Zadatak 001 (Ines, hotelijerska škola)

Ako je tg x = 4, izračunaj

$$\frac{2\sin^2 x+4\cos^2 x-1}{5\sin^2 x-\cos^2 x+2}.$$

Rješenje 001

Koristimo osnovnu trigonometrijsku relaciju: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Znači svaki broj n možemo zapisati

$$n = n \cdot 1 = n \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x).$$

$$\frac{2\sin^2 x+4\cos^2 x-1}{5\sin^2 x-\cos^2 x+2}=\frac{2\sin^2 x+4\cos^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{5\sin^2 x-\cos^2 x+2\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}=\frac{2\sin^2 x+4\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{5\sin^2 x-\cos^2 x+2\sin^2 x+2\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{7\sin^2 x+\cos^2 x}.$$

Zadano je tg x = 4. Tangens se može zapisati

$$tg\, x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kvadriramo:

$$tg^2\, x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Zato ćemo u izrazu brojnik i nazivnik podijeliti s $\cos^2 x$:

$$\frac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{7\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{7\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{tg^2\, x+3}{7tg^2\, x+1}=\left[\text{uvrstimo tg } x=4\right]=\frac{4^2+3}{7\cdot 4^2+1}=\frac{19}{113}.$$

Vježba 001

Ako je tg x = 4, izračunaj

$$\frac{1+\sin^2 x}{3+2\sin^2 x}.$$

Rezultat: $\frac{33}{83}.$

Zadatak 002 (Nina, hotelijerska škola)

Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je zadana jedna od njih i njezina vrijednost iznosi:

$$\cos\alpha=\frac{20}{29},\quad \alpha\in\left\langle\frac{7\pi}{2},4\pi\right\rangle.$$

Rješenje 002

Najprije odredimo u kojem je kvadrantu kut α:

$$E\left(\frac{7\pi}{2}\right)=E\left(\frac{3\pi+4\pi}{2}\right)=E\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}\right)=E\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)=E\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$E(4\pi) = E(2\pi + 2\pi) = E(2\pi).$$

Zato pišemo:

$$\cos\alpha=\frac{20}{29},\quad \alpha\in\left\langle\frac{3\pi}{2},2\pi\right\rangle \Leftrightarrow \text{IV.kvadrant}.$$

Iz osnovne trigonometrijske relacije nađemo vrijednost funkcije sinus:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\sin^2\alpha+\left(\frac{20}{29}\right)^2=1 \Rightarrow \sin^2\alpha+\frac{400}{841}=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{400}{841} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{1}-\frac{400}{841} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{841-400}{841} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{441}{841} \Rightarrow [\text{vadimo korijen}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{441}{841}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{441}{841}}=\pm\frac{21}{29}.$$

Ponovimo predznake trigonometrijskih funkcija u sva četiri kvadranta!

	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
ctg	+	—	+	—

Budući da je sinus negativan u četvrtom kvadrantu, vrijedi:

$$\sin\alpha=-\frac{21}{29}.$$

Za tangens je:

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}}=-\frac{21}{20}.$$

Za kotangens je:

$$ctg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{20}{29}}{-\frac{21}{29}}=-\frac{20}{21}\quad ili\quad ctg\,\alpha=\frac{1}{tg\,\alpha}=\frac{1}{-\frac{21}{20}}=-\frac{20}{21}.$$

Vježba 002

Nađi vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je zadana jedna od njih i njezina vrijednost iznosi:

$$\sin\alpha=\frac{5}{13},\quad \alpha\in\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle.$$

Rezultat: $\cos\alpha=-\frac{12}{13},\ tg\,\alpha=-\frac{5}{12},\ ctg\,\alpha=-\frac{12}{5}.$

Zadatak 003 (Slavica, gimnazija)

Odredi tg (x + y) ako je je tg x = $\frac{m}{m+1}$, tg y = $\frac{1}{2m+1}$.

Rješenje 003

Vrijednost izraza tg (x + y) naći ćemo pomoću adicijske formule za tangens zbroja:

$$\text{tg}\,(x + y) = \frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x \cdot tg\ y},$$

tako da uvrstimo zadane podatke za tg x i tg y:

$$\text{tg}\,(x + y) = \frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x \cdot tg\ y} = \frac{\frac{m}{m+1} + \frac{1}{2m+1}}{1 - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{2m+1}} =$$

$= [$u brojniku dvojnog razlomka zbrojimo razlomke $\frac{m}{m+1}$ i $\frac{1}{2m+1}$, a u nazivniku ih pomnožimo$] =$

$$= \frac{\frac{m}{m+1} + \frac{1}{2m+1}}{1 - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{2m+1}} = \frac{\frac{m \cdot (2m+1) + m + 1}{(m+1) \cdot (2m+1)}}{1 - \frac{m}{(m+1) \cdot (2m+1)}} = \frac{\frac{2m^2 + m + m + 1}{(m+1) \cdot (2m+1)}}{\frac{(m+1) \cdot (2m+1) - m}{(m+1) \cdot (2m+1)}} =$$

$$= \frac{\frac{2m^2 + m + m + 1}{(m+1) \cdot (2m+1)}}{\frac{2m^2 + m + 2m + 1 - m}{(m+1) \cdot (2m+1)}} = \left[\text{kratimo dvojni razlomak s } (m+1) \cdot (2m+1)\right] =$$

$$= \frac{2m^2 + m + m + 1}{2m^2 + m + 2m + 1 - m} = \frac{2m^2 + 2m + 1}{2m^2 + 2m + 1} = 1.$$

Vježba 003

Odredi tg (x + y) ako je je tg x = 1, tg y = 2.

Rezultat: – 3.

Zadatak 004 (Slavica, gimnazija)

Provjeri

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Rješenje 004

Uporabit ćemo adicijsku formulu za kosinus (formulu za kosinus razlike):

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

Sada je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x = \left[\text{podsjetimo se da je } \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1\right] =$$

$$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = 0 + \sin x = \sin x.$$

Vježba 004

Provjeri

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$$

Rezultat: Točno je.

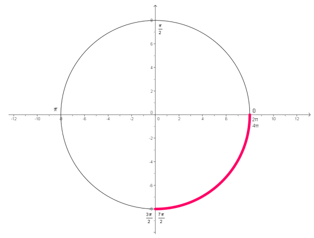
Zadatak 005 (Mira, gimnazija)

Izračunaj vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t ako je cos t jednak

$$\cos t = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \;,\; t \in \left\langle \frac{7\pi}{2}, 4\pi \right\rangle \;,\; 0 < y < x.$$

Rješenje 005

Najprije odredimo kvadrant. Sa slike je vidljivo da je to IV. kvadrant. U IV. kvadrantu je sinus negativan, kosinus pozitivan, tangens negativan i kotangens negativan..



Uporabit ćemo osnovnu trigonometrijsku relaciju koja povezuje sinus i kosinus:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t.$$

"Vadimo" drugi korijen da bismo dobili sinus:

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t \;/\; \sqrt{} \quad \Rightarrow \quad \sin t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

U IV. kvadrantu sinus je negativan pa vrijedi:

$$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2} = \left[\text{koristimo pravilo } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\right] =$$

$$= -\sqrt{1-\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1}-\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}} = -\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}} =$$

$$= \left[\text{koristimo formule za kvadrat zbroja i razlike: } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \text{ i } (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2\right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-\left(x^4-2x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}} = -\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^4+2x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}} = -\sqrt{\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}} =$$

$$= \left[\textit{koristimo pravilo za korijene } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right] = -\frac{\sqrt{4x^2y^2}}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2}} = -\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Tangens se dobije iz relacije:

$$tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{2xy}{x^2+y^2}}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} = \left[\text{kratimo dvojni razlomak}\right] = -\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Sada je kotangens jednak:

$$ctg\, t = \frac{1}{tg\, t} = -\frac{x^2-y^2}{2xy}.$$

Vježba 005

Izračunaj vrijednost ostalih trigonometrijskih funkcija broja t ako je cos t jednak

$$\cos t = \frac{8}{17} \quad , \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Rezultat: $\sin t = \frac{15}{17}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{8}{15}.$

Zadatak 006 (Nina, gimnazija)

Ako je tg t = 3, izračunaj

$$\frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{(\sin t - \cos t)^3}.$$

Rješenje 006

1.inačica

U brojniku prepoznajemo razliku kubova:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$\frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{(\sin t - \cos t)^3} = \frac{(\sin t - \cos t) \cdot \left(\sin^2 t + \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t\right)}{(\sin t - \cos t)^3} = \frac{(\sin t - \cos t) \cdot \left(\sin^2 t + \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t\right)}{(\sin t - \cos t) \cdot (\sin t - \cos t)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2 t + \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t}{(\sin t - \cos t)^2} = \frac{\sin^2 t + \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t}{\sin^2 t - 2 \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t} = \left[\text{brojnik i nazivnik dijelimo s } \cos^2 t \text{ da dobijemo tangens}\right] =$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin t \cdot \cos t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{2 \sin t \cdot \cos t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{tg^2 t + tg\, t + 1}{tg^2 t - 2 tg\, t + 1} = \frac{3^2 + 3 + 1}{3^2 - 2 \cdot 3 + 1} = \frac{9 + 3 + 1}{9 - 6 + 1} = \frac{13}{4}.$$

2.inačica

U nazivniku prepoznajemo kub razlike:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{(\sin t - \cos t)^3} = \frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{\sin^3 t - 3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t + 3 \cdot \sin t \cdot \cos^2 t - \cos^3 t} =$$

$$= \left[\text{brojnik i nazivnik dijelimo s } \cos^3 t \text{ da dobijemo tangens}\right] =$$

$$= \frac{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t} - \frac{\cos^3 t}{\cos^3 t}}{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t} - 3 \cdot \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{\cos^3 t} + 3 \cdot \frac{\sin t \cdot \cos^2 t}{\cos^3 t} - \frac{\cos^3 t}{\cos^3 t}} =$$

$$= \frac{tg^3 t - 1}{tg^3 t - 3 \cdot tg^2 t + 3 \cdot tg\, t - 1} = \frac{3^3 - 1}{3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1} =$$

$$= \frac{27 - 1}{27 - 27 + 9 - 1} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}.$$

Vježba 006

Ako je tg t = 3, izračunaj

$$\frac{\sin^2 t - 4 \cos^2 t}{2 \sin^2 t - \cos^2 t}.$$

Rezultat: $\frac{5}{17}.$

Zadatak 007 (Nina, gimnazija)

Ako je $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, izračunaj $\sin x \cdot \cos x$.

Rješenje 007

Kvadriramo cijelu jednakost:

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad /^2 \quad \Rightarrow \quad (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{4+2\sqrt{3}-4}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad /:2 \quad \Rightarrow \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vježba 007

Ako je $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, izračunaj $\sin x \cdot \cos x$.

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

Zadatak 008 (Marko, gimnazija)

Dokaži da izraz ne ovisi o broju x: $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$.

Rješenje 008

Ako izraz ne ovisi o broju x, onda bi trebao biti jednak nekom realnom broju. Uporabit ćemo formulu za zbroj kubova:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x =$$

$$= [\text{dobili smo kvadrat zbroja: } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2\,] = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 = 1.$$

Vježba 008

Dokaži da izraz ne ovisi o broju x: $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$.

Rezultat: 1.

Zadatak 009 (Mira, gimnazija)

Pojednostavni izraz:

$$a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Rješenje 009

Uporabit ćemo formule za kosinus razlike i sinus zbroja:

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

$$a\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-x)+b\sin(\frac{\pi}{2}+x)=a\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\right)+b\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\right)=$$

$$=\left[\cos\frac{\pi}{2}=0\ ,\ \sin\frac{\pi}{2}=1\right]=a\cdot(0\cdot\cos x+1\cdot\sin x)+b\cdot(1\cdot\cos x+0\cdot\sin x)=a\sin x+b\cos x.$$

Vježba 009

Pojednostavni izraz: $a\cdot\sin(\pi-x)+b\sin(\pi+x)$.

Rezultat: (a – b) · sin x .

Zadatak 010 (Petra, gimnazija)

Pojednostavni izraz: $\sin^2(2\pi-x)+\sin^2(2\pi+x)+2\cos^2 x$.

Rješenje 010

Najprije ćemo izračunati sin(2π – x) i sin(2π + x).

Uporabit ćemo formule za sinus razlike i sinus zbroja:

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y,$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y.$$

Računamo:

$\sin(2\pi-x)=\sin 2\pi\cdot\cos x-\cos 2\pi\cdot\sin x=[\text{ vrijedi }\sin 2\pi=0\ ,\ \cos 2\pi=1]=0\cdot\cos x-1\cdot\sin x=-\sin x,$

$\sin(2\pi+x)=\sin 2\pi\cdot\cos x+\cos 2\pi\cdot\sin x=[\text{ vrijedi }\sin 2\pi=0\ ,\ \cos 2\pi=1]=0\cdot\cos x+1\cdot\sin x=\sin x.$

Zadani izraz možemo ovako napisati:

$$\sin^2(2\pi-x)+\sin^2(2\pi+x)+2\cos^2 x=(-\sin x)^2+(\sin x)^2+2\cos^2 x=\sin^2 x+\sin^2 x+2\cos^2 x=$$

$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\cdot 1=2.$$

Vježba 010

Pojednostavni izraz: sin (2π – x) + sin (2π + x) + 2cos x.

Rezultat: 2cos x .

Zadatak 011 (Mira i Gabi, gimnazija)

Izračunaj

$$\frac{tg\ x}{1-tg^2 x}\cdot\frac{ctg^2 x-1}{ctg\ x}.$$

Rješenje 011

1.inačica

Uporabit ćemo

$$ctg\ x=\frac{1}{tg\ x}.$$

$$\frac{tg\ x}{1-tg^2 x}\cdot\frac{ctg^2 x-1}{ctg\ x}=\frac{tg\ x}{1-tg^2 x}\cdot\frac{\frac{1}{tg^2 x}-1}{\frac{1}{tg\ x}}=\frac{tg\ x}{1-tg^2 x}\cdot\frac{\frac{1-tg^2 x}{tg^2 x}}{\frac{1}{tg\ x}}=\frac{tg\ x}{1-tg^2 x}\cdot\frac{\frac{1-tg^2 x}{tg\ x}}{\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{tg\ x}{1-tg^2 x}\cdot\frac{1-tg^2 x}{tg\ x}=1.$$

2.inačica

Sada tangens i kotangens definiramo pomoću sinusa i kosinusa:

$$tg\ x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad ,\quad ctg\ x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

i to uvrstimo u zadatak:

$$\frac{tg\,x}{1-tg^2x}\cdot\frac{ctg^2x-1}{ctg\,x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-1}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{\sin x}{1}}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x}}\cdot\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{1}}=\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=1$$

Vježba 011

Izračunaj

$$\frac{tg\,x}{1+tg^2\,x}\cdot\frac{ctg^2\,x+1}{ctg\,x}.$$

Rezultat: 1.

Zadatak 012 (Miš, gimnazija)

Dokaži:

$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\cos 2x.$$

Rješenje 012

Tangens definiramo pomoću sinusa i kosinusa:

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kosinus dvostrukog kuta je:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

Sada je

$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1}=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x.$$

Vježba 012

Dokaži:

$$\frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}=\frac{1}{\cos 2x}.$$

Rezultat: Točno.

Zadatak 013 (Jelena, hotelijerska škola)

Dokaži:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x+\sin x\cdot\cos 2x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Rješenje 013

Sinus dvostrukog kuta je:

$$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x.$$

Kosinus dvostrukog kuta je:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

Sada je

$$\frac{\sin 2x}{\sin x+\sin x\cdot\cos 2x}=\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot(1+\cos 2x)}=\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\left(1+\cos^2 x-\sin^2 x\right)}=$$

$$=\left[1=\cos^2 x+\sin^2 x\right]=$$

$$=\frac{2\cdot\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\cdot\cos x}{2\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Vježba 013

Dokaži:

$$\frac{\sin x+\sin x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\cos x.$$

Rezultat: Točno.

Zadatak 014 (Tanja, hotelijerska škola)

Dokaži:

$$\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}=1.$$

Rješenje 014

Uporabit ćemo formulu za razliku kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Kosinus dvostrukog kuta je:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

Pišemo:

$$\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}=\frac{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Vježba 014

Dokaži:

$$\frac{2\cdot\sin^2 x+\cos 2x}{2\cdot\cos^2 x-\cos 2x}=1.$$

Rezultat: Točno.

Zadatak 015 (Jelena, hotelijerska škola)

Pojednostavni:

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x-1}{\sin^4 x+\cos^4 x-1}.$$

Rješenje 015

1.inačica

Ponovimo formule koje ćemo uporabiti u rješavanju zadatka:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2.$$

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x-1}{\sin^4 x+\cos^4 x-1}=\frac{\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3-1}{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1}=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\cdot\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)-1}{1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1}=$$

$$=\frac{1\cdot\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)-1}{1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{3}{2}.$$

2.inačica

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x-1}{\sin^4 x+\cos^4 x-1}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\sin^6 x-\sin^2 x+\cos^6 x-\cos^2 x}{\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^4 x-\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\cdot\left(\sin^4 x-1\right)+\cos^2 x\cdot\left(\cos^4 x-1\right)}{\sin^2 x\cdot\left(\sin^2 x-1\right)+\cos^2 x\cdot\left(\cos^2 x-1\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\cdot\left(\sin^2 x-1\right)\cdot\left(\sin^2 x+1\right)+\cos^2 x\cdot\left(\cos^2 x-1\right)\left(\cos^2 x+1\right)}{-\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\sin^2 x+1\right)-\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\cos^2 x+1\right)}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\sin^2 x+1+\cos^2 x+1\right)}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{-\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(1+1+1)}{-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{3}{2}.$$

Vježba 015

Pojednostavni:

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^2 x+\cos^2 x+1}..$$

Rezultat: $-\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

Zadatak 016 (Miš, gimnazija)

Izračunaj

$$\sin x=\frac{1}{2}.$$

Rješenje 016

Ponovimo kako se rješava trigonometrijska jednadžba

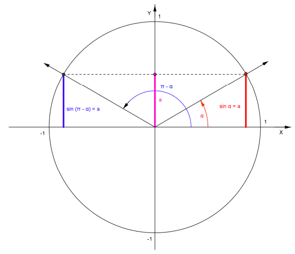
$$\sin x = a,\ |a| \le 1.$$

Rješenja su:

$$x_1 = \alpha + k\cdot 2\pi,$$

$$x_2 = \pi - \alpha + k\cdot 2\pi,\ k \text{ je cijeli broj}.$$

Grafički se to može ovako prikazati:



Zadana jednadžba glasi:

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Iz tablica se očita da je sin 30° = 0.5. Dakle, kut α = 30°. Rješenja su:

$$x_1 = 30° + k \cdot 360°,$$

$$x_2 = 180° - 30° + k \cdot 360° = 150° + k \cdot 360°.$$

Izraženo u radijanima bit će:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi.$$

Vježba 016

Izračunaj:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultat: $x_1 = 60° + k \cdot 360°$, $x_2 = 180° - 60° + k \cdot 360° = 120° + k \cdot 360°$.

Zadatak 017 (Miš, gimnazija)

Izračunaj

$$\sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Rješenje 017

Najprije uvedemo supstituciju:

$$t = 2x$$

pa se zadana jednadžba transformira u

$$\sin t = \frac{1}{2}.$$

Ponovimo kako se rješava trigonometrijska jednadžba

$$\sin x = a, \ | a | \le 1.$$

Rješenja su:

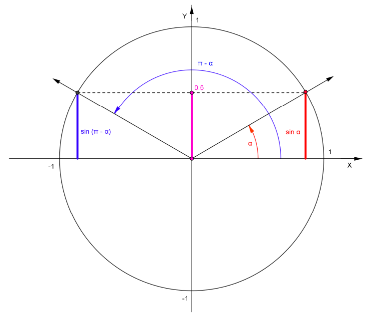
$$x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi,$$

$$x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, \text{ k je cijeli broj}.$$

Budući da je

$$\sin t = \frac{1}{2} = 0.5$$

grafički to možemo prikazati ovako:



Transformirana jednadžba glasi:

$$\sin t = \frac{1}{2}.$$

Iz tablica se očita da je sin 30° = 0.5. Dakle, kut α = 30°. Rješenja transformirane jednadžbe su:

$$t_1 = 30° + k \cdot 360°,$$

$$t_2 = 180° - 30° + k \cdot 360° = 150° + k \cdot 360°.$$

Izraženo u radijanima bit će:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,$$

$$t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi.$$

Konačno se vraćamo na supstituciju t = 2x i nađemo rješenja zadane jednadžbe:

$$2x = 30° + k \cdot 360° \;/:2 \;\;\Rightarrow\;\; x_1 = 15° + k \cdot 180°,$$

$$2x = 150° + k \cdot 360° \;/:2 \;\;\Rightarrow\;\; x_2 = 75° + k \cdot 180°.$$

Izraženo u radijanima bit će:

$$2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;/:2 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi,$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;\Rightarrow\; 2x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;/:2 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi.$$

Vježba 017

Izračunaj

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultat: $x_1 = 30° + k \cdot 180°$, $x_2 = 60° + k \cdot 180°$.

Zadatak 018 (Miš, gimnazija)

Riješi sustav trigonometrijskih jednadžbi:

$$\sin x + \cos y = 0,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}.$$

Rješenje 018

Iz prve jednadžbe izračunamo sin x ili cos y i to uvrstimo u drugu jednadžbu. Na primjer, iz prve jednadžbe je cos y = – sin x. Zamjenom u drugoj jednadžbi dobijemo:

$$\sin^2 x + (-\sin x)^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sin^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2 \cdot \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Cijelu jednadžbu podijelimo brojem 2 i jednadžbu korjenujemo:

$$2 \cdot \sin^2 x = \frac{1}{2} \;/:2 \;\Rightarrow\; \sin^2 x = \frac{1}{4} \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; \sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

Iz prve jednadžbe sin x + cos y = 0 slijedi da je

$$\cos y = \mp\frac{1}{2}.$$

Elementarne trigonometrijske jednadžbe

$$\sin x = \frac{1}{2} \ \text{ i } \ \cos y = -\frac{1}{2},$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \ \text{ i } \ \cos y = \frac{1}{2},$$

riješimo na standardan način.

Skup rješenja zadanog sustava trigonometrijskih jednadžbi možemo ovako zapisati:

$$x_1 = (-1)^k \cdot 30^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad y_1 = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

i

$$x_2 = -\ (-1)^k \cdot 30^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad y_1 = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

Vježba 018

Riješi sustav trigonometrijskih jednadžbi:

$$2\sin x + 2\cos y = 0,$$
$$6\sin^2 x + 6\cos^2 y = 3.$$

Rezultat: $x_1 = (-1)^k \cdot 30^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad y_1 = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ i

$x_2 = -\ (-1)^k \cdot 30^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad y_1 = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ.$

Zadatak 019 (Miš, gimnazija)

Riješi sustav trigonometrijskih jednadžbi:

$$x - y = \frac{2\pi}{3}, \quad \sin x + \sin y = 1.$$

Rješenje 019

Drugu jednadžbu transformiramo koristeći formulu za pretvaranje zbroja u produkt (formule transformacije!):

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}.$$

Zato će biti:

$$2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = 1.$$

Iz prve jednadžbe izračunamo:

$$x - y = \frac{2\pi}{3} \ /:2 \ \Rightarrow \ \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{3}$$

i to uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = 1 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \ \Rightarrow \ \sin\frac{x+y}{2} = 1.$$

Naša jednadžba sada ima oblik:

$$\sin\frac{x+y}{2} = 1.$$

To je elementarna trigonometrijska jednadžba:

$$\sin\frac{x+y}{2} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ \Rightarrow \ \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ /\cdot 2 \ \Rightarrow \ x + y = \pi + k \cdot 4\pi.$$

Sada postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{2\pi}{3} \\ x+y=k\cdot 4\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=(12k+5)\cdot\dfrac{\pi}{6} \\ y=(12k+1)\cdot\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\}.$$

Vježba 019

Riješi sustav trigonometrijskih jednadžbi:

$$x-y=\frac{\pi}{3}, \quad \cos x + \cos y = 0.$$

Rezultat: $\left.\begin{array}{l} x=(3k+2)\cdot\dfrac{\pi}{3} \\ y=(3k+1)\cdot\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\}.$

Zadatak 020 (Miš, gimnazija)

Riješi sustav trigonometrijskih jednadžbi:

$$\sin x+\sin y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x+\cos y=\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

ako su

$$0° < x,\ y < 180°.$$

Rješenje 020

Obje jednadžbe transformiramo koristeći formule za pretvaranje zbroja u produkt (formule transformacije!):

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}, \quad \cos x+\cos y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

Tada je:

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Prvu jednadžbu podijelimo drugom:

$$\frac{2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}}{2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}=1 \Rightarrow tg\frac{x+y}{2}=1 \Rightarrow \frac{x+y}{2}=45^0.$$

Vrijednost

$$\frac{x+y}{2}=45^0$$

uvrstimo u bilo koju gornju jednadžbu pa dobijemo:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Važno je zapamtiti da se ova jednadžba može i ovako zapisati:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$= \cos 60° \cdot \cos 45° + \sin 60° \cdot \sin 45° = \cos (60° - 45°) = \cos 15°.$$

Prema tome možemo pisati

$$\frac{x-y}{2}=15^0 \Rightarrow x-y=30^0.$$

Konačno iz sustava jednadžbi

$$\frac{x+y}{2}=45^0,$$

$$x-y=30^0,$$

slijedi

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{2}=45^0 \;\; /\cdot 2\\ x-y=30^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=90^0\\ x-y=30^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=60^0\\ y=30^0\end{array}\right\}.$$

Vježba 020

Riješi sustav trigonometrijskih jednadžbi:

$$\sin x-\sin y=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\cos x+\cos y=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

ako su

$$0° < x, y < 180°.$$

Rezultat: $x = 120°$, $y = 30°$.