^x > 2^3 \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x > 2^3 \Rightarrow 2^{-x} > 2^3 \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x > 3 \ /\cdot (-1) \Rightarrow x < -3.$$

2.inačica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(2^{-1}\right)^{-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2^1}\right)^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x < -3.$$

3.inačica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2^1}\right)^x > 8 \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x > 8 \Rightarrow 2^{-x} > 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo} \\ \text{u bazi } 2\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-x} > 8 \; / \log_2 \Rightarrow \log_2 2^{-x} > \log_2 8 \Rightarrow \log_2 2^{-x} > \log_2 2^3 \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x > 3 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x < -3.$$

4.inačica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(2^{-1}\right)^{-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2^1}\right)^{-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo} \\ \text{u bazi } \frac{1}{2}\end{array}\right] \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \; / \log_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -3.$$

Vježba 453

Riješite nejednadžbu: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 16.$

Rezultat: $x < -4.$

Zadatak 454 (Sandra, maturantica)

Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama. Na kojoj je visini zrakoplov 4 minute nakon polijetanja?

Rješenje 454

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1) \Rightarrow [t = 4] \Rightarrow h(4) = 1.4 \cdot \log(4+1) \Rightarrow h(4) = 1.4 \cdot \log 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{džepno} \\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow h(4) = 0.97856 \; km.$$

Vježba 454

Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama. Na kojoj je visini zrakoplov 240 sekundi nakon polijetanja?

Rezultat: 0.97856 km.

Zadatak 455 (Sandra, maturantica)

Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama. Nakon koliko je vremena zrakoplov na visini od 2.5 km?

Rješenje 455

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad \log a = b \;\Rightarrow\; a = 10^b \; .$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1 .$$

$$h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1) \;\Rightarrow\; \left[\, h(t) = 2.5 \,\right] \;\Rightarrow\; 2.5 = 1.4 \cdot \log(t+1) \;\Rightarrow\; 1.4 \cdot \log(t+1) = 2.5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1.4 \cdot \log(t+1) = 2.5 \;/ \cdot \frac{1}{1.4} \;\Rightarrow\; \log(t+1) = \frac{2.5}{1.4} \;\Rightarrow\; \log(t+1) = \frac{2.5}{1.4} \;\Rightarrow\; \log(t+1) = \frac{25}{14} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; t+1 = 10^{\frac{25}{14}} \;\Rightarrow\; t = 10^{\frac{25}{14}} - 1 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; t = 60.05 \text{ min} .$$

Vježba 455

Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama. Nakon koliko je vremena zrakoplov na visini od 2500 m?

Rezultat: 60.05 min.

Zadatak 456 (Sandra, maturantica)

Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t) = 1.4 \cdot \log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama. S iste piste u razmaku od 10 minuta poletjela su dva zrakoplova. Koliko će dugo letjeti drugi zrakoplov do trenutka kada će biti na visini 100 m manjoj od visine na kojoj se nalazi prvi zrakoplov?

Rješenje 456

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

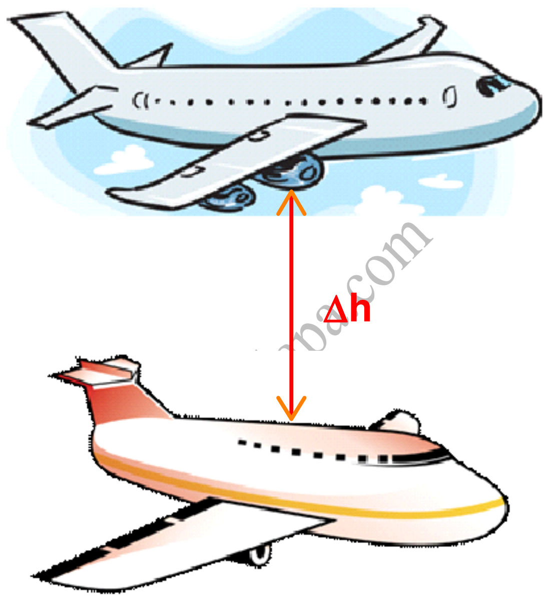
$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad , \quad \log a = b \Rightarrow a = 10^b \; .$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$



Nakon vremena t drugi je zrakoplov na visini

$$h(t) = 1.4 \cdot \log(t + 1).$$

Prvi zrakoplov koji je poletio ranije za Δt od prvog bit će na visini

$$h(t + \Delta t) = 1.4 \cdot \log(t + \Delta t + 1).$$

Razlika njihovih visina iznosi:

$$\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta h = 0.1 \\ \Delta t = 10 \end{bmatrix} \Rightarrow 0.1 = 1.4 \cdot \log(t + 10 + 1) - 1.4 \cdot \log(t + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.1 = 1.4 \cdot \log(t + 11) - 1.4 \cdot \log(t + 1) \Rightarrow 0.1 = 1.4 \cdot (\log(t + 11) - \log(t + 1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.1 = 1.4 \cdot \log \frac{t + 11}{t + 1} \Rightarrow 1.4 \cdot \log \frac{t + 11}{t + 1} = 0.1 \Rightarrow 1.4 \cdot \log \frac{t + 11}{t + 1} = 0.1 \; / \cdot \frac{1}{1.4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{t + 11}{t + 1} = \frac{0.1}{1.4} \Rightarrow \log \frac{t + 11}{t + 1} = \frac{0.1}{1.4} \Rightarrow \log \frac{t + 11}{t + 1} = \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{t + 11}{t + 1} = 10^{\frac{1}{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t+11}{t+1}=10^{\frac{1}{14}} \ /\cdot (t+1) \Rightarrow t+11=(t+1)\cdot 10^{\frac{1}{14}} \Rightarrow t+11=t\cdot 10^{\frac{1}{14}}+10^{\frac{1}{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t-t\cdot 10^{\frac{1}{14}}=10^{\frac{1}{14}}-11 \Rightarrow t\cdot\left(1-10^{\frac{1}{14}}\right)=10^{\frac{1}{14}}-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t-t\cdot 10^{\frac{1}{14}}=10^{\frac{1}{14}}-11 \Rightarrow t\cdot\left(1-10^{\frac{1}{14}}\right)=10^{\frac{1}{14}}-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\cdot\left(1-10^{\frac{1}{14}}\right)=10^{\frac{1}{14}}-11 \ /\cdot \frac{1}{1-10^{\frac{1}{14}}} \Rightarrow t=\frac{10^{\frac{1}{14}}-11}{1-10^{\frac{1}{14}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow t=54.94 \text{ min}.$$

Vježba 456

Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t)=1.4\cdot\log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama. S iste piste u razmaku od 10 minuta poletjela su dva zrakoplova. Koliko će dugo letjeti drugi zrakoplov do trenutka kada će biti na visini 0.1 km manjoj od visine na kojoj se nalazi prvi zrakoplov?

Rezultat: 54.94 min.

Zadatak 457 (Darko, srednja škola)

Riješite jednadžbu: $\sqrt[4]{125}=\frac{1}{5^{2-x}}$.

Rješenje 457

Ponovimo!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\sqrt[4]{125}=\frac{1}{5^{2-x}} \Rightarrow \sqrt[4]{5^3}=5^{-(2-x)} \Rightarrow 5^{\frac{3}{4}}=5^{-2+x} \Rightarrow \frac{3}{4}=-2+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}=-2+x \ /\cdot 4 \Rightarrow 3=4\cdot(-2+x) \Rightarrow 3=-8+4\cdot x \Rightarrow -8+4\cdot x=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x=3+8 \Rightarrow 4\cdot x=11 \Rightarrow 4\cdot x=11 \ /:4 \Rightarrow x=\frac{11}{4}.$$

Vježba 457

Riješite jednadžbu: $5^{2-x}=\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$.

Rezultat: $x=\frac{11}{4}$.

Zadatak 458 (Marijan, srednja škola)

Što od navedenoga vrijedi za brojeve x, y ako je (x, y) rješenje zadanoga sustava jednadžba?

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 \\ 3 \cdot 3^x - 27^y = 0 \end{cases}$$

$$A.\ \frac{x}{y} = \frac{9}{4} \qquad B.\ x - y = \frac{11}{3} \qquad C.\ x \cdot y = 3 \qquad D.\ x + y = 4$$

Rješenje 458

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$\log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y) \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad \log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a^1 = a \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot b = a \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

$$\left.\begin{matrix} \log_4 x + \log_4 y = 1 \\ 3 \cdot 3^x - 27^y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log_4 (x \cdot y) = 1 \\ 3 \cdot 3^x = 27^y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log_4 (x \cdot y) = \log_4 4 \\ 3^1 \cdot 3^x = \left(3^3\right)^y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x \cdot y = 4 \\ 3^{1+x} = 3^{3 \cdot y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \cdot y = 4 \\ 1 + x = 3 \cdot y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \cdot y = 4 \\ x = 3 \cdot y - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 \cdot y - 1) \cdot y = 4 \Rightarrow 3 \cdot y^2 - y = 4 \Rightarrow 3 \cdot y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot y^2 - y - 4 = 0 \\ a = 3 \ , \ b = -1 \ , \ c = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 3 \ , \ b = -1 \ , \ c = -4 \\ y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{6} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = \frac{1+7}{6} \\ y_2 = \frac{1-7}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{8}{6} \\ y_2 = -\frac{6}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{8}{6} \\ y_2 = -\frac{6}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{4}{3} \\ y_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Računamo x.

- $\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 4 \\ y = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot \frac{4}{3} = 4 \Rightarrow x \cdot \frac{4}{3} = 4 \; / \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 = 3$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 4 \\ y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot (-1) = 4 \Rightarrow x \cdot (-1) = 4 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x_2 = -4.$

Rješenja su:

$$(x_1, y_1) = \left(3, \frac{4}{3}\right) \;,\; (x_2, y_2) = (-4, -1).$$

Od navedenoga za brojeve x , y vrijedi:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{4}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 458

Što od navedenoga vrijedi za brojeve x, y ako je (x, y) rješenje zadanoga sustava jednadžba?

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 \\ 3 \cdot 3^x - 27^y = 0 \end{cases}$$

$A.\ \frac{x}{y} = \frac{9}{8}$ $\quad B.\ x - y = -3$ $\quad C.\ x \cdot y = 3$ $\quad D.\ x + y = 4$

Rezultat: B.

Zadatak 459 (Palčica, maturantica)

$\log(a \cdot b) - \log(b \cdot c) - \log(c \cdot a) =$

$A.\ \log(a \cdot b \cdot c)$ $\quad B.\ -2 \cdot \log a$ $\quad C.\ -2 \cdot \log b$ $\quad D.\ -2 \cdot \log c$

Rješenje 459

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

$$\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c)-\log(c\cdot a)=(\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c))-\log(c\cdot a)=\log\frac{a\cdot b}{b\cdot c}-\log(c\cdot a)=$$

$$=\log\frac{a\cdot b}{b\cdot c}-\log(c\cdot a)=\log\frac{a}{c}-\log(c\cdot a)=\log\frac{\frac{a}{c}}{c\cdot a}=\log\frac{\frac{a}{c}}{\frac{c\cdot a}{1}}=\log\frac{\frac{a}{c}}{\frac{c\cdot a}{1}}=\log\frac{\frac{1}{c}}{\frac{c}{1}}=$$

$$=\log\frac{1}{c^2}=\log c^{-2}=-2\cdot\log c.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c)-\log(c\cdot a)=\log(a\cdot b)-(\log(b\cdot c)+\log(c\cdot a))=$$

$$=\log(a\cdot b)-\log(b\cdot c\cdot c\cdot a)=\log(a\cdot b)-\log\left(b\cdot c^2\cdot a\right)=\log\frac{a\cdot b}{b\cdot c^2\cdot a}=\log\frac{a\cdot b}{b\cdot c^2\cdot a}=$$

$$=\log\frac{1}{c^2}=\log c^{-2}=-2\cdot\log c.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 459

$$\log(a\cdot b)-\log(c\cdot a)-\log(b\cdot c)=$$

A. $\log(a\cdot b\cdot c)$ B. $-2\cdot\log a$ C. $-2\cdot\log b$ D. $-2\cdot\log c$

Rezultat: D.

Zadatak 460 (2B, TUPŠ)

Riješi jednadžbu $\log_2|x-2|=3.$

Rješenje 460

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \quad \rightarrow \qquad a=b^c$$

$$\log_b b^n=n \quad , \quad \log_b f(x)=\log_b g(x) \;\Rightarrow\; f(x)=g(x).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| = a \ , \ a \geq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right\}.$$

1.inačica

$$\log_2 |x-2| = 3 \Rightarrow |x-2| = 2^3 \Rightarrow |x-2| = 8 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=8 \\ x-2=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8+2 \\ x = -8+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = -6 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

$$\log_2 |x-2| = 3 \Rightarrow \log_2 |x-2| = \log_2 2^3 \Rightarrow |x-2| = 2^3 \Rightarrow |x-2| = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=8 \\ x-2=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8+2 \\ x = -8+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = -6 \end{array}\right\}.$$

Vježba 460

Riješi jednadžbu $\log_5 |2 \cdot x - 3| = 3$.

Rezultat: $x_1 = 64$, $x_2 = -61$.