Zadatak 121 (Sara, gimnazija)

Za koje su realne vrijednosti broja x brojevi $\log 2, \log\left(2^x-1\right), \log\left(2^x+3\right)$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza (slijeda).

Rješenje 121

Ponovimo!

$$\log_{10} a = \log a \quad , \quad \log a^n = n\cdot\log a \quad , \quad \log(a\cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2\cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Brojevi

$$\log 2, \log\left(2^x-1\right), \log\left(2^x+3\right)$$

tri su uzastopna člana aritmetičkog niza (slijeda) pa vrijedi:

$$\log\left(2^x-1\right) = \frac{\log 2 + \log\left(2^x+3\right)}{2} \Rightarrow \log\left(2^x-1\right) = \frac{\log 2 + \log\left(2^x+3\right)}{2} \ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\log\left(2^x-1\right) = \log 2 + \log\left(2^x+3\right) \Rightarrow \log\left(2^x-1\right)^2 = \log 2\cdot\left(2^x+3\right) \Rightarrow \left(2^x-1\right)^2 = 2\cdot\left(2^x+3\right).$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$t = 2^x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(2^x-1\right)^2 = 2\cdot\left(2^x+3\right) \\ t = 2^x \end{array}\right\} \Rightarrow (t-1)^2 = 2\cdot(t+3) \Rightarrow t^2 - 2\cdot t + 1 = 2\cdot t + 6 \Rightarrow t^2 - 2\cdot t + 1 - 2\cdot t - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4\cdot t - 5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 - 4\cdot t - 5 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -5 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{4+6}{2} \\ t_2 = \dfrac{4-6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{10}{2} \\ t_2 = -\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 5 \\ t_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni (supstituciji).

- $$\left.\begin{array}{l} 2^x = t \\ t = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow 2^x = 5 \;/\log \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 \;/ \cdot \frac{1}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow x = \log_2 5.$$

- $$\left.\begin{array}{l} 2^x = t \\ t = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^x = -1 \Rightarrow \text{nema rješenja}.$$

Vježba 121

Za koje su realne vrijednosti broja x brojevi $\log\left(2^x + 3\right)$, $\log\left(2^x - 1\right)$, $\log 2$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza (slijeda).

Rezultat: $x = \log_2 5.$

Zadatak 122 (Vlado, srednja škola)

Razdijeli 280 bombona desetorici učenika tako da svaki idući dobije 2 bombona više. Koliko će dobiti prvi učenik?

Rješenje 122

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d\right].$$

Budući da svaki idući dobije 2 bombona više od predhodnog učenika, riječ je o aritmetičkom nizu (slijedu) čija je razlika 2. Uvrstimo poznate vrijednosti u formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza.

$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \;,\; d = 2 \;,\; s_n = 280 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow 280 = \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (10 - 1) \cdot 2\right] \Rightarrow 280 = 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot 2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 280 = 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 18\right] \Rightarrow 280 = 10 \cdot a_1 + 90 \Rightarrow 10 \cdot a_1 + 90 = 280 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot a_1 = 280 - 90 \Rightarrow 10 \cdot a_1 = 190 \Rightarrow 10 \cdot a_1 = 190 \;/ : 10 \Rightarrow a_1 = 19.$$

Vježba 122

Razdijeli 140 bombona desetorici učenika tako da svaki idući dobije 2 bombona više. Koliko će dobiti prvi učenik?

Rezultat: 5.

Zadatak 123 (Marko, trgovačka škola)

Zadan je niz 3, 7, 11, ... Odredite a_{31} i s_{18}.

Rješenje 123

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zadani niz je aritmetički niz.

$$a_1 = 3 \ , \ d = 7 - 3 = 11 - 7 = 4.$$

Računamo član a_{31} i zbroj s_{18}.

- $$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_1 = 3 \ , \ d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{31} = 3 + (31-1) \cdot 4 \Rightarrow a_{31} = 3 + 30 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{31} = 3 + 120 \Rightarrow a_{31} = 123.$$

- $$\left. \begin{array}{l} s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \\ a_1 = 3 \ , \ d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow s_{18} = \frac{18}{2} \cdot \left[2 \cdot 3 + (18-1) \cdot 4 \right] \Rightarrow s_{18} = 9 \cdot [6 + 17 \cdot 4] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{18} = 9 \cdot [6 + 68] \Rightarrow s_{18} = 9 \cdot 74 \Rightarrow s_{18} = 666.$$

Vježba 123

Zadan je niz 3, 7, 11, ... Odredite a_{21}.

Rezultat: 83.

Zadatak 124 (Marko, trgovačka škola)

Napiši prva tri člana geometrijskog niza ako je $a_2 = 3$ i $a_5 = 81$.

Rješenje 124

Ponovimo!

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \ge 1.$$

Budući da je niz geometrijski, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} a_2 = 3 \\ a_5 = 81 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot q = 3 \\ a_1 \cdot q^4 = 81 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = \frac{81}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot q^4}{\cancel{a_1} \cdot q} = \frac{81}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q^3 = 27 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow q = \sqrt[3]{27} \Rightarrow q = \sqrt[3]{3^3} \Rightarrow q = 3.$$

Računamo prvi član a_1 geometrijskog niza.

$$\left.\begin{matrix} a_2 = 3 \\ q = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot q = 3 \\ q = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow 3 \cdot a_1 = 3 \;/:3 \Rightarrow a_1 = 1.$$

Prva tri člana geometrijskog niza glase:

1, 3, 9, ...

Vježba 124

Napiši prva tri člana geometrijskog niza ako je $a_2 = 2$ i $a_5 = 16$.

Rezultat: 1, 2, 4, ...

Zadatak 125 (Maturantice, ekonomska škola)

Zadan je opći član aritmetičkog niza $a_n = 2 \cdot (n + p) - 4, \; p \in R.$

a) Zapišite prvi član toga niza.
b) Izračunajte vrijednost realnog broja p ako je zbroj prvih pet članova toga niza jednak 60.

Rješenje 125

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right].$$

a)

$$\left.\begin{matrix} a_n = 2 \cdot (n + p) - 4 \\ n = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1 = 2 \cdot (1 + p) - 4 \Rightarrow a_1 = 2 + 2 \cdot p - 4 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot p - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \cdot (p - 1).$$

b)

$$\left.\begin{matrix} s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \\ n = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow s_5 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_5) \Rightarrow \left[\begin{matrix} a_1 = 2 \cdot (1 + p) - 4 \\ a_5 = 2 \cdot (5 + p) - 4 \\ s_5 = 60 \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 = \frac{5}{2} \cdot (2 \cdot (1 + p) - 4 + 2 \cdot (5 + p) - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 60=\frac{5}{2}\cdot(2+2\cdot p-4+10+2\cdot p-4)\ \Rightarrow\ 60=\frac{5}{2}\cdot(4\cdot p+4)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 60=\frac{5}{2}\cdot 4\cdot(p+1)\ \Rightarrow\ 60=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot(p+1)\ \Rightarrow\ 60=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot(p+1)\ \Rightarrow\ 60=\frac{5}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot(p+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 60=10\cdot(p+1)\ \Rightarrow\ 10\cdot(p+1)=60\ \Rightarrow\ 10\cdot(p+1)=60\ /:10\ \Rightarrow\ p+1=6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p=6-1\ \Rightarrow\ p=5.$$

Vježba 125

Zadan je opći član aritmetičkog niza $a_n=2\cdot(n+p)-4,\ p\in R.$ Zapišite drugi član toga niza.

Rezultat: $a_2=2\cdot p.$

Zadatak 126 (Matija, gimnazija)

Pri penjanju na neku planinu izmjereno je da na svakih 100 metara visine temperatura zraka pada za 0.7 °C. Na vrhu planine temperatura je iznosila 14.8 °C. Istodobno je bila 26 °C pri tlu na 0 metara nadmorske visine. Kolika je visina planine?

$A.\ 1500\ m$ $\quad B.\ 1600\ m$ $\quad C.\ 1700\ m$ $\quad D.\ 18500\ m$

Rješenje 126

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Uočimo da je u zadatku zadan aritmetički niz za koji je

$$\left.\begin{array}{l} d=-0.7\ (\text{minus jer temperatura pada}) \\ a_n=14.8\ (\text{temperatura na vrhu planine}) \\ a_1=26\ (\text{temperatura na tlu}) \end{array}\right\}.$$

Računamo n broj članova zadanog niza.

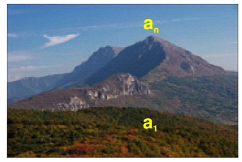
$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\ \Rightarrow\ a_1+(n-1)\cdot d=a_n\ \Rightarrow\ (n-1)\cdot d=a_n-a_1\ \Rightarrow\ (n-1)\cdot d=a_n-a_1\ /\cdot\frac{1}{d}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n-1=\frac{a_n-a_1}{d}\ \Rightarrow\ n=\frac{a_n-a_1}{d}+1\ \Rightarrow\ n=\frac{14.8-26}{-0.7}+1\ \Rightarrow\ n=17.$$

Budući da je početna temperatura a_1 izmjerena na 0 metara nadmorske visine, a konačna temperatura je a_{17}, visina planine iznosi:

$$(17-1)\cdot 100\ m=16\cdot 100\ m=1600\ m.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 126

Pri penjanju na neku planinu izmjereno je da na svakih 100 metara visine temperatura zraka pada za 1.4 °C. Na vrhu planine temperatura je iznosila 29.6 °C. Istodobno je bila 52 °C pri tlu na 0 metara nadmorske visine. Kolika je visina planine?

$$A.\ 1500\ m \qquad B.\ 1600\ m \qquad C.\ 1700\ m \qquad D.\ 18500\ m$$

Rezultat: B.

Zadatak 127 (Nevzat, srednja škola)

$$1+2011+2011^2+2011^3+2011^4+2011^5+2011^6+\ldots+2011^{2011}=\frac{x-1}{2010},\ x=?$$

Rješenje 127

Ponovimo!

$$a^0=1 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\ ,\ q\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$1+2011+2011^2+2011^3+2011^4+2011^5+2011^6+\ldots+2011^{2011}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2011^0+2011^1+2011^2+2011^3+2011^4+2011^5+2011^6+\ldots+2011^{2011}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{na lijevoj je strani } 2012\\ \text{članova geometrijskog niza}\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a_1=2011^0=1\\ q=2011\\ n=12\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2011^0\cdot\frac{2011^{2012}-1}{2011-1}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow 1\cdot\frac{2011^{2012}-1}{2011-1}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow \frac{2011^{2012}-1}{2011-1}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2011^{2012}-1}{2010}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow \frac{2011^{2012}-1}{2010}=\frac{x-1}{2010}\ /\cdot 2010 \Rightarrow 2011^{2012}-1=x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1=2011^{2012}-1 \Rightarrow x=2011^{2012}.$$

2.inačica

$$1+2011+2011^2+2011^3+2011^4+2011^5+2011^6+\ldots+2011^{2011}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\left(2011+2011^2+2011^3+2011^4+2011^5+2011^6+\ldots+2011^{2011}\right)=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{u zagradi je } 2011 \\ \text{članova geometrijskog niza}\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a_1=2011 \\ q=2011 \\ n=11\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\ 2011\cdot\frac{2011^{2011}-1}{2011-1}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow 1+2011\cdot\frac{2011^{2011}-1}{2010}=\frac{x-1}{2010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2011\cdot\frac{2011^{2011}-1}{2010}=\frac{x-1}{2010}\ /\cdot 2010 \Rightarrow 2010+2011\cdot\left(2011^{2011}-1\right)=x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2010+2011\cdot 2011^{2011}-2011=x-1 \Rightarrow 2011\cdot 2011^{2011}-1=x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2011\cdot 2011^{2011}-1=x-1 \Rightarrow 2011\cdot 2011^{2011}=x \Rightarrow x=2011\cdot 2011^{2011} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2011^1\cdot 2011^{2011} \Rightarrow x=2011^{2012}.$$

Vježba 127

$$2011+2011^2+2011^3+2011^4+2011^5+2011^6+\ldots+2011^{2011}=\frac{x-1}{2010},\ x=?$$

Rezultat: $x=2011\cdot\left(2011^{2011}-1\right).$

Zadatak 128 (Ivana, srednja škola)

U geometrijskom nizu s pozitivnim članovima prvi je član jednak zbroju drugoga i trećega. Koliki je količnik toga niza?

Rješenje 128

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q $\neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Budući da je prvi član geometrijskog niza jednak zbroju drugog i trećeg, vrijedi jednadžba:

$$a_1=a_2+a_3 \Rightarrow a_3+a_2=a_1 \Rightarrow a_3+a_2-a_1=0 \Rightarrow a_1\cdot q^2+a_1\cdot q-a_1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot \left(q^2 + q - 1\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \text{ nema smisla} \\ q^2 + q - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q^2 + q - 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q^2 + q - 1 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -1 \\ q_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ q_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet da članovi} \\ \text{budu pozitivni} \end{array}\right] \Rightarrow q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vježba 128

U geometrijskom nizu s pozitivnim članovima prvi je član jednak četvrtini trećega. Koliki je količnik toga niza?

Rezultat: 2.

Zadatak 129 (Milena, gimnazija)

Na šahovsku ploču dimenzije 8x8 polja stavimo zrna riže. Na prvo polje stavimo tri zrna, na drugo dva zrna više nego na prvo, na treće dva zrna više nego na drugo i tako redom. Koliko smo ukupno stavili zrna riže na šahovsku ploču?

Rješenje 129

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \dots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

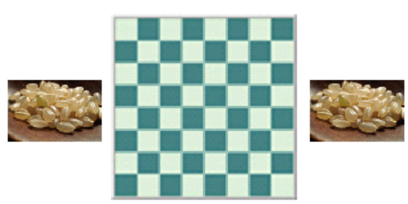
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

Budući da na prvo polje šahovske ploče stavimo tri zrna riže, a na svako sljedeće dva zrna više riječ je o aritmetičkom nizu čiji je prvi član $a_1 = 3$, a razlika $d = 2$. Šahovska ploča ima 64 polja pa je broj članova $n = 64$. Ukupan broj zrna riže na šahovskoj ploči jednak je sumi prvih 64 članova aritmetičkog niza.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \;,\; d = 2 \;,\; n = 64 \\ s_n = \dfrac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{64} = \frac{64}{2} \cdot \left[2 \cdot 3 + (64-1) \cdot 2\right] \Rightarrow s_{64} = 32 \cdot [2 \cdot 3 + 63 \cdot 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{64} = 32 \cdot [6 + 126] \Rightarrow s_{64} = 32 \cdot 132 \Rightarrow s_{64} = 4\,224.$$



Vježba 129

Na šahovsku ploču dimenzije 8x8 polja stavimo zrna riže. Na prvo polje stavimo tri zrna, na drugo pet zrna više nego na prvo, na treće pet zrna više nego na drugo i tako redom. Koliko smo ukupno stavili zrna riže na šahovsku ploču?

Rezultat: 10272.

Zadatak 130 (MKN, gimnazija)

Prvi član geometrijskog niza je 16. Za treći i četvrti član tog niza vrijedi $a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3$.

Izračunajte sedmi član niza.

Rješenje 130

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Ili ovako: Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana (osim prvog) i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \ , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Najprije izračunamo količnik q geometrijskog niza.

$$a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3 \Rightarrow a_1 \cdot q^3 = \frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot q^2 \Rightarrow a_1 \cdot q^3 = \frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot q^2 \ / : a_1 \ \left(\text{jer je } a_1 \neq 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{3}{2} \cdot q^2 \Rightarrow q^3 - \frac{3}{2} \cdot q^2 = 0 \Rightarrow q^2 \cdot \left(q - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q^2 = 0 \\ q - \frac{3}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q^2 = 0 \ / \sqrt{\ } \\ q - \frac{3}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_{1,2} = 0 \text{ nema smisla} \\ q_3 = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{3}{2}.$$

Tada sedmi član iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 16 \ , \ q = \frac{3}{2} \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_7 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 \Rightarrow a_7 = 16 \cdot \frac{3^6}{2^6} \Rightarrow a_7 = 16 \cdot \frac{729}{64} \Rightarrow a_7 = 16 \cdot \frac{729}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_7 = \frac{729}{4} \Rightarrow a_7 = 182.25.$$

Vježba 130

Prvi član geometrijskog niza je 16. Za treći i četvrti član tog niza vrijedi $a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3$.

Izračunajte peti član niza.

Rezultat: 81.

Zadatak 131 (Dino, gimnazija)

Opći član niza je $a_n = 24.2 - 0.6 \cdot n$. Koliki je zbroj svih pozitivnih članova niza?

Rješenje 131

Ponovimo!

$$a > b \;,\; c < 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \;\Rightarrow\; 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Tražimo broj svih pozitivnih članova niza.

$$a_n > 0 \;\Rightarrow\; 24.2 - 0.6 \cdot n > 0 \;\Rightarrow\; -0.6 \cdot n > -24.2 \;\Rightarrow\; -0.6 \cdot n > -24.2 \;/:(-0.6) \;\Rightarrow\; n < 40.33.$$

Pozitivnih članova niza ima četrdeset, n = 40.

Provjerimo je li to aritmetički niz!

$$2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \;\Rightarrow\; 2 \cdot (24.2 - 0.6 \cdot n) = 24.2 - 0.6 \cdot (n-1) + 24.2 - 0.6 \cdot (n+1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 48.4 - 1.2 \cdot n = 24.2 - 0.6 \cdot n + 0.6 + 24.2 - 0.6 \cdot n - 0.6 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 48.4 - 1.2 \cdot n = 24.2 - 0.6 \cdot n + 0.6 + 24.2 - 0.6 \cdot n - 0.6 \;\Rightarrow\; 48.4 - 1.2 \cdot n = 24.2 - 0.6 \cdot n + 24.2 - 0.6 \cdot n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 48.4 - 1.2 \cdot n = 48.4 - 1.2 \cdot n.$$

To je aritmetički niz.

Sada je

$$\left. \begin{array}{l} n = 1 \;,\; a_1 = 24.2 - 0.6 \cdot 1 \\ n = 40 \;,\; a_{40} = 24.2 - 0.6 \cdot 40 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \left. \begin{array}{l} a_1 = 23.6 \\ a_{40} = 0.2 \end{array} \right\}$$

pa zbroj svih pozitivnih članova niza iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} n = 40 \;,\; a_1 = 23.6 \;,\; a_{40} = 0.2 \\ s_{40} = \frac{40}{2} \cdot \left[a_1 + a_{40} \right] \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; s_{40} = \frac{40}{2} \cdot [23.6 + 0.2] \;\Rightarrow\; s_{40} = \frac{40}{2} \cdot [23.6 + 0.2] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; s_{40} = 20 \cdot 23.8 \;\Rightarrow\; s_{40} = 476.$$

Vježba 131

Opći član niza je $a_n = 24.2 - 0.6 \cdot n.$ Kolika je razlika $a_5 - a_{10}$?

Rezultat: 3.

Zadatak 132 (Anamaria, srednja škola)

Prizemlje zgrade visoko je 4 metra, a svaki kat iznad prizemlja 3 metra. Zgrada ukupno ima 12 katova uključivši i prizemlje. Koliko je zgrada visoka?

Rješenje 132

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Uočimo da je riječ o aritmetičkom nizu koji ima prvi član $a_1 = 4$, a razliku $d = 3$. Tražena visina zgrade (računamo na kojoj se visini nalazi 12. kat) jednaka je:

$$\left.\begin{array}{l} n = 12 \ , \ a_1 = 4 \ , \ d = 3 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_{12} = 4 + (12-1) \cdot 3 \Rightarrow a_{12} = 4 + 11 \cdot 3 \Rightarrow a_{12} = 37.$$

Zgrada je visoka 37 metara.

Vježba 132

Prizemlje zgrade visoko je 4 metra, a svaki kat iznad prizemlja 3 metra. Zgrada ukupno ima 16 katova uključivši i prizemlje. Koliko je zgrada visoka?

Rezultat: 49 m.

Zadatak 133 (Matea, gimnazija)

Izračunajte zbroj prvih sto zajedničkih članova aritmetičkih nizova:
17, 21, 25, 29, 33, ... i 16, 21, 26, 31, 36, ...!

Rješenje 133

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji broj koji je djeljiv sa zadanim brojevima.
U zadanim nizovima

17, 21, 25, 29, 33, ... i 16, 21, 26, 31, 36, ...

prvi zajednički član je $a_1 = 21$.
Razlika prvog aritmetičkog niza je

$$d_1 = 21 - 17 = 25 - 21 = 29 - 25 = ... = 4,$$

a drugoga

$$d_2 = 21 - 16 = 26 - 21 = 31 - 26 = ... = 5$$

pa je razlika traženog aritmetičkog niza jednaka najmanjem zajedničkom višekratniku od d_1 i d_2.

$$d = d_1 \cdot d_2 \Rightarrow d = 4 \cdot 5 \Rightarrow d = 20.$$

Zbroj prvih sto zajedničkih članova zadanih aritmetičkih nizova iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n = 100 \ , \ a_1 = 21 \ , \ d = 20 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{100} = \frac{100}{2} \cdot \left[2 \cdot 21 + (100-1) \cdot 20\right] \Rightarrow s_{100} = 50 \cdot \left[42 + 99 \cdot 20\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{100} = 50 \cdot \left[42 + 1980\right] \Rightarrow s_{100} = 50 \cdot 2022 \Rightarrow s_{100} = 101100.$$

Vježba 133

Izračunajte zbroj prvih pedeset zajedničkih članova aritmetičkih nizova:
17, 21, 25, 29, 33, ... i 16, 21, 26, 31, 36, ...!

Rezultat: 25 550.

Zadatak 134 (XY, gimnazija)

Zadan je niz $(a + x)^2$, $a^2 + x^2$, $(a - x)^2$, ... Dokazati da je to aritmetički niz.

Rješenje 134

Ponovimo!

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad , \quad (x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ ... \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ ...$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Treba provjeriti razliku između dva susjedna člana niza.

$$\left.\begin{array}{l} d = a^2 + x^2 - (a + x)^2 \\ d = (a - x)^2 - \left(a^2 + x^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = a^2 + x^2 - \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2\right) \\ d = a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2 - a^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = a^2 + x^2 - a^2 - 2 \cdot a \cdot x - x^2 \\ d = a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2 - a^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = a^2 + x^2 - a^2 - 2 \cdot a \cdot x - x^2 \\ d = a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2 - a^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = -2 \cdot a \cdot x \\ d = -2 \cdot a \cdot x \end{array}\right\}.$$

Budući da je razlika jednaka niz je aritmetički.

Vježba 134

Zadan je niz $(a-x)^2$, a^2+x^2, $(a+x)^2$, ... Dokazati da je to aritmetički niz.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 135 (Maja, ekonomska škola)

Opći član aritmetičkog niza je $a_n = 81$, prvi član 4, a razlika 7. Potrebno je:

a) odrediti broj članova niza,
b) odrediti sumu prvih n članova.

Rješenje 135

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right].$$

a) Računamo n broj članova niza tako da u formulu za opći član niza uvrstimo zadane vrijednosti za a_n, a_1 i d.

$$\left.\begin{array}{l} a_n=81 \\ a_1=4 \\ d=7 \\ a_n=a_1+(n-1)\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\ 81=4+(n-1)\cdot 7\ \Rightarrow\ 81=4+7\cdot n-7\ \Rightarrow\ -7\cdot n=4-7-81\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -7\cdot n=-84\ \Rightarrow\ -7\cdot n=-84\ /:(-7)\ \Rightarrow\ n=12.$$

Niz ima 12 članova.

b) Računamo sumu prvih 12 članova niza tako da u formulu za sumu prvih n članova niza uvrstimo zadane vrijednosti za n, a_1 i d.

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a_1=4 \\ d=7 \\ s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right] \end{array}\right\}\Rightarrow\ s_{12}=\frac{12}{2}\cdot\left[2\cdot 4+(12-1)\cdot 7\right]\ \Rightarrow\ s_{12}=\frac{12}{2}\cdot[8+11\cdot 7]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s_{12}=6\cdot[8+77]\ \Rightarrow\ s_{12}=6\cdot 85\ \Rightarrow\ s_{12}=510.$$

Vježba 135

Opći član aritmetičkog niza je $a_n = 46$, prvi član 4, a razlika 7. Potrebno je odrediti broj članova niza.

Rezultat: n = 7.

Zadatak 136 (Maja, ekonomska škola)

Za koji x su brojevi $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x-4}$ uzastopni članovi geometrijskog niza (slijeda)?

Rješenje 136

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \Rightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Prema uvjetu zadatka brojevi $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x-4}$ uzastopni su članovi geometrijskog niza pa vrijedi:

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^2 = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-4} \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x+1) \cdot (x-4)} \Rightarrow (x+1) \cdot (x-4) = (x-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + x - 4 = x^2 - 4 \cdot x + 4 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + x - 4 = x^2 - 4 \cdot x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 4 = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 \Rightarrow x = 8.$$

Vježba 136

Za koji x su brojevi $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+4}$ uzastopni članovi geometrijskog niza (slijeda)?

Rezultat: x = 0.

Zadatak 137 (Maja, ekonomska škola)

Četvrti član geometrijskog niza je 243, a količnik – 3. Potrebno je odrediti prvi član i zbroj prva 4 člana niza.

Rješenje 137

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Računamo prvi član geometrijskog niza tako da u formulu za opći član niza uvrstimo zadane vrijednosti za a_4 i q.

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = 243 \\ q = -3 \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_4 = 243 \\ q = -3 \\ a_4 = a_1 \cdot q^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 243 = a_1 \cdot (-3)^3 \Rightarrow 243 = -27 \cdot a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27 \cdot a_1 = -243 \Rightarrow 27 \cdot a_1 = -243 \; /:27 \Rightarrow a_1 = -9.$$

Računamo sumu prva 4 člana niza tako da u formulu za sumu prvih n članova niza uvrstimo zadane vrijednosti za n, a_1 i q.

$$\left.\begin{array}{l} n = 4 \\ a_1 = -9 \\ q = -3 \\ s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n = 4 \\ a_1 = -9 \\ q = -3 \\ s_4 = a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow s_4 = -9 \cdot \frac{(-3)^4 - 1}{-3 - 1} \Rightarrow s_4 = -9 \cdot \frac{81 - 1}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_4 = -9 \cdot \frac{80}{-4} \Rightarrow s_4 = 9 \cdot \frac{80}{4} \Rightarrow s_4 = 9 \cdot 20 \Rightarrow s_4 = 180.$$

Vježba 137

Četvrti član geometrijskog niza je 243, a količnik 3. Potrebno je odrediti prvi član niza.

Rezultat: $a_1 = 9$.

Zadatak 138 (Anto, gimnazija)

Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 7, zbroj njihovih kvadrata iznosi 21. Koji je to niz?

Rješenje 138

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

$$\left(a^2 + a + 1\right) \cdot \left(a^2 - a + 1\right) = \left(\left(a^2 + 1\right) + a\right) \cdot \left(\left(a^2 + 1\right) - a\right) = \left(a^2 + 1\right)^2 - a^2 =$$
$$= a^4 + 2 \cdot a^2 + 1 - a^2 = a^4 + a^2 + 1.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{matrix} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 7 \\ a_1^2 + \left(a_1 \cdot q\right)^2 + \left(a_1 \cdot q^2\right)^2 = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 7 \\ a_1^2 + a_1^2 \cdot q^2 + a_1^2 \cdot q^4 = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(1 + q + q^2\right) = 7 \\ a_1^2 \cdot \left(1 + q^2 + q^4\right) = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 + q + 1\right) = 7 \\ a_1^2 \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right) = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \left(q^2 + q + 1\right) = 7 \; / \cdot \frac{1}{q^2 + q + 1} \\ a_1^2 \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right) = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = \frac{7}{q^2 + q + 1} \\ a_1^2 \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right) = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{7}{q^2 + q + 1}\right)^2 \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right) = 21 \Rightarrow \frac{7^2}{\left(q^2 + q + 1\right)^2} \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right) = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{49 \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right)}{\left(q^2 + q + 1\right)^2} = 21 \Rightarrow \frac{49 \cdot \left(q^4 + q^2 + 1\right)}{\left(q^2 + q + 1\right)^2} = 21 \; / \cdot \frac{1}{49} \Rightarrow \frac{q^4 + q^2 + 1}{\left(q^2 + q + 1\right)^2} = \frac{21}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q^4+q^2+1}{\left(q^2+q+1\right)^2}=\frac{21}{49} \Rightarrow \frac{q^4+q^2+1}{\left(q^2+q+1\right)^2}=\frac{3}{7} \Rightarrow \frac{q^4+q^2+1}{\left(q^2+q+1\right)\cdot\left(q^2+q+1\right)}=\frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{proširivanje razlomka,}\\ \text{razlika kvadrata}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{q^4+q^2+1}{\left(q^2+q+1\right)\cdot\left(q^2+q+1\right)}\cdot\frac{q^2-q+1}{q^2-q+1}=\frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(q^4+q^2+1\right)\cdot\left(q^2-q+1\right)}{\left(q^2+q+1\right)\cdot\left(\left(q^2+q+1\right)\cdot\left(q^2-q+1\right)\right)}=\frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\left(q^4+q^2+1\right)\cdot\left(q^2-q+1\right)}{\left(q^2+q+1\right)\cdot\left(q^4+q^2+1\right)}=\frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(q^4+q^2+1\right)\cdot\left(q^2-q+1\right)}{\left(q^2+q+1\right)\cdot\left(q^4+q^2+1\right)}=\frac{3}{7} \Rightarrow \frac{q^2-q+1}{q^2+q+1}=\frac{3}{7} \Rightarrow 7\cdot\left(q^2-q+1\right)=3\cdot\left(q^2+q+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\cdot q^2-7\cdot q+7=3\cdot q^2+3\cdot q+3 \Rightarrow 7\cdot q^2-7\cdot q+7-3\cdot q^2-3\cdot q-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot q^2-10\cdot q+4=0 \Rightarrow 4\cdot q^2-10\cdot q+4=0 \;/:2 \Rightarrow 2\cdot q^2-5\cdot q+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot q^2-5\cdot q+2=0\\ a=2\;,\;b=-5\;,\;c=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=2\;,\;b=-5\;,\;c=2\\ q_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}q_1=\dfrac{5+3}{4}\\ q_2=\dfrac{5-3}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}q_1=\dfrac{8}{4}\\ q_2=\dfrac{2}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}q_1=\dfrac{8}{4}\\ q_2=\dfrac{2}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}q_1=2\\ q_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

Postoje dva geometrijska niza.

- Računamo prvi član a_1 kada je količnik q = 2.

$$\left.\begin{array}{l}a_1=\dfrac{7}{q^2+q+1}\\ q=2\end{array}\right\} \Rightarrow a_1=\frac{7}{2^2+2+1} \Rightarrow a_1=\frac{7}{4+2+1} \Rightarrow a_1=\frac{7}{7} \Rightarrow a_1=1.$$

Prva tri člana geometrijskog niza glase:

1, 2, 4, …

- Računamo prvi član a_1' kada je količnik $q=\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}a_1'=\dfrac{7}{q^2+q+1}\\ q=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow a_1'=\frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1} \Rightarrow a_1'=\frac{7}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} \Rightarrow a_1'=\frac{7}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}} \Rightarrow a_1'=\frac{7}{\frac{1+2+4}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1' = \frac{7}{\frac{7}{4}} \Rightarrow a_1' = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{7}{4}} \Rightarrow a_1' = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{7}{4}} \Rightarrow a_1' = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow a_1' = 4.$$

Prva tri člana geometrijskog niza glase:

$$4, 2, 1, \ldots$$

Vježba 138

Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 21, zbroj njihovih kvadrata iznosi 189. Koji je to niz?

Rezultat: 3, 6, 12, ... i 12, 6, 3, ...

Zadatak 139 (Ivan, gimnazija)

Ako pozitivni brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ tvore aritmetički niz dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Rješenje 139

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; a_5-a_4=d \;,\; a_6-a_5=d \;,\; \ldots \;,\; a_n-a_{n-1}=d \;\ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \;,\; n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad,\quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad,\quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\ne 0 \;,\; n\ne 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\ne 0 \;,\; n\ne 1.$$

Budući da brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ tvore aritmetički niz, vrijede jednakosti:

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; \ldots \;,\; a_n-a_{n-1}=d.$$

Tada je:

- $$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}}=\left[\begin{matrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{matrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}}\cdot\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}=$$
  $$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\left(\sqrt{a_2}\right)^2-\left(\sqrt{a_1}\right)^2}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

- $$\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}=\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}}=\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}}\cdot\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{\left(\sqrt{a_3}\right)^2-\left(\sqrt{a_2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}=\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}.$$
- $$\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}=\frac{1}{\sqrt{a_4}+\sqrt{a_3}}=\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a_4}+\sqrt{a_3}}\cdot\frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{\left(\sqrt{a_4}\right)^2-\left(\sqrt{a_3}\right)^2}=\frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{a_4-a_3}=\frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{d}.$$

$$\ldots$$

- $$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}=\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}\cdot\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{\left(\sqrt{a_n}\right)^2-\left(\sqrt{a_{n-1}}\right)^2}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{d}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=\frac{-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}{d}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{brojnika}\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}\cdot\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=\frac{\left(\sqrt{a_n}\right)^2-\left(\sqrt{a_1}\right)^2}{d\cdot\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=$$
$$=\frac{a_n-a_1}{d\cdot\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{a_1+(n-1)\cdot d-a_1}{d\cdot\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{a_1+(n-1)\cdot d-a_1}{d\cdot\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{(n-1)\cdot d}{d\cdot\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=$$
$$=\frac{(n-1)\cdot d}{d\cdot\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Vježba 139

Ako pozitivni brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ tvore aritmetički niz dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{10}}+\sqrt{a_{11}}}=\frac{10}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{11}}}.$$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 140 (4A, TUPŠ)

Koji od navedenih geometrijskih redova ima konačan zbroj?

A. 3 – 9 + 27 – 81 + …
B. 6 + 12 + 24 + 48 + …
C. 8 – 12 + 18 – 27 + …
D. 125 + 75 + 45 + 27 + …

Rješenje 140

Ponovimo!

Geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots$$

konvergentan je (zbroj je konačan) onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

A. 3 – 9 + 27 – 81 + …

Vrijedi:

$$|q| = \left|\frac{-9}{3}\right| = \left|\frac{27}{-9}\right| = \left|\frac{-81}{27}\right| = \ldots = 3 > 1.$$

Geometrijski red nema konačan zbroj.

B. 6 + 12 + 24 + 48 + …

Vrijedi:

$$|q| = \left|\frac{12}{6}\right| = \left|\frac{24}{12}\right| = \left|\frac{48}{24}\right| = \ldots = 2 > 1.$$

Geometrijski red nema konačan zbroj.

C. 8 – 12 + 18 – 27 + …

Vrijedi:

$$|q| = \left|\frac{-12}{8}\right| = \left|\frac{18}{-12}\right| = \left|\frac{-27}{18}\right| = \ldots = 1.5 > 1.$$

Geometrijski red nema konačan zbroj.

D. 125 + 75 + 45 + 27 + …

Vrijedi:

$$|q| = \left|\frac{75}{125}\right| = \left|\frac{45}{75}\right| = \left|\frac{27}{45}\right| = \ldots = 0.6 < 1.$$

Geometrijski red ima konačan zbroj.
Odgovor je pod D.

Vježba 140

Koji od navedenih geometrijskih redova ima konačan zbroj?

A. $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

B. $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots$

C. $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$

D. $8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$

Rezultat: D.