

Zadatak 481 (Rex, gimnazija)

Pokažite da uz uvjet $13 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2$ vrijedi $\log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b)$.

Rješenje 481

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a. Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Preoblikujemo zadani uvjet.

$$\begin{aligned} 13 \cdot a \cdot b &= 4 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2 \Rightarrow 4 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2 = 13 \cdot a \cdot b \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a \cdot b - 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 &= 13 \cdot a \cdot b \Rightarrow 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 = 13 \cdot a \cdot b + 12 \cdot a \cdot b \Rightarrow \\ \Rightarrow (2 \cdot a)^2 + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b + (3 \cdot b)^2 &= 25 \cdot a \cdot b \Rightarrow (2 \cdot a + 3 \cdot b)^2 = 25 \cdot a \cdot b \Rightarrow \\ \Rightarrow (2 \cdot a + 3 \cdot b)^2 = 25 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{25} &\Rightarrow \frac{(2 \cdot a + 3 \cdot b)^2}{25} = a \cdot b \Rightarrow \frac{(2 \cdot a + 3 \cdot b)^2}{5^2} = a \cdot b \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5}\right)^2 = a \cdot b &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednakost} \end{array}\right] \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5}\right)^2 = a \cdot b / \log \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \left(\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5}\right)^2 = \log(a \cdot b) &\Rightarrow 2 \cdot \log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \log a + \log b \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \log a + \log b \cdot \frac{1}{2} &\Rightarrow \log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b). \end{aligned}$$

Vježba 481

Pokažite da uz uvjet $4 \cdot a^2 - 13 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 = 0$ vrijedi $\log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b)$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 482 (Tin, gimnazija)

Odredite nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y za koje vrijedi $\log(x+y) = \log x + \log y$.

Rješenje 482

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a. Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\begin{aligned} \log(x + y) = \log x + \log y &\Rightarrow \log(x + y) = \log(x \cdot y) \Rightarrow x + y = x \cdot y \Rightarrow \\ \Rightarrow x \cdot y = x + y &\Rightarrow x \cdot y - y = x \Rightarrow y \cdot (x - 1) = x \Rightarrow y \cdot (x - 1) = x \cdot \frac{1}{x - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{x}{x - 1}. \end{aligned}$$

Rješenja su uređeni parovi:

$$(x, y) = \left(x, \frac{x}{x - 1} \right), \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

Na primjer,

$$(2, 2), \quad \left(3, \frac{3}{2} \right), \quad \left(5, \frac{5}{4} \right) \text{ itd.}$$

Vježba 482

Odredite nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y za koje vrijedi $\log(x + y) - \log x - \log y = 0$.

Rezultat: $(x, y) = \left(x, \frac{x}{x - 1} \right), \quad x > 0, \quad x \neq 1.$

Zadatak 483 (Maja, gimnazija)

Dokažite da za $x > 0$ vrijedi nejednakost $x^2 + 4^x + 1 - x \cdot 2^{x+1} > 0$.

Rješenje 483

Ponovimo!

$$\begin{aligned} (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2. \\ a^2 \geq 0 \quad , \quad a \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4^x + 1 - x \cdot 2^{x+1} &= x^2 + (2^2)^x + 1 - x \cdot 2^x \cdot 2^1 = x^2 + (2^x)^2 + 1 - x \cdot 2^x \cdot 2 = \\ &= x^2 + (2^x)^2 + 1 - 2 \cdot x \cdot 2^x = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot x + x^2 + 1 = \\ &= \left((2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot x + x^2 \right) + 1 = (2^x - x)^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Vježba 483

Dokažite da za $x > 0$ vrijedi nejednakost $x^2 + 4x + 1 > x \cdot 2^{x+1}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 484 (Asterix, gimnazija)

Broj stanovnika u nekome gradu svake se godine povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 1635000 na 2010000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rješenje 484

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\% = \frac{9}{100}$, $81\% = \frac{81}{100}$, $4.5\% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\% = \frac{0.3}{100}$, $p\% = \frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x...?"

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x povećava za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Neka je p postotak za koji se svake godine povećava broj stanovnika u gradu. Na početku broj stanovnika bio je 1635000.

Na kraju **prve** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_1 = 1635000 + \frac{p}{100} \cdot 1635000 \Rightarrow S_1 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Na kraju **druge** godine je broj stanovnika iznosio:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + \frac{p}{100} \cdot S_1 \Rightarrow S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_2 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_2 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Na kraju **treće** godine je broj stanovnika iznosio:

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2 + \frac{p}{100} \cdot S_2 \Rightarrow S_3 = S_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_3 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_3 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3. \end{aligned}$$

Na kraju **četvrte** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_4 = S_3 + \frac{p}{100} \cdot S_3 \Rightarrow S_4 = S_3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_4 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4.$$

Vidi se da je na kraju n – te godine broj stanovnika iznosio:

$$S_n = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dakle, na kraju **šeste** godine je broj stanovnika bio:

$$S_6 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se eksponencijalna jednadžba:

$$\left. \begin{array}{l} S_6 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 \\ S_6 = 2010000 \end{array} \right\} \Rightarrow 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2010000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2010000 \quad / \cdot \frac{1}{1635000} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{2010000}{1635000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{2010000}{1635000} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109} \quad / \sqrt[6]{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1 \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1 \quad / \cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 100 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1\right) \Rightarrow \left[\text{Idemoooooooooooooooooooo,} \right] \Rightarrow p = 3.50.$$

Vježba 484

Broj stanovnika u nekome gradu svake se godine povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 3270000 na 4020000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rezultat: 3.50 %.

Zadatak 485 (Lara, gimnazija)

Ako je $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ dokazati da je $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Rješenje 485

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a. Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\rightarrow$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a.$$

Neka je

$$\log_a b = x.$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmujemo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow a^x = b / \log_c a \Rightarrow \log_c a^x = \log_c b \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b / \frac{1}{\log_c a} \Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \end{aligned}$$

Vježba 485

Ako je $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ dokazati da je $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 486 (Lara, gimnazija)

Ako je $a > 0$ i $b > 0$ dokazati da je $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Rješenje 486

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b b = 1.$$

Polazimo od poznatog identiteta.

$$\begin{aligned} a^{\log_a b} = b &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmujemo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow a^{\log_a b} = b / \log_b a \Rightarrow \log_b a^{\log_a b} = \log_b b \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 / \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \end{aligned}$$

Vježba 486

Ako je $a > 0$ i $b > 0$ dokazati da je $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 487 (Milica, tehnička škola)

Umnožak rješenja jednadžbe $\sqrt{x}^{\log \sqrt{x}} = 10$ je:

- A. 1 B. 10 C. 100

Rješenje 487

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggssov ili

obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a, \quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log a, \quad \log 100 = 2, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 / 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} \right)^2 = 10^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmujemo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 / \log \Rightarrow \log \left(x^{\log \sqrt{x}} \right) = \log 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{x} \cdot \log x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log x \cdot \log x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log^2 x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log^2 x = 2 / 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log^2 x = 4 \Rightarrow \log^2 x = 4 / \sqrt{\quad} \Rightarrow \log x = \pm \sqrt{4} \Rightarrow \log x = \pm 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log x = 2 \\ \log x = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 10^2 \\ x_2 = 10^{-2} \end{array} \right\}.$$

Umnožak rješenja jednadžbe je:

$$x_1 \cdot x_2 = 10^2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 10^0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 487

Zbroj rješenja jednadžbe $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ je:

A. 10.01 B. 10.001 C. 100.01

Rezultat: C.

Zadatak 488 (Branimir, srednja škola)

Izračunajte $\left(\log_4 \frac{1}{16} \right)^3$.

Rješenje 488

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b b = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{f(x)} = a^{g(x)}.$$

1. inačica

$$\left(\log_4 \frac{1}{16} \right)^3 = \left(\log_4 \frac{1}{4^2} \right)^3 = \left(\log_4 4^{-2} \right)^3 = \left(-2 \cdot \log_4 4 \right)^3 = (-2 \cdot 1)^3 = (-2)^3 = -8.$$

2. inačica

Najprije izračunamo

$$\log_4 \frac{1}{16}.$$

Neka je

$$\log_4 \frac{1}{16} = x \Rightarrow 4^x = \frac{1}{16} \Rightarrow 4^x = \frac{1}{4^2} \Rightarrow 4^x = 4^{-2} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \log_4 \frac{1}{16} = -2.$$

Tada je

$$\left(\log_4 \frac{1}{16} \right)^3 = (-2)^3 = -8.$$

Vježba 488

Izračunajte $\left(\log_4 \frac{1}{16} \right)^2$.

Rezultat: 4.

Zadatak 489 (Ivan, srednja škola)

Ako je $\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b - \log 2)$, gdje su a i b katete pravokutnog trokuta, nađite njegove kutove.

Rješenje 489

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a. Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a + \log b = \log(a \cdot b) \quad , \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$\log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \quad , \quad \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad , \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad , \quad \sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad , \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Zbroj svih kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Kotangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine katete nasuprot tog kuta.

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x = a$, $|a| \leq 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x = a$, $|a| \leq 1$, je $\{x_0 + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

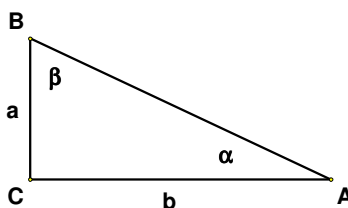
gdje je $x_0 \in \mathbb{R}$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$\sin x = \sin x_0 \Rightarrow x = x_0.$$

$$\begin{aligned} \log \frac{a-b}{2} &= \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b - \log 2) \Rightarrow \log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\log(a \cdot b) - \log 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \frac{a-b}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{a \cdot b}{2} \quad / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot \log \frac{a-b}{2} = \log \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 &= \log \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{2^2} = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} &= \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} = \frac{a \cdot b}{2} \quad / \cdot 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + b^2 = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= 4 \cdot a \cdot b \quad / \cdot \frac{1}{a \cdot b} \Rightarrow \frac{a^2}{a \cdot b} + \frac{b^2}{a \cdot b} = \frac{4 \cdot a \cdot b}{a \cdot b} \Rightarrow \frac{a^2}{a \cdot b} + \frac{b^2}{a \cdot b} = \frac{4 \cdot a \cdot b}{a \cdot b} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= 4. \end{aligned}$$

Uočimo da je u pravokutnom trokutu ABC

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



Tada je

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4 &\Rightarrow \left[\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \right] \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} &= 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = 4 \Rightarrow \left[\text{proširimo} \right. \\ &\left. \text{razlomak sa 2} \right] \Rightarrow \frac{2}{2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = 4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2}{\sin(2 \cdot \alpha)} = 4 &\Rightarrow \frac{2}{\sin(2 \cdot \alpha)} = 4 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \Rightarrow 2 = 4 \sin(2 \cdot \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \sin(2 \cdot \alpha) = 2 &\Rightarrow 4 \sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(2 \cdot \alpha) = \frac{2}{4} \Rightarrow \sin(2 \cdot \alpha) = \frac{2}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(2 \cdot \alpha) = \frac{1}{2} &\Rightarrow 2 \cdot \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot \alpha = 30^\circ \Rightarrow 2 \cdot \alpha = 30^\circ \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 15^\circ. \end{aligned}$$

Budući da je trokut pravokutan, vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow [\alpha = 15^\circ] \Rightarrow 15^\circ + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - 15^\circ \Rightarrow \beta = 75^\circ.$$

Vježba 489

Ako je $2 \cdot \log \frac{a-b}{2} = \log a + \log b - \log 2$, gdje su a i b katete pravokutnog trokuta, nađite njegove kutove.

Rezultat: $15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.

Zadatak 490 (Marko, srednja škola)

Riješite jednadžbu $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Rješenje 490

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a. Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log a \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad (\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad a^\circ = 1 \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Rasprava!

$$\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0.$$

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \cdot \log \Rightarrow \log x^{\sqrt{x}} = \log (\sqrt{x})^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot \log x = x \cdot \log \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \log x = x \cdot \frac{1}{2} \cdot \log x \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \log x = \frac{x}{2} \cdot \log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot \log x - \frac{x}{2} \cdot \log x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \log x - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} \cdot \log x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \log x \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = 0 \\ \Rightarrow \log x = 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \end{array} \right\}$$

Prva jednađba

$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ nije rješenje (rasprava!)}$$

Druga jednađba

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 10^0 \Rightarrow x = 1 \text{ rješenje}$$

Treća jednađba

$$1 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{x}}{2} = -1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{x}}{2} = -1 \cdot (-2) \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 / 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 2^2 \Rightarrow x = 4. \text{ rješenje}$$

Vježba 490

Riješite jednađbu $x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x = 0$.

Rezultat: 1, 4.