Zadatak 041 (Marija, gimnazija)

Koliki je ukupan broj rješenja jednadžbe $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$?

Rješenje 041

Ponovimo: $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + (2 \cdot \sin x \cdot \cos x)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x + 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 4 \cdot \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ \sin^2 x = t \end{bmatrix} \Rightarrow t + 4 \cdot t \cdot (1 - t) = 1 \Rightarrow t + 4t - 4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4t^2 + 5t - 1 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4,\ b = -5,\ c = 1 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1 \quad , \quad \Rightarrow t_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}.$$

Zbog supstitucije $\sin^2 x = t$ dobije se:

$$\left.\begin{matrix} \sin^2 x = t \\ t = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sin^2 x = 1 \; / \sqrt{\ } \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x = -1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \sin^2 x = t \\ t = \dfrac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{\pi}{6},\ x_4 = \dfrac{5\pi}{6}, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_5 = \dfrac{7\pi}{2},\ x_6 = \dfrac{11\pi}{6}. \end{cases}$$

Ukupno ima šest rješenja.

Vježba 041

Koliki je ukupan broj rješenja jednadžbe $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$?

Rezultat: Ukupno ima tri rješenja.

Zadatak 042 (Petra, gimnazija)

Koliki je ukupan broj rješenja jednadžbe $2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$ na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$?

Rješenje 042

Uočimo da je $\cos x \neq 0$ jer bi inače bio i $\sin x = 0$, a to je nemoguće (funkcije cos x i sin x nemaju zajedničkih nultočaka). Dakle, jednadžbu možemo podijeliti s $\cos^2 x$ pa dobivamo jednadžbu kvadratnog tipa:

$$2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0 \; /{:}\cos^2 x \Rightarrow 2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - tg\, x + tg^2 x = 0 \Rightarrow tg^2 x - tg\, x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ tg^2 x = t \end{bmatrix} \Rightarrow t^2 - t + 2 = 0.$$

Budući da je diskriminanta ove jednadžbe negativna, nema realnih rješenja:

$$\left.\begin{matrix} t^2 - t + 2 = 0 \\ a = 1,\ b = -1,\ c = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{rješenja su konjugirano} \\ \text{kompleksni brojevi.} \end{cases}$$

Broj rješenja je nula.

Vježba 042

Koliki je ukupan broj rješenja jednadžbe $2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$ na intervalu $\langle 0, 50 \rangle$?

Rezultat: Broj rješenja je nula.

Zadatak 043 (Ivan, gimnazija)

Ako kutovi četverokuta čine aritmetički niz sa razlikom 30º, koliki je zbroj kosinusa tih kutova?

Rješenje 043

Zbroj kutova u četverokutu je 360º:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

Budući da kutovi čine aritmetički niz sa razlikom 30º, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \\ \beta = \alpha + 30^0 \\ \gamma = \beta + 30^0 = \alpha + 60^0 \\ \delta = \gamma + 30^0 = \alpha + 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 30^0 + \alpha + 60^0 + \alpha + 90^0 = 360^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \alpha + 180^0 = 360^0 \Rightarrow 4 \cdot \alpha = 180^0 \ /:4 \Rightarrow \alpha = 45^0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 45^0 + 30^0 = 75^0, \\ \gamma = 45^0 + 60^0 = 105^0, \\ \delta = 45^0 + 90^0 = 135^0. \end{array}\right.$$

Zbroj kosinusa kutova iznosi:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = \cos 45^0 + \cos 75^0 + \cos 105^0 + \cos 135^0 = \left[\cos\left(180^0 - x\right) = -\cos x\right] =$$

$$= \cos 45^0 + \cos 75^0 + \cos\left(180^0 - 75^0\right) + \cos\left(180^0 - 45^0\right) = \cos 45^0 + \cos 75^0 - \cos 75^0 - \cos 45^0 = 0.$$

Vježba 043

Ako kutovi četverokuta čine aritmetički niz sa razlikom 30º, koliki je zbroj tangensa tih kutova?

Rezultat: 0.

Zadatak 044 (Sanja, ekonomska škola)

Zadani izraz transformiraj na što je moguće jednostavniji oblik: $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

Rješenje 044

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)} = \left[1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right] = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha \cdot (\sin\alpha + 1)}{\cos\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha.$$

Vježba 044

Zadani izraz transformiraj na što je moguće jednostavniji oblik: $\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Rezultat: ctg α.

Zadatak 044 (Sanja, ekonomska škola)

Izračunaj bez uporabe džepnog računala: $\frac{\sin 10^0 \cdot \sin 30^0 \cdot \sin 50^0 \cdot \sin 70^0}{\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 80^0}$.

Rješenje 044

$$\frac{\sin 10^0 \cdot \sin 30^0 \cdot \sin 50^0 \cdot \sin 70^0}{\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 80^0} = \left[\sin\alpha = \cos\left(90^0 - \alpha\right)\right] = \left[\begin{array}{ll} \sin 10^0 = \cos 80^0, & \sin 30^0 = \cos 60^0 \\ \sin 50^0 = \cos 40^0, & \sin 70^0 = \cos 20^0 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\cos 80^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 20^0}{\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 80^0} = 1.$$

Vježba 044

Izračunaj bez uporabe džepnog računala: $\frac{\sin 10^0 \cdot \sin 20^0 \cdot \sin 30^0 \cdot \sin 40^0}{\cos 50^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 70^0 \cdot \cos 80^0}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 045 (Radoznala, gimnazija)

Ako je $tg\frac{x}{2}=4$, koliko je $\frac{6\cdot\sin x-7\cdot\cos x+1}{8\cdot\sin x+9\cdot\cos x-1}$?

Rješenje 045

Uporabit ćemo **univerzalnu supstituciju:**

$$tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2\cdot t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Njezinom primjenom dobije se:

$$\frac{6\cdot\sin x-7\cdot\cos x+1}{8\cdot\sin x+9\cdot\cos x-1}=\left[\begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t=4\ ,\ \sin x=\frac{2\cdot t}{1+t^2}=\frac{8}{1+16}=\frac{8}{17} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-16}{1+16}=-\frac{15}{17}\end{array}\right]=\frac{6\cdot\frac{8}{17}-7\cdot\frac{-15}{17}+1}{8\cdot\frac{8}{17}+9\cdot\frac{-15}{17}-1}=\frac{\frac{48}{17}+\frac{105}{17}+1}{\frac{64}{17}-\frac{135}{17}-1}=$$

$$=\frac{\frac{48+105+17}{17}}{\frac{64-135-17}{17}}=\frac{\frac{170}{17}}{-\frac{88}{17}}=-\frac{170}{88}=-\frac{85}{44}.$$

Vježba 045

Ako je $tg\frac{x}{2}=4$, koliko je $\frac{6\cdot\sin x-7\cdot\cos x+1}{8\cdot\sin x-9\cdot\cos x-1}$?

Rezultat: $\frac{85}{91}$.

Zadatak 046 (Tihomir, gimnazija)

Dokaži identitet: $\frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=8\cdot\cos 2\alpha.$

Rješenje 046

Na lijevoj je strani razlika kvadrata $\left[a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\right]$:

$$\frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-\left(\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha-\cos 3\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 3\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{\sin(3\alpha+\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cdot 2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{2\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\ /\cdot 4}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\ /\cdot 4}=\frac{8\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{8\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{(2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}=\frac{8\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}=8\cdot\cos 2\alpha.$$

Vježba 046

Dokaži identitet: $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha.$

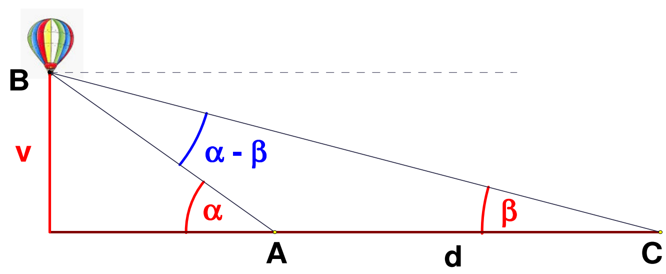
Rezultat: Točno je.

Zadatak 047 (Kiki, gimnazija)

Iz balona putnik vidi mjesta A i C pod kutovima depresije α = 58º i β = 37º. Može li putnik izračunati visinu na kojoj se nalazi balon, ako je na zemljopisnoj karti našao da su mjesta A i C udaljena 2 km?

Rješenje 047

Sa slike vidi se:



$$\left.\begin{array}{l}\angle CAB=180^{0}-\alpha\\ \angle BCA=\beta\\ |AC|=d\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{sinusov}\\ \text{poučak}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC|:d=\sin\left(180^{0}-\alpha\right):\sin(\alpha-\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC|=\frac{d\cdot\sin\left(180^{0}-\alpha\right)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Visina balona iznosi:

$$\sin\beta=\frac{v}{|BC|}\Rightarrow v=|BC|\cdot\sin\beta=\frac{d\cdot\sin\left(180^{0}-\alpha\right)}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\sin\beta=\left[\sin\left(180^{0}-\alpha\right)=\sin\alpha\right]=$$

$$=\frac{d\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\ km\cdot\sin 58^{0}\cdot\sin 37^{0}}{\sin 21^{0}}=2.85\ km.$$

Vježba 047

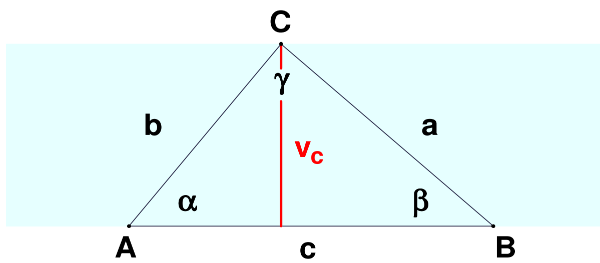
Iz balona putnik vidi mjesta A i C pod kutovima depresije α = 58º i β = 37º. Može li putnik izračunati visinu na kojoj se nalazi balon, ako je na zemljopisnoj karti našao da su mjesta A i C udaljena 4 km?

Rezultat: 5.7 km.

Zadatak 048 (Kiki, gimnazija)

Na jednoj obali rijeke nalaze se točke A i B međusobno udaljene 40 metara iz kojih se točka C na drugoj obali vidi pod kutovima $\alpha=\angle BAC=55^{0}\,20'$ i $\beta=\angle CBA=71^{0}\,43'$. Kolika je širina rijeke?

Rješenje 048



Odredimo kut γ:

$$\gamma=180^{0}-(\alpha+\beta)=180^{0}-\left(55^{0}\,20'+71^{0}\,43'\right)=$$

$$=180^{0}-126^{0}\,63'=180^{0}-127^{0}\,3'=$$

$$=179^{0}\,60'-127^{0}\,3'=52^{0}\,57'.$$

Pomoću sinusovog poučka nađemo b:

$$b:c=\sin\beta:\sin\gamma\Rightarrow b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Širina rijeke je visina v_c trokuta ABC pa je:

$$\sin\alpha=\frac{v_c}{b}\Rightarrow v_c=b\cdot\sin\alpha=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\sin\alpha=\frac{c\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{40\ m\cdot\sin 71^{0}\,43'\cdot\sin 55^{0}\,20'}{\sin 52^{0}\,57'}=39.14\ m.$$

Vježba 048

Na jednoj obali rijeke nalaze se točke A i B međusobno udaljene 80 metara iz kojih se točka C na drugoj obali vidi pod kutovima $\alpha=\angle BAC=55^{0}\,20'$ i $\beta=\angle CBA=71^{0}\,43'$. Kolika je širina rijeke?

Rezultat: 78.28 m.

Zadatak 049 (Ana, hotelijerska škola)

Nađite skup rješenja jednadžbe $\cos x \cdot \sin 3x = \sin x \cdot \cos 3x.$

Rješenje 049

$$\cos x \cdot \sin 3x = \sin x \cdot \cos 3x \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos x \ne 0 \\ \cos 3x \ne 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cos x \cdot \sin 3x = \sin x \cdot \cos 3x \; / \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos 3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin 3x}{\cos x \cdot \cos 3x} = \frac{\sin x \cdot \cos 3x}{\cos x \cdot \cos 3x} \Rightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow tg\, 3x = tg\, x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = x + k \cdot \pi, k \in Z \Rightarrow 2x = k \cdot \pi \; /:2 \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in Z.$$

Vježba 049

Nađite skup rješenja jednadžbe $\cos x \cdot \sin 2x = \sin x \cdot \cos 2x.$

Rezultat: $x = k \cdot \pi, k \in Z.$

Zadatak 050 (Marija, gimnazija)

Ako je $tg\, \alpha = 2$, koliko je $\dfrac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}$?

Rješenje 050

$$\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{\left(1 - \sin^4 \alpha\right) - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{\left(1 - \sin^2 \alpha\right) \cdot \left(1 + \sin^2 \alpha\right) - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha \cdot \left(1 + \sin^2 \alpha\right) - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \left[\text{izlučimo } \cos^2 \alpha\right] = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \left[1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha\right]}{\cos^4 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \left[1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha\right] = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \cdot tg^2 \alpha = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8.$$

Vježba 050

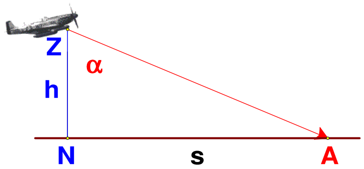
Ako je $tg\, \alpha = 3$, koliko je $\dfrac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}$?

Rezultat: 18.

Zadatak 051 (Anamarija, hotelijerska škola)

Zrakoplov leti stalnom brzinom na visini 10 km. U zadanom trenutku pilot vidi točku A na zemlji pod kutom 30º u odnosu na okomicu. Ako se nakon jedne minute zrakoplov nađe točno iznad točke A, kolika je brzina zrakoplova?

Rješenje 051



h = 10 km, α = 30º, $t = 1 \text{ min} = \frac{1}{60} h$, v = ?

Sa slike vidi se:

$|ZN| = h$, $|NA| = s$

$$tg\, \alpha = \frac{s}{h} \Rightarrow s = h \cdot tg\, \alpha.$$

Brzina zrakoplova je:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{h \cdot tg\, \alpha}{t} = \frac{10\; km \cdot tg\, 30^0}{\frac{1}{60}\; h} = 600 \cdot tg\, 30^0\; \frac{km}{h} = 600 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\; \frac{km}{h} = 200 \cdot \sqrt{3}\; \frac{km}{h}.$$

Vježba 051

Zrakoplov leti stalnom brzinom na visini 10 km. U zadanom trenutku pilot vidi točku A na zemlji pod kutom 60° u odnosu na okomicu. Ako se nakon jedne minute zrakoplov nađe točno iznad točke A, kolika je brzina zrakoplova?

Rezultat: $600 \cdot \sqrt{3}\ \frac{km}{h}.$

Zadatak 052 (Vedrana, gimnazija)

Kolika je najveća vrijednost parametra a za koji jednadžba $2 \cdot \sin x - \cos^2 x + a + 1 = 0$ ima bar jedno realno rješenje?

Rješenje 052

$$2 \cdot \sin x - \cos^2 x + a + 1 = 0 \Rightarrow \left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right] \Rightarrow 2 \cdot \sin x - \cos^2 x + a + \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin^2 x + 2 \cdot \sin x + a = 0 \\ a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{uvjet bar jedno realno rješenje} \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot a \geq 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot a \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot a \geq -4\ /:(-4) \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a_{max} = 1.$$

Vježba 052

Kolika je najveća vrijednost parametra a za koji jednadžba $2 \cdot \sin x - \cos^2 x + a + 1 = 0$ nema realna rješenja?

Rezultat: a > 1.

Zadatak 053 (Gregor, gimnazija)

Nađite zbroj rješenja jednadžbe $|\sin 2x| + |\cos x| = 0$ u intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje 053

Ponovimo!

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0\ ,\quad |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

$$|\sin 2x| + |\cos x| = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x = k \cdot \pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x = k \cdot \pi\ /:2 \\ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = k \cdot \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja prve i druge jednadžbe na intervalu $[0, 2\pi]$ su:

- $x = k \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$
- $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x_2 \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$

Budući da x mora zadovoljavati prvu i drugu jednadžbu sustava, vrijedi:

$$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi.$$

Vježba 053

Nađite zbroj rješenja jednadžbe $|\sin 2x| + |\cos x| = 0$ u intervalu $[0, \pi]$.

Rezultat: π.

Zadatak 054 (Vedrana, gimnazija)

Odredi broj rješenja jednadžbe: $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos(2x) - \sin \frac{x}{2} \cdot \sin(2x) = -1$ na segmentu $\left[-\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

Rješenje 054

Ponovimo!

$$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \cos(x+y).$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos(2x)-\sin\frac{x}{2}\cdot\sin(2x)=-1 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+2x\right)=-1 \Rightarrow \cos\frac{5x}{2}=-1 \Rightarrow \frac{5x}{2}=\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{2}=(2\cdot k+1)\cdot\pi\ /\cdot\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{2}{5}\cdot(2\cdot k+1)\cdot\pi \Rightarrow x=\left(\frac{4}{5}\cdot k+\frac{2}{5}\right)\cdot\pi,\ k\in Z.$$

Budući da tražena rješenja moraju biti na segmentu $\left[-\frac{3\pi}{2},\ 3\pi\right]$, napišemo "proširenu" nejednakost:

$$-\frac{3\pi}{2}\le\left(\frac{4}{5}\cdot k+\frac{2}{5}\right)\cdot\pi\le 3\pi \Rightarrow [\text{dijelimo sa } \pi] \Rightarrow -\frac{3\pi}{2}\le\left(\frac{4}{5}\cdot k+\frac{2}{5}\right)\cdot\pi\le 3\pi\ /:\pi \Rightarrow -\frac{3}{2}\le\frac{4}{5}\cdot k+\frac{2}{5}\le 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{pribrojimo } -\frac{2}{5}\right] \Rightarrow -\frac{3}{2}\le\frac{4}{5}\cdot k+\frac{2}{5}\le 3\ /-\frac{2}{5} \Rightarrow -\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\le\frac{4}{5}\cdot k+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\le 3-\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{19}{10}\le\frac{4}{5}\cdot k\le\frac{13}{5} \Rightarrow \left[\text{množimo brojem } \frac{5}{4}\right] \Rightarrow -\frac{19}{10}\le\frac{4}{5}\cdot k\le\frac{13}{5}\ /\cdot\frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{19}{10}\cdot\frac{5}{4}\le\frac{4}{5}\cdot k\cdot\frac{5}{4}\le\frac{13}{5}\cdot\frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{95}{40}\le k\le\frac{13}{4} \Rightarrow -\frac{19}{8}\le k\le\frac{13}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{k mora biti cijeli}\\ \text{broj u tom segmentu}\end{array}\right] \Rightarrow k\in\{-2,-1,0,1,2,3\}.$$

Jednadžba ima 6 rješenja.

Vježba 054

Odredi broj rješenja jednadžbe: $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos(2x)-\sin\frac{x}{2}\cdot\sin(2x)=2.$

Rezultat: Nema smisla jer je $-1\le\cos x\le 1$.

Zadatak 055 (Vedrana, Gregor, gimnazija)

Koliki je broj rješenja jednadžbe $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$ na segmentu $[0,\ 2\pi]$?

Rješenje 055

Ponovimo!

$$a^4+2\cdot a^2\cdot b^2+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2 \quad , \quad \cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad , \quad \sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x$$

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8} \Rightarrow \sin^4 x+\underline{\underline{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}+\cos^4 x-\underline{\underline{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}=\frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sin^4 x+2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)-2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\frac{4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{2}=\frac{5}{8} \Rightarrow 1-\frac{(2\cdot\sin x\cdot\cos x)^2}{2}=\frac{5}{8} \Rightarrow -\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{5}{8}-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\sin^2 2x}{2}=-\frac{3}{8}\ /\cdot(-2) \Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow \sin 2x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}.$$

- Odredimo rješenja jednadžbe

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Uz supstituciju $\boxed{t=2\cdot x}$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t=2\cdot x \\ \sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \\ t_2=\pi-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \\ t_2=\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1=\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi\ /:2 \\ 2\cdot x_2=\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi\ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{6}+k\cdot \pi \\ x_2=\dfrac{\pi}{3}+k\cdot \pi \end{array}\right\}.$$

Tražimo broj rješenja jednadžbe. Broj k je cijeli broj. Budući da rješenja moraju biti u segmentu $[0, 2\pi]$, napisat ćemo "proširenu" nejednakost i odrediti cjelobrojne vrijednosti broja k.

$0\le x_1\le 2\pi$	$0\le x_2\le 2\pi$
$0\le\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi\le 2\pi$	$0\le\dfrac{\pi}{3}+k\cdot\pi\le 2\pi$
$0\le\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi\le 2\pi\ /:\pi$	$0\le\dfrac{\pi}{3}+k\cdot\pi\le 2\pi\ /:\pi$
$0\le\dfrac{1}{6}+k\le 2$	$0\le\dfrac{1}{3}+k\le 2$
$0\le\dfrac{1}{6}+k\le 2\ /-\dfrac{1}{6}$	$0\le\dfrac{1}{3}+k\le 2\ /-\dfrac{1}{3}$
$-\dfrac{1}{6}\le\dfrac{1}{6}+k-\dfrac{1}{6}\le 2-\dfrac{1}{6}$	$-\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{3}+k-\dfrac{1}{3}\le 2-\dfrac{1}{3}$
$-\dfrac{1}{6}\le k\le\dfrac{11}{6}$	$-\dfrac{1}{3}\le k\le\dfrac{5}{3}$
$k\in\{0,1\}$	$k\in\{0,1\}$
Dva rješenja.	Dva rješenja.

- Odredimo rješenja jednadžbe

$$\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Uz supstituciju $\boxed{t=2\cdot x}$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t=2\cdot x \\ \sin 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ /\cdot(-1) \Rightarrow -\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(\pi+t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi+t_1=\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \\ \pi+t_2=\pi-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{\pi}{3}-\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \\ t_2=-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=-\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \\ t_2=-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1=-\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \\ 2\cdot x_2=-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1=-\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi\ /:2 \\ 2\cdot x_2=-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi\ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{\pi}{3}+k\cdot \pi \\ x_2=-\dfrac{\pi}{6}+k\cdot \pi \end{array}\right\}.$$

Tražimo broj rješenja jednadžbe. Broj k je cijeli broj. Budući da rješenja moraju biti u segmentu $\left[0, 2\pi\right]$, napisat ćemo "proširenu" nejednakost i odrediti cjelobrojne vrijednosti broja k.

$0 \le x_1 \le 2\pi$	$0 \le x_2 \le 2\pi$
$0 \le -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \le 2\pi$	$0 \le -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \le 2\pi$
$0 \le -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \le 2\pi \ /:\pi$	$0 \le -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \le 2\pi \ /:\pi$
$0 \le -\frac{1}{3} + k \le 2$	$0 \le -\frac{1}{6} + k \le 2$
$0 \le -\frac{1}{3} + k \le 2 \ /+\frac{1}{3}$	$0 \le -\frac{1}{6} + k \le 2 \ /+\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3} + k + \frac{1}{3} \le 2 + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \le -\frac{1}{6} + k + \frac{1}{6} \le 2 + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{3} \le k \le \frac{7}{3}$	$\frac{1}{6} \le k \le \frac{13}{6}$
$k \in \left\{1, 2\right\}$	$k \in \left\{1, 2\right\}$
Dva rješenja	Dva rješenja.

Ukupno je 8 rješenja.

Vježba 055

Koliki je broj rješenja jednadžbe $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ na segmentu $\left[0, \pi\right]$?

Rezultat: Ima 4 rješenja.

Zadatak 056 (Vedrana, gimnazija)

Provjerite jednakost: $2 \cdot \cos x \cdot \left(\sin x + \cos x\right) = 1 + \sin 2x + \cos 2x.$

Rješenje 056

Izvedimo relaciju koju ćemo uporabiti u provjeri jednakosti:

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 2x = 1 + \cos 2x.$$

Sada provjerimo zadanu jednakost:

$$2 \cdot \cos x \cdot \left(\sin x + \cos x\right) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos^2 x = \sin 2x + 2 \cdot \cos^2 x = \sin 2x + 1 + \cos 2x = 1 + \sin 2x + \cos 2x.$$

Vježba 056

Provjerite jednakost: $2 \cdot \sin x \cdot \left(\cos x - \sin x\right) = \sin 2x + \cos 2x - 1.$

Rezultat: Točna je.

Zadatak 057 (Marija, gimnazija)

Ako je $tg\, x + ctg\, x = p$, koliko iznosi $tg^2 x + ctg^2 x$?

Rješenje 057

Ponovimo!

$$\left(a + b\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad tg\, x \cdot ctg\, x = 1$$

$$tg\, x + ctg\, x = p \Rightarrow tg\, x + ctg\, x = p \ /^2 \Rightarrow tg^2 x + 2 \cdot tg\, x \cdot ctg\, x + ctg^2 x = p^2 \Rightarrow tg^2 x + 2 \cdot 1 + ctg^2 x = p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2 x + ctg^2 x = p^2 - 2.$$

Vježba 057

Ako je $tg\,x - ctg\,x = p$, koliko iznosi $tg^2\,x + ctg^2\,x$?

Rezultat: $p^2 + 2.$

Zadatak 058 (Kamelija, gimnazija)

Izračunaj: $\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} + \cos x \cdot \sin x.$

Rješenje 058

Ponovimo!

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} + \cos x \cdot \sin x = \frac{(\cos x + \sin x)\left(\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x} + \cos x \cdot \sin x =$$

$$= \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Vježba 058

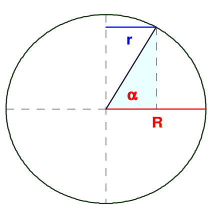
Izračunaj: $tg\,x \cdot \left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x} - 1\right).$

Rezultat: 1.

Zadatak 059 (Kamelija, gimnazija)

Koliko iznosi zemljopisna širina na kojoj je polumjer pripadne paralele jednak polovici polumjera Zemlje?

Rješenje 059



Sa slike vidi se:

$$r = \frac{1}{2} \cdot R.$$

Zemljopisna širina iznosi:

$$\cos\alpha = \frac{r}{R} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot R}{R} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

Vježba 059

Koliko iznosi zemljopisna širina na kojoj je polumjer pripadne paralele jednak $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ polumjera Zemlje?

Rezultat: 30°.

Zadatak 060 (Vedrana, gimnazija)

Koliki je najmanji (temeljni) period funkcije f(x) = sin 4x + cos 6x?

Rješenje 060

Budući da funkcija sin x ima temeljni period 2π, periodi funkcija sin 4x i sin 6x su:

$$\sin 4x \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ P = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \sin 6x \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ P = \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Temeljni period zadane funkcije je π. To je najmanji zajednički višekratnik od $\dfrac{\pi}{2}$ i $\dfrac{\pi}{3}$.

Vježba 060

Koliki je najmanji (temeljni) period funkcije f(x) = sin 2x + cos 4x?

Rezultat: π.