Zadatak 041 (Sanja, informatika)

Zadana su dva geometrijska niza koji imaju isti četvrti član. Zbroj pojedinih trećih članova oba niza jest 16, razlika pripadajućih drugih jednaka je zbroju trećih, a razlika prvih za deset je veća od zbroja trećih. Koji su to nizovi?

Rješenje 041

Ponovimo!

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Zapis prvih nekoliko članova geometrijskog niza može se prikazati na razne načine (ovisno o uvjetima zadatka):

- $a,\ a \cdot q,\ a \cdot q^2,\ a \cdot q^3,\ a \cdot q^4,\ a \cdot q^5,\ a \cdot q^6,\ a \cdot q^7,\ \ldots$
- $\frac{a}{q},\ a,\ a \cdot q,\ a \cdot q^2,\ a \cdot q^3,\ a \cdot q^4,\ a \cdot q^5,\ a \cdot q^6,\ \ldots$
- $\frac{a}{q^2},\ \frac{a}{q},\ a,\ a \cdot q,\ a \cdot q^2,\ a \cdot q^3,\ a \cdot q^4,\ a \cdot q^5,\ \ldots$
- $\frac{a}{q^3},\ \frac{a}{q^2},\ \frac{a}{q},\ a,\ a \cdot q,\ a \cdot q^2,\ a \cdot q^3,\ a \cdot q^4,\ \ldots$

itd.

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

Budući da su zadana dva geometrijska niza, kvocijent prvog niza označit ćemo slovom q, a kvocijent drugoga slovom p.

Nizovi imaju isti četvrti član pa ćemo ih ovako zapisati:

- $\frac{a}{q^3},\ \frac{a}{q^2},\ \frac{a}{q},\ a,\ \ldots$
- $\frac{a}{p^3},\ \frac{a}{p^2},\ \frac{a}{p},\ a,\ \ldots$.

Iz zadanih uvjeta slijedi sustav jednadžbi:

Zbroj pojedinih trećih članova oba niza jest 16:

$$\frac{a}{q} + \frac{a}{p} = 16.$$

Razlika pripadajućih drugih članova niza jednaka je zbroju trećih članova:

$$\frac{a}{q^2} - \frac{a}{p^2} = 16.$$

Razlika prvih članova niza za deset je veća od zbroja trećih članova:

$$\frac{a}{q^3} - \frac{a}{p^3} = 26.$$

Dobije se sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice:

$$\left.\frac{a}{q} + \frac{a}{p} = 16 \ ,\ \frac{a}{q^2} - \frac{a}{p^2} = 16 \ ,\ \frac{a}{q^3} - \frac{a}{p^3} = 26 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)=16\ ,\ a\cdot\left(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^2}\right)=16\ ,\ a\cdot\left(\frac{1}{q^3}-\frac{1}{p^3}\right)=26\Bigg\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{zbog jednostavnosti i lakoće}\\ \text{računanja uvodimo supstitucije}\\ \frac{1}{q}=x\ ,\ \frac{1}{p}=y\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\cdot(x+y)=16\\ a\cdot\left(x^2-y^2\right)=16\\ a\cdot\left(x^3-y^3\right)=26\end{array}\right\}.$$

Podijelimo drugu jednadžbu s prvom i treću s drugom:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a\cdot\left(x^2-y^2\right)}{a\cdot(x+y)}=\frac{16}{16}\\ \frac{a\cdot\left(x^3-y^3\right)}{a\cdot\left(x^2-y^2\right)}=\frac{26}{16}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x^2-y^2}{x+y}=1\\ \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\frac{13}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{x+y}=1\\ \frac{(x-y)\cdot\left(x^2+x\cdot y+y^2\right)}{(x-y)\cdot(x+y)}=\frac{13}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x-y=1\\ \frac{x^2+x\cdot y+y^2}{x+y}=\frac{13}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1+y\\ 8\cdot\left(x^2+x\cdot y+y^2\right)=13\cdot(x+y)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1+y\\ 8\cdot x^2+8\cdot x\cdot y+8\cdot y^2=13\cdot x+13\cdot y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1+y\\ 8\cdot x^2+8\cdot x\cdot y+8\cdot y^2-13\cdot x-13\cdot y=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot(1+y)^2+8\cdot(1+y)\cdot y+8\cdot y^2-13\cdot(1+y)-13\cdot y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot\left(1+2\cdot y+y^2\right)+8\cdot y\cdot(1+y)+8\cdot y^2-13-13\cdot y-13\cdot y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+16\cdot y+8\cdot y^2+8\cdot y+8\cdot y^2+8\cdot y^2-13-13\cdot y-13\cdot y=0\Rightarrow 24\cdot y^2-2\cdot y-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\Rightarrow y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 24\cdot(-5)}}{2\cdot 24}\Rightarrow y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+480}}{48}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{484}}{48}\Rightarrow y_{1,2}=\frac{2\pm 22}{48}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y_1=\frac{2+22}{48}\\ y_2=\frac{2-22}{48}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y_1=\frac{24}{48}\\ y_2=\frac{-20}{48}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y_1=\frac{1}{2}\\ y_2=\frac{-5}{12}\end{array}\right\}.$$

Računamo x:

$$\left.\begin{array}{l}x=1+y\\ y_1=\frac{1}{2}\\ y_2=\frac{-5}{12}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=1+\frac{1}{2}\\ x_2=1-\frac{5}{12}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\frac{3}{2}\\ x_2=\frac{7}{12}\end{array}\right\}.$$

Vidimo da ćemo imati dva skupa rješenja.

Iz x_1 i y_1 dobijemo kvocijente q_1 i p_1:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{q_1}=x_1\\[2ex]\dfrac{1}{p_1}=y_1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{q_1}=\dfrac{3}{2}\\[2ex]\dfrac{1}{p_1}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}q_1=\dfrac{2}{3}\\[2ex]p_1=2\end{array}\right\}.$$

Iz, na primjer, jednadžbe a · (x + y) = 16 izračunamo član a:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{3}{2}\;,\;y_1=\dfrac{1}{2}\\[2ex]a\cdot\left(x_1+y_1\right)=16\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=16\Rightarrow a\cdot\dfrac{4}{2}=16\Rightarrow 2\cdot a=16\;/:2\;\Rightarrow a=8.$$

Prva dva geometrijska niza glase:

▶

$$\frac{a}{q_1^3},\frac{a}{q_1^2},\frac{a}{q_1},a,\ldots\Rightarrow\frac{8}{\left(\frac{2}{3}\right)^3},\frac{8}{\left(\frac{2}{3}\right)^2},\frac{8}{\frac{2}{3}},8,\ldots\Rightarrow\frac{8}{\frac{8}{27}},\frac{8}{\frac{4}{9}},\frac{8}{\frac{2}{3}},8,\ldots\Rightarrow\underline{27,18,12,8,\ldots}$$

▶

$$\frac{a}{p_1^3},\frac{a}{p_1^2},\frac{a}{p_1},a,\ldots\Rightarrow\frac{8}{2^3},\frac{8}{2^2},\frac{8}{2},8,\ldots\Rightarrow\frac{8}{8},\frac{8}{4},\frac{8}{2},8,\ldots\Rightarrow\underline{1,2,4,8,\ldots}$$

Iz x_2 i y_2 dobijemo kvocijente q_2 i p_2:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{q_2}=x_2\\[2ex]\dfrac{1}{p_2}=y_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{q_2}=\dfrac{7}{12}\\[2ex]\dfrac{1}{p_2}=-\dfrac{5}{12}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}q_2=\dfrac{12}{7}\\[2ex]p_2=-\dfrac{12}{5}\end{array}\right\}.$$

Iz, na primjer, jednadžbe a · (x + y) = 16 izračunamo član a:

$$\left.\begin{array}{l}x_2=\dfrac{7}{12}\;,\;y_2=-\dfrac{5}{12}\\[2ex]a\cdot\left(x_2+y_2\right)=16\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot\left(\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{12}\right)=16\Rightarrow a\cdot\dfrac{2}{12}=16\Rightarrow\dfrac{1}{6}\cdot a=16\;/\cdot 6\;\Rightarrow a=96.$$

Druga dva geometrijska niza glase:

▶

$$\frac{a}{q_2^3},\frac{a}{q_2^2},\frac{a}{q_2},a,\ldots\Rightarrow\frac{96}{\left(\frac{12}{7}\right)^3},\frac{96}{\left(\frac{12}{7}\right)^2},\frac{96}{\frac{12}{7}},96,\ldots\Rightarrow\frac{96}{\frac{1728}{343}},\frac{96}{\frac{144}{49}},\frac{96}{\frac{12}{7}},96,\ldots\Rightarrow\underline{\frac{343}{18},\frac{98}{3},56,96,\ldots}$$

▶

$$\frac{a}{p_2^3},\frac{a}{p_2^2},\frac{a}{p_2},a,\ldots\Rightarrow\frac{96}{\left(-\frac{12}{5}\right)^3},\frac{96}{\left(-\frac{12}{5}\right)^2},\frac{96}{-\frac{12}{5}},96,\ldots\Rightarrow\underline{-\frac{125}{18},\frac{50}{8},-40,96,\ldots}$$

Vježba 041

Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 28, a zbroj triju narednih 3.5. Odredite a_1 i q.

Rezultat:

$$\left.\begin{array}{l}a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=28\\ a_1\cdot q^3+a_1\cdot q^4+a_1\cdot q^5=3.5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)=28\\ a_1\cdot q^3\cdot\left(1+q+q^2\right)=3.5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^3 \cdot \left(1+q+q^2\right)}{a_1 \cdot \left(1+q+q^2\right)} = \frac{3.5}{28}\right\} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 16 \Rightarrow a_1 = 16.$$

Zadatak 042 (Sanja, informatika)

Odredite aritmetički niz (slijed) kojemu je opći član $a_n = \frac{3 \cdot n - 1}{6}$.

Rješenje 042

Ponovimo!

Niz je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Budući da je zadan n – ti (opći) član niza $a_n = \frac{3 \cdot n - 1}{6}$, izračunat ćemo prvih nekoliko članova niza:

- $\text{prvi član}: n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $\text{drugi član}: n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{3 \cdot 2 - 1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$
- $\text{treći član}: n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{6} = \frac{9-1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
- $\text{četvrti član}: n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{3 \cdot 4 - 1}{6} = \frac{12-1}{6} = \frac{11}{6}$ itd.

Razliku (diferenciju) dobijemo iz definicije:

$$d = a_2 - a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad d = a_3 - a_2 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} = \frac{8-5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$d = a_4 - a_3 = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{11-8}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{itd.}$$

Općenito:

$$d = a_n - a_{n-1} = \frac{3 \cdot n - 1}{6} - \frac{3 \cdot (n-1) - 1}{6} = \frac{3 \cdot n - 1}{6} - \frac{3 \cdot n - 3 - 1}{6} = \frac{3 \cdot n - 1}{6} - \frac{3 \cdot n - 4}{6} = \frac{3 \cdot n - 1 - 3 \cdot n + 4}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Zadani aritmetički niz ima prvi član $a_1 = \frac{1}{3}$, a diferenciju $d = \frac{1}{2}$.

Vježba 042

Odredite aritmetički niz (slijed) kojemu je opći član $a_n = \frac{2 \cdot n - 1}{3}$.

Rezultat: Zadani aritmetički niz ima prvi član $a_1 = \frac{1}{3}$, a diferenciju $d = \frac{2}{3}$.

Zadatak 043 (Sanja, informatika)

Koliki je zbroj prvih pet članova niza: $\sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}, \ldots$?

Rješenje 043

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalan i iznosi q. Broj q zovemo kvocijent (količnik) geometrijskog niza.

$$\frac{a_2}{a_1}=q\ ,\ \frac{a_3}{a_2}=q\ ,\ \frac{a_4}{a_3}=q\ ,\ \frac{a_5}{a_4}=q\ ,\ \frac{a_6}{a_5}=q\ ,\ \ldots\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q\ \ldots$$

Budući da su zadana prva tri člana niza, izračunat ćemo kvocijent q:

$$a_1=\sqrt{\frac{2}{3}},\ a_2=1,\ a_3=\sqrt{\frac{3}{2}},\ldots\ \Rightarrow\ q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Dakle, riječ je o geometrijskom nizu za koji vrijedi: $a_1=\sqrt{\frac{2}{3}},\ q=\sqrt{\frac{3}{2}}.$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je: $s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1.$ Zbroj prvih pet članova niza iznosi:

$$s_5=a_1\cdot\frac{q^5-1}{q-1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^5}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{3}{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{9\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{9\cdot\sqrt{3}-4\cdot\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9\cdot\sqrt{3}-4\cdot\sqrt{2}}{4\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9\cdot\sqrt{3}-4\cdot\sqrt{2}}{4\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{27+9\cdot\sqrt{6}-4\cdot\sqrt{6}-8}{4\cdot\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{19+5\cdot\sqrt{6}}{4\cdot(3-2)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{19+5\cdot\sqrt{6}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{19+5\cdot\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{19+5\cdot\sqrt{6}}{4}=\frac{19\cdot\sqrt{6}+30}{12}.$$

Vježba 043

Koliki je zbroj prvih pet članova niza: $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\ldots$?

Rezultat: $\frac{7\cdot\sqrt{2}+6}{8}.$

Zadatak 044 (Sanja, informatika)

Odredite geometrijski niz kojemu je razlika trećeg i prvoga člana 12, a njihov umnožak 64.

Rješenje 044

Ponovimo!

Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalan i iznosi q. Broj q zovemo kvocijent (količnik) geometrijskog niza.

$$\frac{a_2}{a_1}=q\ ,\ \frac{a_3}{a_2}=q\ ,\ \frac{a_4}{a_3}=q\ ,\ \frac{a_5}{a_4}=q\ ,\ \frac{a_6}{a_5}=q\ ,\ \ldots\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q\ \ldots.$$

Opći član geometrijskog niza (slijeda) glasi:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Razlika trećeg i prvoga člana je 12, a njihov umnožak 64:

$$\left.\begin{matrix} a_3 - a_1 = 12 \\ a_1 \cdot a_3 = 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot q^2 - a_1 = 12 \\ a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 = 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1^2 \cdot q^2 = 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ \left(a_1 \cdot q\right)^2 = 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ \left(a_1 \cdot q\right)^2 = 64 \ /\sqrt{\ } \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1 \cdot q = \pm\sqrt{64} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1 \cdot q = \pm 8 \end{matrix}\right\}.$$

Moramo riješiti dva sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1 \cdot q = +8 \end{matrix}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1 \cdot q = -8 \end{matrix}\right\}.$$

Rješavamo prvi sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1 \cdot q = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right)}{a_1 \cdot q} = \frac{12}{8} \Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 3 \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot q^2 - 2 = 3 \cdot q \Rightarrow 2 \cdot q^2 - 3 \cdot q - 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \frac{3+5}{4} \\ q_2 = \frac{3-5}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \frac{8}{4} = 2 \\ q_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot q = 8 \ , \ q_1 = 2 \\ a_1 \cdot q = 8 \ , \ q_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \left(a_1\right)_1 \cdot 2 = 8 \\ \left(a_1\right)_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \left(a_1\right)_1 \cdot 2 = 8 \ /:2 \\ \left(a_1\right)_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \ /\cdot(-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \left(a_1\right)_1 = 4 \\ \left(a_1\right)_2 = -16 \end{matrix}\right\}.$$

Rješavamo drugi sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 12 \\ a_1 \cdot q = -8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{a_1 \cdot \left(q^2 - 1\right)}{a_1 \cdot q} = \frac{12}{-8} \Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left(q^2 - 1\right) = -3 \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot q^2 - 2 = -3 \cdot q \Rightarrow 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q - 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow q_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow q_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow q_{3,4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_3 = \frac{-3+5}{4} \\ q_4 = \frac{-3-5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ q_4 = \frac{-8}{4} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q = -8 \ , \ q_3 = \frac{1}{2} \\ a_1 \cdot q = -8 \ , \ q_4 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a_1)_3 \cdot \frac{1}{2} = -8 \\ (a_1)_4 \cdot (-2) = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a_1)_3 \cdot \frac{1}{2} = -8 \ / \cdot 2 \\ (a_1)_4 \cdot (-2) = -8 \ / :(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a_1)_3 = -16 \\ (a_1)_4 = 4 \end{array}\right\}.$$

Vježba 044

Odredite geometrijski niz (slijed) ako je: $a_1 - a_2 = 35 \ , \ a_3 - a_4 = 560.$

Rezultat: $(a_1)_1 = 7 \ , \ q_1 = -4 \ , \ (a_1)_2 = -\frac{35}{3} \ , \ q_2 = 4.$

Zadatak 045 (Sanja, informatika)

Zadana su dva aritmetička niza. Zbroj pojedinih prvih članova oba niza je 6, umnožak pripadajućih drugih jednak je zbroju prvih, razlika trećih jest trećina umnoška drugih, a količnik četvrtih članova oba niza jest razlika trećih umanjena za zbroj prvih. Koji su to nizovi?

Rješenje 045

Ponovimo!

Kvadrat zbroja: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$

Niz je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots .$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Neka su:

- a prvi član i d razlika prvog aritmetičkog niza
- b prvi član i c razlika drugog aritmetičkog niza.

Postavimo sustav jednadžbi:

① Zbroj pojedinih prvih članova oba niza je 6:

$$a + b = 6.$$

② Umnožak pripadajućih drugih jednak je zbroju prvih:

$$(a+d) \cdot (b+c) = 6.$$

③ Razlika trećih jest trećina umnoška drugih:

$$(a + 2 \cdot d) - (b + 2 \cdot c) = \frac{1}{3} \cdot 6 \Rightarrow (a + 2 \cdot d) - (b + 2 \cdot c) = 2.$$

④ Količnik četvrtih članova oba niza jest razlika trećih umanjena za zbroj prvih:

$$\frac{a + 3 \cdot d}{b + 3 \cdot c} = 2 - 6 \Rightarrow \frac{a + 3 \cdot d}{b + 3 \cdot c} = -4.$$

Rješavamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 6 \\ (a+d) \cdot (b+c) = 6 \\ (a + 2 \cdot d) - (b + 2 \cdot c) = 2 \\ \frac{a + 3 \cdot d}{b + 3 \cdot c} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 6 - a \\ (a+d) \cdot (b+c) = 6 \\ a + 2 \cdot d - b - 2 \cdot c = 2 \\ a + 3 \cdot d = -4 \cdot b - 12 \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 6 - a \\ (a+d) \cdot (b+c) = 6 \\ a + 2 \cdot d - b - 2 \cdot c = 2 \\ a + 3 \cdot d + 4 \cdot b + 12 \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b \text{ iz prve jednadžbe} \\ \text{uvrstimo u preostale} \\ \text{tri jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+d)\cdot(6-a+c)=6 \\ a+2\cdot d-6+a-2\cdot c=2 \\ a+3\cdot d+24-4\cdot a+12\cdot c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+d)\cdot(6-a+c)=6 \\ 2\cdot a-2\cdot c+2\cdot d=8 \ /:2 \\ -3\cdot a+12\cdot c+3\cdot d=-24 \ /:(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+d)\cdot(6-a+c)=6 \\ a-c+d=4 \\ a-4\cdot c-d=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+d)\cdot(6-a+c)=6 \\ a=4+c-d \\ a-4\cdot c-d=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \text{ iz druge jednadžbe} \\ \text{uvrstimo u prvu} \\ \text{i treću jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4+c-d+d)\cdot(6-4-c+d+c)=6 \\ 4+c-d-4\cdot c-d=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4+c)\cdot(2+d)=6 \\ -2\cdot d-3\cdot c=8-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4+c)\cdot(2+d)=6 \\ -2\cdot d-3\cdot c=4 \ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4+c)\cdot(2+d)=6 \\ 2\cdot d+3\cdot c=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4+c)\cdot(2+d)=6 \\ 2\cdot d=-3\cdot c-4 \ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4+c)\cdot(2+d)=6 \\ d=\dfrac{-3\cdot c-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+c)\cdot\left(2+\frac{-3\cdot c-4}{2}\right)=6 \Rightarrow (4+c)\cdot\frac{4-3\cdot c-4}{2}=6 \Rightarrow (4+c)\cdot\frac{-3\cdot c}{2}=6 \ /\cdot\frac{-2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+c)\cdot c=-4 \Rightarrow c^2+4\cdot c+4=0 \Rightarrow (c+2)^2=0 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow c+2=0 \Rightarrow c=-2.$$

Sada tražimo vrijednosti za d, a i b:

$$\left.\begin{array}{l} c=-2 \\ d=\dfrac{-3\cdot c-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow d=\frac{-3\cdot(-2)-4}{2} \Rightarrow d=\frac{6-4}{2} \Rightarrow d=1.$$

$$\left.\begin{array}{l} c=-2\ ,\ d=1 \\ a-4\cdot c-d=8 \end{array}\right\} \Rightarrow a-4\cdot(-2)-1=8 \Rightarrow a+8-1=8 \Rightarrow a=1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+b=6 \Rightarrow b=5.$$

Prvi aritmetički niz glasi: $\left.\begin{array}{l} a=1 \\ d=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$.

Drugi aritmetički niz iznosi: $\left.\begin{array}{l} b=5 \\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, \ldots$.

Vježba 045

Zbroj prva tri člana aritmetičkog niza iznosi 27, a zbroj njihovih kvadrata jednak je 275. Koji je to niz?

Rezultat: Naputak: $\left.\begin{array}{l} (a-d)+a+(a+d)=27 \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=275 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=9 \\ d_1=4\ ,\ d_2=-4 \end{array}\right\}.$

Dva su rješenja: niz 5, 9, 13, 17, 21, … niz 13, 9, 5, 1, – 3, – 7, … .

Zadatak 045 (Maturant, gimnazija)

Zadani su realni brojevi $a_1, a_2, \ldots a_{100}$, takvi da je $a_1 = 3$ te $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{100} - a_{99} = 5$. Izračunajte $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Rješenje 045

Budući da je riječ o aritmetičkom nizu kojem je prvi član $a_1 = 3$, a razlika (diferencija) $d = 5$, zbroj prvih 100 članova iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \ , \ d = 5 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{100} = \frac{100}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 99 \cdot d\right] \Rightarrow s_{100} = 50 \cdot [2 \cdot 3 + 99 \cdot 5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{100} = 50 \cdot [6 + 495] \Rightarrow s_{100} = 25050.$$

Vježba 045

Zadani su realni brojevi $a_1, a_2, \dots a_{50}$, takvi da je $a_1 = 3$ te $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{50} - a_{49} = 5$. Izračunajte $a_1 + a_2 + \dots + a_{50}$.

Rezultat: $s_{50} = 6275.$

Zadatak 046 (Ivan, geodetska škola)

Tri broja, treći je 12, uzastopni su članovi geometrijskog niza. Ako se 12 zamijeni s 9, ti će brojevi biti uzastopni članovi aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

Rješenje 046

Ponovimo!

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \quad , \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \quad , \quad 2 \cdot a_2 = a_1 + a_3 \quad , \quad a_1 = 2 \cdot a_2 - a_3 \quad , \quad a_3 = 2 \cdot a_2 - a_1.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana aritmetičkog niza s razlikom (diferencijom) d, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_1 + 2 \cdot d \end{array}\right| \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a_1 = a_2 - d \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = a_2 + d \end{array}\right| \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a_1 = a_3 - 2 \cdot d \\ a_2 = a_3 - d \\ a_3 = a_3 \end{array}\right|.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana geometrijskog niza, vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \quad , \quad a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \quad , \quad a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3} \quad , \quad a_1 = \frac{a_2^2}{a_3} \quad , \quad a_3 = \frac{a_2^2}{a_1}.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana geometrijskog niza s kvocijentom (količnikom) q, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \end{array}\right| \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{a_2}{q} \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = a_2 \cdot q \end{array}\right| \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{a_3}{q^2} \\ a_2 = \frac{a_3}{q} \\ a_3 = a_3 \end{array}\right|.$$

1.inačica

Budući da su zadana tri broja, treći je 12, koji čine geometrijski niz, možemo ih zapisati:

$$\frac{12}{q^2}, \frac{12}{q}, 12, \dots.$$

Ako se 12 zamijeni brojem 9, ti će brojevi biti uzastopni članovi aritmetičkog niza. To pišemo ovako:

$$\frac{12}{q^2}, \frac{12}{q}, 9 \Rightarrow 2 \cdot \frac{12}{q} = \frac{12}{q^2} + 9.$$

Riješimo dobivenu jednadžbu:

$$2\cdot\frac{12}{q}=\frac{12}{q^2}+9 \Rightarrow 2\cdot\frac{12}{q}=\frac{12}{q^2}+9 \,/\cdot\frac{q^2}{3} \Rightarrow 3\cdot q^2-8\cdot q+4=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=3\ ,\ b=-8\ ,\ c=4 \\ q_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{8\pm 4}{6} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1=\dfrac{8+4}{6} \\ q_2=\dfrac{8-4}{6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1=\dfrac{12}{6} \\ q_2=\dfrac{4}{6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1=2 \\ q_2=\dfrac{2}{3}\end{matrix}\right\}.$$

Postoje dva niza.
Prvi geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{matrix} q=2 \\ \dfrac{12}{q^2},\ \dfrac{12}{q},\ 12,\ ... \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{12}{4},\ \frac{12}{2},\ 12,\ ... \Rightarrow 3,\ 6,\ 12,\ .... \text{ Pripadni aritmetički niz je}: 3,\ 6,\ 9,\ ....$$

Drugi geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{matrix} q=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{12}{q^2},\ \dfrac{12}{q},\ 12,\ ... \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{12}{\frac{4}{9}},\ \frac{12}{\frac{2}{3}},\ 12,\ ... \Rightarrow 27,\ 18,\ 12,\ .... \text{ Pripadni aritmetički niz je}: 27,\ 18,\ 9,\ ....$$

2.inačica

Neka je x prvi član traženog niza. Budući da su zadana tri broja, treći je 12, koji čine geometrijski niz, možemo ih zapisati:

$$x,\ \sqrt{12\cdot x},\ 12,\ ....$$

Ako se 12 zamijeni brojem 9, ti će brojevi biti uzastopni članovi aritmetičkog niza. To pišemo ovako:

$$x,\ \sqrt{12\cdot x},\ 12 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{12\cdot x}=x+9.$$

Riješimo iracionalnu jednadžbu:

$$2\cdot\sqrt{12\cdot x}=x+9 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{12\cdot x}=x+9 \,/^2 \Rightarrow 4\cdot 12\cdot x=x^2+18\cdot x+81 \Rightarrow x^2+18\cdot x-48\cdot x+81=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-30\cdot x+81=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-30\ ,\ c=81 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-4\cdot 1\cdot 81}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-324}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{576}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{30\pm 24}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{30+24}{2} \\ x_2=\dfrac{30-24}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{54}{2} \\ x_2=\dfrac{6}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=27 \\ x_2=3\end{matrix}\right\}.$$

Postoje dva niza.

Prvi geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x=27 \\ x,\ \sqrt{12\cdot x},\ 12,\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 27,\ \sqrt{12\cdot 27},\ 12,\ \ldots \Rightarrow 27,\ 18,\ 12,\ \ldots.\ \text{Pripadni aritmetički niz je: } 27,\ 18,\ 9,\ \ldots.$$

Drugi geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ x,\ \sqrt{12\cdot x},\ 12,\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 3,\ \sqrt{12\cdot 3},\ 12,\ \ldots \Rightarrow 3,\ 6,\ 12,\ \ldots.\ \text{Pripadni aritmetički niz je: } 3,\ 6,\ 9,\ \ldots.$$

Vježba 046

Tri broja, treći je 4, uzastopni su članovi geometrijskog niza. Ako se 4 zamijeni s 3, ti će brojevi biti uzastopni članovi aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

Rezultat: 1, 2, 4, ... i 9, 6, 4, ...

Zadatak 047 (Ivan, geodetska škola)

Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza jednaki su 2, treći članovi su jednaki, a drugi se razlikuju za 4. Nađite ove nizove.

Rješenje 047

Ponovimo!

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$a_2-a_1=a_3-a_2 \quad , \quad a_2=\frac{a_1+a_3}{2} \quad , \quad 2\cdot a_2=a_1+a_3 \quad , \quad a_1=2\cdot a_2-a_3 \quad , \quad a_3=2\cdot a_2-a_1.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana aritmetičkog niza s razlikom (diferencijom) d, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=a_1 \\ a_2=a_1+d \\ a_3=a_1+2\cdot d \end{array}\right| \quad \text{ili} \quad \left.\begin{array}{l} a_1=a_2-d \\ a_2=a_2 \\ a_3=a_2+d \end{array}\right| \quad \text{ili} \quad \left.\begin{array}{l} a_1=a_3-2\cdot d \\ a_2=a_3-d \\ a_3=a_3 \end{array}\right|.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana geometrijskog niza, vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2} \quad , \quad a_2^2=a_1\cdot a_3 \quad , \quad a_2=\sqrt{a_1\cdot a_3} \quad , \quad a_1=\frac{a_2^2}{a_3} \quad , \quad a_3=\frac{a_2^2}{a_1}.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana geometrijskog niza s kvocijentom (količnikom) q, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=a_1 \\ a_2=a_1\cdot q \\ a_3=a_1\cdot q^2 \end{array}\right| \quad \text{ili} \quad \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{a_2}{q} \\ a_2=a_2 \\ a_3=a_2\cdot q \end{array}\right| \quad \text{ili} \quad \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{a_3}{q^2} \\ a_2=\dfrac{a_3}{q} \\ a_3=a_3 \end{array}\right|.$$

Budući da su prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza jednaki 2, a trei međusobno jednaki, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 2,\ \dfrac{2+x}{2},\ x,\ \ldots\ \text{aritmetički niz} \\ 2,\ \sqrt{2\cdot x},\ x,\ \ldots\ \text{geometrijski niz} \end{array}\right\}.$$

Drugi članovi razlikuju se za 4 pa slijedi:

$$\frac{2+x}{2}-4=\sqrt{2\cdot x} \Rightarrow \frac{2+x}{2}-4=\sqrt{2\cdot x}\ /\cdot 2 \Rightarrow 2+x-8=2\cdot\sqrt{2\cdot x} \Rightarrow x-6=2\cdot\sqrt{2\cdot x}\ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-12\cdot x+36=8\cdot x \Rightarrow x^2-20\cdot x+36=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-20\ ,\ c=36 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{400-4\cdot1\cdot36}}{2\cdot1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{400-144}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{256}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{20\pm16}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{20+16}{2} \\ x_2=\dfrac{20-16}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{36}{2} \\ x_2=\dfrac{4}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=18 \\ x_2=2 \text{ nema smisla}\end{matrix}\right\}.$$

Nizovi su:

$$\left.\begin{matrix} 2,\ \dfrac{2+x}{2},\ x,\ ... \\ 2,\ \sqrt{2\cdot x},\ x,\ ...\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x=18\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2,\ 10,\ 18,\ ... \\ 2,\ 6,\ 18\ ...\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 047

Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza jednaki su, treći članovi su jednaki 18, a drugi se razlikuju za 4. Nađite ove nizove, ako su im članovi pozitivni brojevi.

Rezultat: 2, 10, 18, ... i 2, 6, 18 ....

Zadatak 048 (Ivan, geodetska škola)

Tri broja, čiji je zbroj 21, čine aritmetički niz. Ako drugom oduzmemo 1, a trećem dodamo 1, dobit ćemo tri broja koja čine geometrijski niz. Koji su to brojevi?

Rješenje 048

Ponovimo!

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$a_2-a_1=a_3-a_2 \quad , \quad a_2=\frac{a_1+a_3}{2} \quad , \quad 2\cdot a_2=a_1+a_3 \quad , \quad a_1=2\cdot a_2-a_3 \quad , \quad a_3=2\cdot a_2-a_1.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana aritmetičkog niza s razlikom (diferencijom) d, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} a_1=a_1 \\ a_2=a_1+d \\ a_3=a_1+2\cdot d\end{matrix}\right| \text{ ili } \left.\begin{matrix} a_1=a_2-d \\ a_2=a_2 \\ a_3=a_2+d\end{matrix}\right| \text{ ili } \left.\begin{matrix} a_1=a_3-2\cdot d \\ a_2=a_3-d \\ a_3=a_3\end{matrix}\right|.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana geometrijskog niza, vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2} \quad , \quad a_2^2=a_1\cdot a_3 \quad , \quad a_2=\sqrt{a_1\cdot a_3} \quad , \quad a_1=\frac{a_2^2}{a_3} \quad , \quad a_3=\frac{a_2^2}{a_1}.$$

Ako su a_1, a_2, a_3 tri uzastopna člana geometrijskog niza s kvocijentom (količnikom) q, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} a_1=a_1 \\ a_2=a_1\cdot q \\ a_3=a_1\cdot q^2\end{matrix}\right| \text{ ili } \left.\begin{matrix} a_1=\dfrac{a_2}{q} \\ a_2=a_2 \\ a_3=a_2\cdot q\end{matrix}\right| \text{ ili } \left.\begin{matrix} a_1=\dfrac{a_3}{q^2} \\ a_2=\dfrac{a_3}{q} \\ a_3=a_3\end{matrix}\right|.$$

Budući da tri broja, čiji je zbroj 21, čine aritmetički niz, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = x - d \\ a_2 = x \\ a_3 = x + d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ x - d + x + x + d = 21 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot x = 21 \;/:3 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 7 - d \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 7 + d \end{array}\right\}.$$

Ako drugom članu oduzmemo 1, a trećem dodamo 1, dobit ćemo tri broja koji čine geometrijski niz. Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 7 - d \\ a_2 = 7 - 1 \\ a_3 = 7 + d + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 7 - d \\ a_2 = 6 \\ a_3 = 8 + d \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a_2^2 = a_1 \cdot a_3\right] \Rightarrow 36 = (7 - d) \cdot (8 + d) \Rightarrow 36 = 56 + 7 \cdot d - 8 \cdot d - d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 + d - 20 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -20 \\ d_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow d_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \Rightarrow d_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow d_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1 = \dfrac{-1 + 9}{2} \\ d_2 = \dfrac{-1 - 9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1 = \dfrac{8}{2} \\ d_2 = \dfrac{-10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1 = 4 \\ d_2 = -5 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva niza, dva rješenja:

- $$\left.\begin{array}{l} a_1 = 7 - d \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 7 + d \end{array}\right\} \Rightarrow [d = 4] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 11 \end{array}\right\}.$$
- $$\left.\begin{array}{l} a_1 = 7 - d \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 7 + d \end{array}\right\} \Rightarrow [d = -5] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 2 \end{array}\right\}.$$

Vježba 048

Tri broja, čiji je zbroj 15, čine aritmetički niz. Ako drugom oduzmemo 1, dobit ćemo tri broja koja čine geometrijski niz. Koji su to brojevi?

Rezultat: 2, 5, 8, ... i 8, 5, 2 ....

Zadatak 049 (4B, TUPŠ)

Rhindov papirus važan je povijesni dokument o matematičkim znanjima starih Egipćana. Sadrži 79 zadataka. Zadatak 64 iz Rhindova papirusa glasi: *Rečeno ti je: razdijeli 10 heqata ječma desetorici ljudi tako da između svakog čovjeka i njegova susjeda razlika u količini ječma koji dobiju bude $\frac{1}{8}$ heqata.* Koliko ječma je dobila osma osoba?

Rješenje 049

U zadatku je riječ o aritmetičkom nizu. Zadana je suma deset članova aritmetičkog niza i diferencija (razlika):

$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \;\; \textit{deset ljudi} \\ s_{10} = 10 \;\; \text{ukupno heqata ječma} \\ d = \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_n = \dfrac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d\right] \\ s_{10} = \dfrac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot \frac{1}{8}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + \frac{9}{8} \right] /:5 \Rightarrow 2 = 2 \cdot a_1 + \frac{9}{8} / \cdot 8 \Rightarrow 16 = 16 \cdot a_1 + 9 \Rightarrow 16 \cdot a_1 = 16 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a_1 = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{16}.$$

Osma osoba je dobila:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{7}{16} \\ d = \frac{1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_8 = a_1 + 7 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow a_8 = \frac{7}{16} + 7 \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow a_8 = \frac{7}{16} + \frac{7}{8} \Rightarrow a_8 = \frac{7+14}{16} \Rightarrow a_8 = \frac{21}{16}.$$

Vježba 049

Rhindov papirus važan je povijesni dokument o matematičkim znanjima starih Egipćana. Sadrži 79 zadataka. Zadatak 64 iz Rhindova papirusa glasi: *Rečeno ti je: razdijeli 10 heqata ječma desetorici ljudi tako da između svakog čovjeka i njegova susjeda razlika u količini ječma koji dobiju bude $\frac{1}{8}$ heqata.* Koliko ječma je dobila peta osoba?

Rezultat: $\frac{15}{16}$.

Zadatak 050 (Alex, gimnazija)

Koliko ima dvoznamenkastih brojeva koji kod diobe s 3 daju ostatak 1, a kod diobe sa 4 ostatak 2?

Rješenje 050

Niz dvoznamenkastih brojeva koji kod diobe s 3 daju ostatak 1 glasi:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, … , 94.

Niz dvoznamenkastih brojeva koji kod diobe sa 4 daju ostatak 2 glasi:

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, … , 94.

Tada niz dvoznamenkastih brojeva koji kod diobe s 3 daju ostatak 1, a kod diobe sa 4 daju ostatak 2 glasi:

10, 22, 34, 46, 58, … , 94.

Dobili smo aritmetički niz:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 10 \ , \ d = 12 \ , \ a_n = 94 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow 94 = 10 + (n-1) \cdot 12 \Rightarrow 94 - 10 = 12 \cdot (n-1) \Rightarrow 84 = 12 \cdot (n-1) /:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = n - 1 \Rightarrow n = 8.$$

Vježba 050

Koliko ima dvoznamenkastih brojeva koji kod diobe s 2 daju ostatak 1, a kod diobe s 3 ostatak 2?

Rezultat: n = 15.

Zadatak 051 (4B, TUPŠ)

U aritmetičkom nizu 5, 9, 13, … zbroj tri uzastopna člana iznosi 147. Koji su to članovi?

Rješenje 051

1.inačica

Iz zadanog aritmetičkog niza (slijeda) odredimo prvi član niza i razliku (diferenciju):

$$5, 9, 13, \ldots \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 4 \end{array} \right\}.$$

Budući da je zbroj tri uzastopna člana aritmetičkog niza jednak 147, slijedi:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 147 \Rightarrow a_1 + (n-1)\cdot d + a_1 + n\cdot d + a_1 + (n+1)\cdot d = 147 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + n\cdot d - d + a_1 + n\cdot d + a_1 + n\cdot d + d = 147 \Rightarrow 3\cdot a_1 + 3\cdot n\cdot d = 147 \;/:3 \Rightarrow a_1 + n\cdot d = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + 4\cdot n = 49 \Rightarrow 4\cdot n = 49 - 5 \Rightarrow 4\cdot n = 44 \;/:4 \Rightarrow n = 11.$$

Članovi niza glase:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = a_1 + 10\cdot d \\ a_{12} = a_1 + 11\cdot d \\ a_{13} = a_1 + 12\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11} = 5 + 10\cdot 4 \\ a_{12} = 5 + 11\cdot 4 \\ a_{13} = 5 + 12\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11} = 45 \\ a_{12} = 49 \\ a_{13} = 53 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Iz zadanog aritmetičkog niza (slijeda) odredimo prvi član niza i razliku (diferenciju):

$$5,\ 9,\ 13,\ \ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 4 \end{array}\right\}.$$

Budući da je zbroj tri uzastopna člana aritmetičkog niza jednak 147, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_n - d \\ a_n = a_n \\ a_{n+1} = a_n + d \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 147 \Rightarrow a_n - d + a_n + a_n + d = 147 \Rightarrow 3\cdot a_n = 147 \;/:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 49 \Rightarrow a_1 + (n-1)\cdot d = 49 \Rightarrow 5 + (n-1)\cdot 4 = 49 \Rightarrow 5 + 4\cdot n - 4 = 49 \Rightarrow 4\cdot n = 48 \;/:4 \Rightarrow n = 12.$$

Članovi niza glase:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = a_{12} - d \\ a_{12} = a_{12} \\ a_{13} = a_{12} + d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11} = 49 - 4 \\ a_{12} = 49 \\ a_{13} = 49 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11} = 45 \\ a_{12} = 49 \\ a_{13} = 53 \end{array}\right\}.$$

Vježba 051

U aritmetičkom nizu 5, 9, 13, ... zbroj tri uzastopna člana iznosi 111. Koji su to članovi?

Rezultat: 33, 37, 41.

Zadatak 052 (4B, TUPŠ)

Dva tijela međusobno udaljena 153 m, kreću se jedno prema drugom. Prvo tijelo kreće se konstantnom brzinom 10 m/s, a drugo tijelo u prvoj sekundi prevali 3 m, a svake sljedeće sekunde 5 m više nego u prethodnoj sekundi. Za koliko će se sekundi tijela sresti?

Rješenje 052

Neka je t broj sekundi za koje će se tijela sresti.
Prvo tijelo prevalilo je put:

$$s = 10\cdot t.$$

Put drugog tijela jednak je zbroju aritmetičkog niza kojemu su zadani prvi član i razlika:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3\ ,\ d = 5 \\ s_t = \frac{t}{2}\cdot\left[2\cdot a_1 + (t-1)\cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_t = \frac{t}{2}\cdot\left[2\cdot 3 + (t-1)\cdot 5\right] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2}\cdot[6 + 5\cdot t - 5] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2}\cdot[5\cdot t + 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_t = \frac{5}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{2}\cdot t.$$

Računamo vrijeme susreta:

$$s + s_t = 153 \Rightarrow 10\cdot t + \frac{5}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{2}\cdot t = 153 \;/\cdot 2 \Rightarrow 20\cdot t + 5\cdot t^2 + t = 306 \Rightarrow 5\cdot t^2 + 21\cdot t - 306 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=5 \ , \ b=21 \ , \ c=-306 \\ t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-21\pm\sqrt{441-4\cdot 5\cdot(-306)}}{2\cdot 5} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-21\pm\sqrt{441+6120}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-21\pm\sqrt{6561}}{10} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-21\pm 81}{10} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{-21+81}{10} \\ t_2=\frac{-21-81}{10} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{60}{10} \\ t_2=\frac{-102}{10} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=6\ s \ \text{rješenje} \\ t_2=-10.2 \ \text{nema smisla} \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 052

Dva tijela međusobno udaljena 115 m, kreću se jedno prema drugom. Prvo tijelo kreće se konstantnom brzinom 10 m/s, a drugo tijelo u prvoj sekundi prevali 3 m, a svake sljedeće sekunde 5 m više nego u prethodnoj sekundi. Za koliko će se sekundi tijela sresti?

Rezultat: 5 s.

Zadatak 053 (4B, TUPŠ)

U aritmetičkom nizu od 11 članova srednji je 7, a umnožak drugog i predzadnjeg je – 95. Koji je to niz?

Rješenje 053

Važno je uočiti:

- ako je zadan niz od 7 članova, srednji član je četvrti po redu
- ako je zadan niz od 9 članova, srednji član je peti po redu
- ako je zadan niz od 13 članova, srednji član je sedmi po redu
- ako je zadan niz od 19 članova, srednji član je deseti po redu
- ako je zadan niz od 25 članova, srednji član je trinaesti po redu
- ako je zadan niz od 37 članova, srednji član je devetnaesti po redu, itd.

U zadatku je zadan aritmetički niz od 11 članova pa je srednji član a_6. Dalje računamo:

$$\left.\begin{matrix} a_6=7 \\ a_2\cdot a_{10}=-95 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1+5\cdot d=7 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+9\cdot d)=-95 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=7-5\cdot d \\ (a_1+d)\cdot(a_1+9\cdot d)=-95 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7-5\cdot d+d)\cdot(7-5\cdot d+9\cdot d)=-95 \Rightarrow (7-4\cdot d)\cdot(7+4\cdot d)=-95 \Rightarrow 49-16\cdot d^2=-95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16\cdot d^2=-95-49 \Rightarrow -16\cdot d^2=-144 \ /:(-16) \Rightarrow d^2=9 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \left.\begin{matrix} d_1=3 \\ d_2=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=7-5\cdot d \ , \ d=3 \\ a_1=7-5\cdot d \ , \ d=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=7-5\cdot 3 \ , \ d=3 \\ a_1=7-5\cdot(-3) \ , \ d=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=7-15 \ , \ d=3 \\ a_1=7+15 \ , \ d=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=-8 \ , \ d=3 \\ a_1=22 \ , \ d=-3 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 053

U aritmetičkom nizu od 11 članova srednji je 7, a umnožak prvog i zadnjeg je – 176. Koji je to niz?

Rezultat: $a_1=-8$ i $d=3$, $a_1=22$ i $d=-3$.

Zadatak 054 (4B, TUPŠ)

Frekvencije tonova na glasoviru mjerimo u Hz i oni tvore geometrijski niz. Ton A ima frekvenciju 400 Hz, a ton A', koji je 12 nota viši, 800 Hz. Koliko Hz ima ton C koji je 3 note viši od tona A?

Rješenje 054

Budući da je riječ o geometrijskom nizu najprije odredimo kvocijent q niza:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 400 \\ a_{12} = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{12} = a_1 \cdot q^{11} \Rightarrow q^{11} = \frac{a_{12}}{a_1} \Rightarrow q^{11} = \frac{800}{400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^{11} = 2 \;/\sqrt[11]{\ } \Rightarrow q = \sqrt[11]{2}.$$

Ton C koji je 3 note viši od tona A iznosi:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow a_3 = 400 \cdot \left(\sqrt[11]{2}\right)^2 \Rightarrow a_3 = 400 \cdot \sqrt[11]{4}.$$

Vježba 054

Frekvencije tonova na glasoviru mjerimo u Hz i oni tvore geometrijski niz. Ton A ima frekvenciju 400 Hz, a ton A', koji je 12 nota viši, 800 Hz. Koliko Hz ima ton koji je 4 note viši od tona A?

Rezultat: $400 \cdot \sqrt[11]{8}.$

Zadatak 055 (4B, TUPŠ)

Između dva zadana broja a i b umetnuti (interpolirati) aritmetički niz od r brojeva znači odrediti r brojeva koji zajedno s brojevima a i b čine aritmetički niz, kojem je a prvi, a b posljednji član. Dokaži da je diferencija d tako dobivenog aritmetičkog niza od r + 2 člana jednaka $d = \frac{b-a}{r+1}.$

Rješenje 055

Budući da je a prvi član, b posljednji član aritmetičkog niza koji ima r + 2 člana, diferencija d iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \;,\; a_n = b \;,\; n = r+2 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow b = a + (r+2-1) \cdot d \Rightarrow b = a + (r+1) \cdot d \Rightarrow (r+1) \cdot d = b - a \Rightarrow d = \frac{b-a}{r+1}.$$

Vježba 055

Između brojeva 2 i 23 umetnite 6 brojeva tako da svi čine aritmetički niz.

Rezultat: d = 3 , 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23.

Zadatak 056 (4B, TUPŠ)

Između dva zadana broja a i b umetnuti (interpolirati) geometrijski niz od r brojeva znači odrediti r brojeva koji zajedno s brojevima a i b čine geometrijski niz, kojem je a prvi, a b posljednji član. Dokaži da je kvocijent q tako dobivenog geometrijskog niza od r + 2 člana jednak $q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$

Diskusija!?

Rješenje 056

Budući da je a prvi član, b posljednji član geometrijskog niza koji ima r + 2 člana, kvocijent q iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \;,\; a_n = b \;,\; n = r+2 \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow b = a \cdot q^{r+2-1} \Rightarrow b = a \cdot q^{r+1} \Rightarrow q^{r+1} = \frac{b}{a} \;/\sqrt[r+1]{\ } \Rightarrow q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Za paran broj r i a $\neq$ 0 je $q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$ Za neparan broj r i a $\neq$ 0 mora biti $\frac{b}{a} > 0.$

Vježba 056

Između brojeva – 1 i 10 umetnite 3 broja tako da svi čine geometrijski niz.

Rezultat: r = 3 (neparan broj) , $\frac{b}{a} < 0$ što ne udovoljava uvjetu $\frac{b}{a} > 0.$ Interpolacija nije moguća.

Zadatak 057 (Mala, srednja škola)

Odredite sumu prvih 19 članova aritmetičkog niza ako je $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$

Rješenje 057

Ponovimo!

Opći član aritmetičkog niza: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza: $s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224 \Rightarrow a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 7 \cdot d + a_1 + 11 \cdot d + a_1 + 15 \cdot d = 224 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot a_1 + 36 \cdot d = 224 \; /:4 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = 56.$$

Suma prvih 19 članova aritmetičkog niza iznosi:

$$s_{19} = \frac{19}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 18 \cdot d \right] = \frac{19}{2} \cdot 2 \cdot \left[a_1 + 9 \cdot d \right] = 19 \cdot \left[a_1 + 9 \cdot d \right] = 19 \cdot 56 = 1064.$$

Vježba 057

Odredite sumu prvih 19 članova aritmetičkog niza ako je $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 64.$

Rezultat: 304.

Zadatak 058 (Jan, gimnazija)

U aritmetičkom nizu sastavljenom od četiri različita člana a_1, a_2, a_3, a_4 prvi član je $a_1 = 1$. Izostavimo li drugi član niza, preostala tri člana a_1, a_3, a_4 tvore geometrijski niz. Koliki je zbroj svih članova aritmetičkog niza?

Rješenje 058

Ponovimo!

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad , \quad x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ili } y = 0 \text{ ili } x = y = 0.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Svaki član geometrijskog niza (osim prvog) jednak je geometrijskoj sredini susjednih članova (prethodnika i sljedbenika).

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Neka je d diferencija aritmetičkog niza. Budući da je prvi član jednak 1, slijedi:

$$1, 1+d, 1+2 \cdot d, 1+3 \cdot d.$$

Ako izbacimo drugi član:

$$1, 1+d, 1+2 \cdot d, 1+3 \cdot d \Rightarrow 1, 1+2 \cdot d, 1+3 \cdot d,$$

preostala tri člana čine geometrijski niz. Zato je:

$$(1+2 \cdot d)^2 = 1 \cdot (1+3 \cdot d) \Rightarrow 1 + 4 \cdot d + 4 \cdot d^2 = 1 + 3 \cdot d \Rightarrow 4 \cdot d + 4 \cdot d^2 = 3 \cdot d \Rightarrow 4 \cdot d^2 + 4 \cdot d - 3 \cdot d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot d^2 + d = 0 \Rightarrow d \cdot (4 \cdot d + 1) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = 0 \\ 4 \cdot d + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_1 = 0 \text{ nema smisla} \\ d_2 = -\frac{1}{4} \end{array} \right\}.$$

Članovi aritmetičkog niza glase:

$$\left. \begin{array}{l} 1, 1+d, 1+2 \cdot d, 1+3 \cdot d \\ d = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$$

Zbroj svih članova aritmetičkog niza je:

$$1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4+3+2+1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5.$$

Vježba 058

U aritmetičkom nizu sastavljenom od četiri različita člana a_1, a_2, a_3, a_4 četvrti član je $a_4=\frac{1}{4}$. Izostavimo li drugi član niza, preostala tri člana a_1, a_3, a_4 tvore geometrijski niz. Koliki je zbroj svih članova aritmetičkog niza?

Rezultat: 2.5.

Zadatak 059 (Dolores, maturantica kemijske škole)

U geometrijskom redu od 20 članova zbroj prvih 10 članova reda 10 puta je manji od zbroja preostalih 10 članova. Koliki je kvocijent tog geometrijskog reda?

Rješenje 059

Ponovimo!

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Zbroj prvih 10 članova geometrijskog reda je:

$$s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ ...\ +a_{10}\ \Rightarrow\ s=a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+a_1\cdot q^4+\ ...\ +a_1\cdot q^9.$$

Zbroj preostalih 10 članova geometrijskog reda iznosi:

$$s_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+\ ...\ +a_{20}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s_1=a_1\cdot q^{10}+a_1\cdot q^{11}+a_1\cdot q^{12}+a_1\cdot q^{13}+a_1\cdot q^{14}+\ ...\ +a_1\cdot q^{19}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s_1=q^{10}\cdot\left(a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+a_1\cdot q^4+\ ...\ +a_1\cdot q^9\right)\ \Rightarrow\ s_1=q^{10}\cdot s.$$

Budući da je zbroj prvih 10 članova reda 10 puta manji od zbroja preostalih 10 članova reda, slijedi:

$$s=\frac{1}{10}\cdot s_1\ \Rightarrow\ s=\frac{1}{10}\cdot q^{10}\cdot s\ /\cdot\frac{10}{s}\ \Rightarrow\ q^{10}=10\ /\sqrt[10]{\ }\ \Rightarrow\ q=\sqrt[10]{10}.$$

Vježba 059

U geometrijskom redu od 20 članova zbroj prvih 10 članova reda 4 puta je manji od zbroja preostalih 10 članova. Koliki je kvocijent tog geometrijskog reda?

Rezultat: $\sqrt[10]{4}=\sqrt[5]{2}.$

Zadatak 060 (Martin, maturant)

Zbroj šest uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 1275. Je li najmanji od njih djeljiv brojem 10?

Rješenje 060

Ponovimo!

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right].$$

Broj je djeljiv s 10 ako mu je zadnja znamenka 0.

$$\left.\begin{array}{l} n=6\ ,\ s_6=1275\ ,\ d=1 \\ s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right]\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ s_6=\frac{6}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(6-1)\cdot d\right]\ \Rightarrow\ s_6=3\cdot\left[2\cdot a_1+5\cdot d\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1275=3\cdot\left[2\cdot a_1+5\cdot 1\right]\ \Rightarrow\ 1275=3\cdot\left[2\cdot a_1+5\right]\ /:3\ \Rightarrow\ 425=2\cdot a_1+5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 2 \cdot a_1 = 425 - 5 \; \Rightarrow \; 2 \cdot a_1 = 420 \; / : 2 \; \Rightarrow \; a_1 = 210.$$

Broj 210 je djeljiv brojem 10.

Vježba 060

Zbroj šest uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 87. Je li najmanji od njih djeljiv brojem 6?

Rezultat: Da.