Zadatak 161 (Danci, turistički menadžment)

Odredite prvi član i razliku aritmetičkog niza, ako je: $\begin{cases} 5 \cdot a_3 - 2 \cdot a_7 = 48 \\ s_3 + a_6 = 48 \end{cases}$.

Rješenje 161

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \dots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot a_3 - 2 \cdot a_7 = 48 \\ s_3 + a_6 = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot (a_1 + 2 \cdot d) - 2 \cdot (a_1 + 6 \cdot d) = 48 \\ \frac{3}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 2 \cdot d \right] + a_1 + 5 \cdot d = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot a_1 + 10 \cdot d - 2 \cdot a_1 - 12 \cdot d = 48 \\ 3 \cdot a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 5 \cdot d = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot a_1 - 2 \cdot d = 48 \\ 4 \cdot a_1 + 8 \cdot d = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot a_1 - 2 \cdot d = 48 \\ 4 \cdot a_1 + 8 \cdot d = 48 \; /:4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot a_1 - 2 \cdot d = 48 \\ a_1 + 2 \cdot d = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot a_1 = 60 \Rightarrow 4 \cdot a_1 = 60 \; /:4 \Rightarrow a_1 = 15.$$

Računamo razliku d.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 12 \\ a_1 = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow 15 + 2 \cdot d = 12 \Rightarrow 2 \cdot d = 12 - 15 \Rightarrow 2 \cdot d = -3 \Rightarrow 2 \cdot d = -3 \; /:2 \Rightarrow d = -\frac{3}{2}.$$

Vježba 161

Odredite prvi član i razliku aritmetičkog niza, ako je: $\begin{cases} 5 \cdot a_3 - 2 \cdot a_7 = -1 \\ s_3 + a_6 = 20 \end{cases}$.

Rezultat: $a_1 = 1 \;,\; d = 2.$

Zadatak 162 (Velimir, srednja škola)

U nizu (a_n) vrijedi $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, tj. svaki član niza je jednak zbroju dvaju prethodnih članova. Peti član je jednak 17. Zbroj početnih šest članova niza je jednak:

A. 51 *B.* 68 *C.* 85 *D.* 102

Rješenje 162

Ponovimo!

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (sljed)

$$f : N \to R \;,\; n \mapsto f(n) = a_n.$$

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. Uz rekurziju treba zadati i vrijednosti prvih nekoliko članova niza – onoliko koliko se prethodnih članova javlja u rekurziji.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Budući da se u rekurziji javljaju dva prethodna člana, proizvoljno zadajemo vrijednost prva dva člana.

$$a_1 = x \quad , \quad a_2 = y.$$

Tada vrijedi:

- $\left.\begin{array}{l} a_1 = x \;,\; a_2 = y \\ a_3 = a_1 + a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_3 = x + y$
- $\left.\begin{array}{l} a_2 = y \;,\; a_3 = x + y \\ a_4 = a_2 + a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_4 = y + x + y \Rightarrow a_4 = x + 2 \cdot y$
- $\left.\begin{array}{l} a_3 = x + y \;,\; a_4 = x + 2 \cdot y \\ a_5 = a_3 + a_4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_5 = x + y + x + 2 \cdot y \Rightarrow a_5 = 2 \cdot x + 3 \cdot y$
- $\left.\begin{array}{l} a_4 = x + 2 \cdot y \;,\; a_5 = 2 \cdot x + 3 \cdot y \\ a_6 = a_4 + a_5 \end{array}\right\} \Rightarrow a_6 = x + 2 \cdot y + 2 \cdot x + 3 \cdot y \Rightarrow a_6 = 3 \cdot x + 5 \cdot y.$

Zbroj prvih šest članova niza je:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow s = x + y + (x + y) + (x + 2 \cdot y) + (2 \cdot x + 3 \cdot y) + (3 \cdot x + 5 \cdot y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = x + y + x + y + x + 2 \cdot y + 2 \cdot x + 3 \cdot y + 3 \cdot x + 5 \cdot y \Rightarrow s = 8 \cdot x + 12 \cdot y \Rightarrow s = 4 \cdot (2 \cdot x + 3 \cdot y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_5 = 2 \cdot x + 3 \cdot y \right] \Rightarrow s = 4 \cdot a_5 \Rightarrow \left[a_5 = 17 \right] \Rightarrow s = 4 \cdot 17 \Rightarrow s = 68.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 162

U nizu (a_n) vrijedi $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, tj. svaki član niza je jednak zbroju dvaju prethodnih članova. Peti član je jednak 13. Zbroj početnih šest članova niza je jednak:

A. 52 *B.* 56 *C.* 64 *D.* 80

Rezultat: A.

Zadatak 163 (Tomislav, srednja škola)

Ako je $a_n = 2 \cdot n + 3$ opći član niza dokaži da vrijedi $a_{n+2} = a_n + 4$.

Rješenje 163

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a = n \\ b = n \end{array}\right\} \Rightarrow a = b.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (sljed)

$$f : N \to R \;,\; n \mapsto f(n) = a_n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Budući da je zadan opći član niza $a_n=2\cdot n+3,$ vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+2}=2\cdot(n+2)+3 \\ a_n+4=2\cdot n+3+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{n+2}=2\cdot n+4+3 \\ a_n+4=2\cdot n+7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{n+2}=2\cdot n+7 \\ a_n+4=2\cdot n+7 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+2}=a_n+4.$$

2.inačica

Budući da je zadan opći član niza $a_n=2\cdot n+3,$ vrijedi:

$$a_{n+2}=a_n+4 \Rightarrow 2\cdot(n+2)+3=2\cdot n+3+4 \Rightarrow 2\cdot n+4+3=2\cdot n+7 \Rightarrow 2\cdot n+7=2\cdot n+7.$$

Jednakost je valjana što znači da vrijedi formula

$$a_{n+2}=a_n+4.$$

Vježba 163

Ako je $a_n=2\cdot n+1$ opći član niza dokaži da vrijedi $a_{n+3}=a_n+6.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 164 (Docx, gimnazija)

U aritmetičkom je nizu zbroj trećeg i sedmog člana jednak 10. Odredi zbroj prvih devet članova tog niza.

Rješenje 164

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \; , \; a_3-a_2=d \; , \; a_4-a_3=d \; , \; a_5-a_4=d \; , \; a_6-a_5=d \; , \; \ldots \; , \; a_n-a_{n-1}=d \; \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \; , \; n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right] \\ n=9 \end{array}\right\} \Rightarrow s_9=\frac{9}{2}\cdot\left[a_1+a_9\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_3=a_1+2\cdot d \Rightarrow a_1=a_3-2\cdot d \\ a_7=a_9-2\cdot d \Rightarrow a_9=a_7+2\cdot d \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_9=\frac{9}{2}\cdot\left[a_3-2\cdot d+a_7+2\cdot d\right] \Rightarrow s_9=\frac{9}{2}\cdot\left[a_3-2\cdot d+a_7+2\cdot d\right] \Rightarrow s_9=\frac{9}{2}\cdot\left[a_3+a_7\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_3+a_7=10\right] \Rightarrow s_9=\frac{9}{2}\cdot 10 \Rightarrow s_9=45.$$

Vježba 164

U aritmetičkom je nizu zbroj trećeg i sedmog člana jednak 12. Odredi zbroj prvih devet članova tog niza.

Rezultat: 54.

Zadatak 165 (Docx, gimnazija)

Umnožak četvrtog i petog člana geometrijskog niza jednak je A. Koliko iznosi umnožak prvih osam članova tog niza?

Rješenje 165

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1.$$

Umnožak četvrtog i petog člana geometrijskog niza jednak je A pa vrijedi:

$$a_4 \cdot a_5 = A \;\Rightarrow\; a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^4 = A \;\Rightarrow\; a_1^2 \cdot q^7 = A.$$

Računamo umnožak prvih osam članova tog niza.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = a_1 \cdot \left(a_1 \cdot q^1\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^2\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^3\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^4\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^5\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^6\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^7\right) =$$

$$= a_1 \cdot a_1 \cdot q^1 \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^5 \cdot a_1 \cdot q^6 \cdot a_1 \cdot q^7 = a_1^8 \cdot q^{28} = \left(a_1^2 \cdot q^7\right)^4 = A^4.$$

Vježba 165

Umnožak četvrtog i petog člana geometrijskog niza jednak je 2. Koliko iznosi umnožak prvih osam članova tog niza?

Rezultat: 16.

Zadatak 166 (Bond, gimnazija)

Četiri broja čine geometrijski niz. Njihovi logaritmi, po bazi 3, čine aritmetički niz čija je razlika 1, a zbroj 18. Odredite te brojeve.

Rješenje 166

Ponovimo!

$$a^1 = a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;,\; n \ge 1.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a.$$

Neka su traženi članovi geometrijskog niza redom:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a \cdot q \\ a_3 &= a \cdot q^2 \\ a_4 &= a \cdot q^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a,\ a \cdot q,\ a \cdot q^2,\ a \cdot q^3.$$

Njihovi logaritmi, po bazi 3, čine aritmetički niz

$$\log_3 a,\ \log_3 (a \cdot q),\ \log_3 \left(a \cdot q^2\right),\ \log_3 \left(a \cdot q^3\right).$$

Razlika aritmetičkog niza je 1 pa vrijedi:

$$\log_3 (a \cdot q) - \log_3 a = 1 \Rightarrow \log_3 a + \log_3 q - \log_3 a = 1 \Rightarrow \log_3 a + \log_3 q - \log_3 a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 q = 1 \Rightarrow q = 3^1 \Rightarrow q = 3.$$

Zbroj članova aritmetičkog niza je 18 pa se dobije:

$$\log_3 a + \log_3 (a \cdot q) + \log_3 \left(a \cdot q^2\right) + \log_3 \left(a \cdot q^3\right) = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 a + \log_3 a + \log_3 q + \log_3 a + \log_3 q^2 + \log_3 a + \log_3 q^3 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 a + \log_3 a + \log_3 q + \log_3 a + 2 \cdot \log_3 q + \log_3 a + 3 \cdot \log_3 q = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \log_3 a + 6 \cdot \log_3 q = 18 \Rightarrow \left[\log_3 q = 1\right] \Rightarrow 4 \cdot \log_3 a + 6 \cdot 1 = 18 \Rightarrow 4 \cdot \log_3 a + 6 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \log_3 a = 18 - 6 \Rightarrow 4 \cdot \log_3 a = 12 \Rightarrow 4 \cdot \log_3 a = 12 \;/ : 4 \Rightarrow \log_3 a = 3 \Rightarrow a = 3^3 \Rightarrow a = 27.$$

Traženi brojevi su:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = a \cdot q \\ a_3 = a \cdot q^2 \\ a_4 = a \cdot q^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 27 \\ q = 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 27 \\ a_2 = 27 \cdot 3 \\ a_3 = 27 \cdot 3^2 \\ a_4 = 27 \cdot 3^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 27,\ 81,\ 243,\ 729.$$

Vježba 166

Četiri broja čine geometrijski niz. Njihovi logaritmi, po bazi 2, čine aritmetički niz čija je razlika 1, a zbroj 18. Odredite te brojeve.

Rezultat: 8, 16, 32, 64.

Zadatak 167 (Martin, tehnička škola)

U geometrijskom nizu sa parnim brojem članova omjer zbroja članova na parnim mjestima i zbroja članova na neparnim mjestima jednak je kvocijentu niza. Dokažite!

Rješenje 167

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\frac{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots + a_{2 \cdot n}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2 \cdot n - 1}} = \frac{a_1 \cdot q + a_3 \cdot q + a_5 \cdot q + a_7 \cdot q + \ldots + a_{2 \cdot n - 1} \cdot q}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2 \cdot n - 1}} =$$

$$= \frac{q \cdot (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2 \cdot n - 1})}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2 \cdot n - 1}} = \frac{q \cdot (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2 \cdot n - 1})}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2 \cdot n - 1}} = q.$$

Dokaz gotov.

Vježba 167

U geometrijskom nizu sa parnim brojem članova omjer zbroja članova na neparnim mjestima i zbroja članova na parnim mjestima jednak je recipročnoj vrijednosti kvocijenta niza. Dokažite!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 168 (Mihaela, srednja škola)

Za koje sve vrijednosti pozitivnoga realnog broja x, geometrijski red

$x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{8} \cdot x^4 + \ldots$ ima konačan zbroj?

Rješenje 168

Ponovimo!

Geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots$$

konvergentan je (zbroj je konačan) onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1 \Rightarrow -1 < q < 1.$$

Geometrijski red ima stalan kvocijent između susjednih članova.

$$|x| < a \;,\; a > 0 \Rightarrow -a < x < a \quad , \quad a < b < c \;,\; n > 0 \Rightarrow a \cdot n < b \cdot n < c \cdot n.$$

U geometrijskom redu

$$x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{8} \cdot x^4 + \ldots$$

kvocijent q iznosi:

$$q = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^2}{x} = \frac{\frac{1}{4} \cdot x^3}{\frac{1}{2} \cdot x^2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot x^4}{\frac{1}{4} \cdot x^3} = \ldots = \frac{1}{2} \cdot x.$$

Budući da geometrijski red mora imati konačan zbroj, a realan broj x mora biti pozitivan, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} q = \frac{1}{2} \cdot x \\ |q| < 1 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \left|\frac{1}{2} \cdot x\right| < 1 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -1 < \frac{1}{2} \cdot x < 1 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -1 < \frac{1}{2} \cdot x < 1 \;/ \cdot 2 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2 < x < 2 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{presjek skupova,} \\ \text{zajednički dio intervala} \end{bmatrix} \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Vježba 168

Za koje sve vrijednosti pozitivnoga realnog broja x, geometrijski red $x + \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \cdot x^3 + \frac{1}{27} \cdot x^4 + \ldots$ ima konačan zbroj?

Rezultat: $0 < x < 3 \Rightarrow x \in \langle 0, 3 \rangle.$

Zadatak 169 (Željko, srednja škola)

Zbroj prvih n članova nekoga aritmetičkog niza jednak je $s_n = b \cdot n - 2 \cdot n^2$. Koliki je koeficijent b, ako je deseti član toga niza jednak – 16?

$A.\ b = 4 \qquad B.\ b = 9 \qquad C.\ b = 17 \qquad D.\ b = 22$

Rješenje 169

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a = b \Rightarrow b = a.$$

Deseti član aritmetičkog niza je – 16 pa vrijedi jednakost:

$$a_{10} = -16 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = -16.$$

Uočimo da se u formuli za zbroj prvih 19 članova aritmetičkog niza pojavljuje izraz $a_1 + 9 \cdot d$.

$$s_{19} = \frac{19}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (19-1) \cdot d\right] \Rightarrow s_{19} = \frac{19}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 18 \cdot d\right] \Rightarrow s_{19} = \frac{19}{2} \cdot \left[2 \cdot \left(a_1 + 9 \cdot d\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{19} = \frac{19}{2} \cdot \left[2 \cdot \left(a_1 + 9 \cdot d\right)\right] \Rightarrow s_{19} = 19 \cdot \left(a_1 + 9 \cdot d\right).$$

Budući da je zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $s_n = b \cdot n - 2 \cdot n^2$, vrijedi:

$$s_{19} = b \cdot 19 - 2 \cdot 19^2 \Rightarrow s_{19} = 19 \cdot b - 2 \cdot 19^2.$$

Sada se lako izračuna koeficijent b.

$$\left. \begin{array}{l} s_{19} = 19 \cdot \left(a_1 + 9 \cdot d\right) \\ s_{19} = 19 \cdot b - 2 \cdot 19^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 19 \cdot \left(a_1 + 9 \cdot d\right) = 19 \cdot b - 2 \cdot 19^2 \Rightarrow 19 \cdot \left(a_1 + 9 \cdot d\right) = 19 \cdot b - 2 \cdot 19^2 \quad /:19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = b - 2 \cdot 19 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = b - 38 \Rightarrow \left[a_1 + 9 \cdot d = -16\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 = b - 38 \Rightarrow b - 38 = -16 \Rightarrow b = -16 + 38 \Rightarrow b = 22.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 169

Zbroj prvih n članova nekoga aritmetičkog niza jednak je $s_n = b \cdot n - 2 \cdot n^2$. Koliki je koeficijent b, ako je deseti član toga niza jednak – 21?

A. $b = 4$ *B.* $b = 9$ *C.* $b = 17$ *D.* $b = 22$

Rezultat: C.

Zadatak 170 (Ivan, gimnazija)

Zadan je niz a_1, a_2, a_3 … čiji je zbroj $s_n = a \cdot n^2 - b \cdot n$, gdje su a i b zadani realni brojevi. Odredite a_n.

Rješenje 170

Ponovimo!

Ako je zadano n članova niza a_1, a_2, a_3, … njegov zbroj iznosi:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Svojstvo udruživanja ili asocijativnosti

Za svaka tri realna broja vrijedi

$$\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right).$$

$$s_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \Rightarrow s_n=\left(a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}\right)+a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n=s_{n-1}+a_n \Rightarrow s_{n-1}+a_n=s_n \Rightarrow a_n=s_n-s_{n-1} \Rightarrow \left[s_n=a\cdot n^2-b\cdot n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=a\cdot n^2-b\cdot n-\left[a\cdot\left(n-1\right)^2-b\cdot\left(n-1\right)\right] \Rightarrow a_n=a\cdot n^2-b\cdot n-a\cdot\left(n-1\right)^2+b\cdot\left(n-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=\left(a\cdot n^2-a\cdot\left(n-1\right)^2\right)+\left(-b\cdot n+b\cdot\left(n-1\right)\right) \Rightarrow a_n=a\cdot\left(n^2-\left(n-1\right)^2\right)-b\cdot\left(n-\left(n-1\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=a\cdot\left(n-\left(n-1\right)\right)\cdot\left(n+\left(n-1\right)\right)-b\cdot\left(n-n+1\right) \Rightarrow a_n=a\cdot\left(n-n+1\right)\cdot\left(n+n-1\right)-b\cdot\left(n-n+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=a\cdot\left(n-n+1\right)\cdot\left(n+n-1\right)-b\cdot\left(n-n+1\right) \Rightarrow a_n=a\cdot 1\cdot\left(2\cdot n-1\right)-b\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=a\cdot\left(2\cdot n-1\right)-b \Rightarrow a_n=2\cdot a\cdot n-a-b.$$

Vježba 170

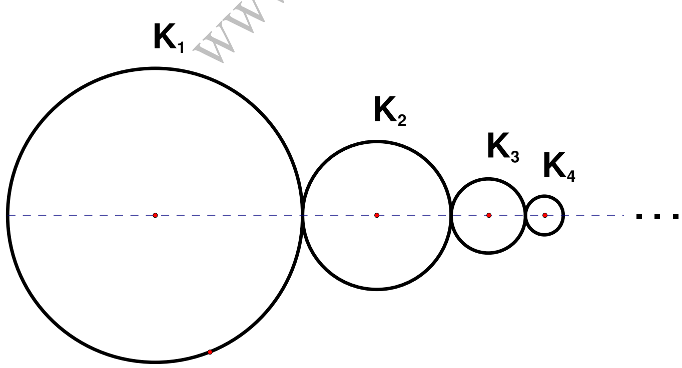
Zadan je niz a_1, a_2, a_3 … čiji je zbroj $s_n=3\cdot n^2-2\cdot n$. Odredite a_n.

Rezultat: $6\cdot n-5.$

Zadatak 171 (Bug, gimnazija)

Zadano je beskonačno mnogo krugova kojima su središta na jednome pravcu i koji se dodiruju izvana kao što je prikazano na skici. Krug K_1 ima polumjer 10 cm. Promjer kruga K_2 jednak je polumjeru kruga K_1, promjer kruga K_3 jednak je polumjeru kruga K_2 itd. Koliki je zbroj površina svih tih beskonačno mnogo krugova?

$A.\ 275\cdot\pi\ cm^2$ $B.\ 125\cdot\pi\ cm^2$ $C.\ \frac{400\cdot\pi}{3}\ cm^2$ $D.\ \frac{500\cdot\pi}{3}\ cm^2$



Rješenje 171

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad a-\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c-b}{c}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ ...\ +a_1\cdot q^n+\ ...$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$\left|q\right|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jedne zadane točke ravnine. Ta zadana točka je središte kružnice.
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Promjer ili dijametar je dužina koja spaja dvije točke kružnice, a prolazi središtem kružnice. Duljinu promjera označavamo slovom d.
Krug je skup točaka ravnine omeđen kružnicom (zajedno s kružnicom).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

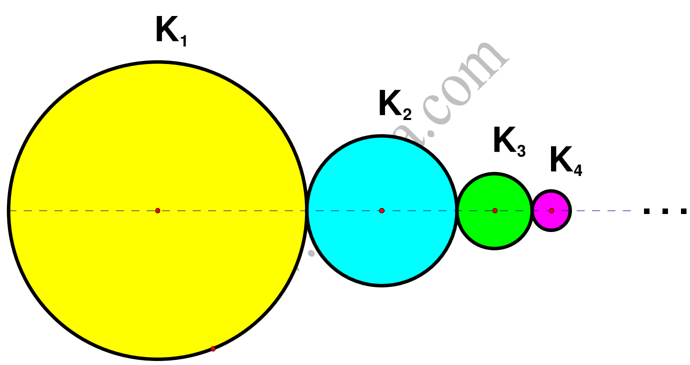
$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Promjer je dvostruko veći od polumjera.

$$d = 2 \cdot r \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{2} \cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$



Krug K_1 ima polumjer r_1 = 10 cm pa njegova ploština iznosi:

$$P_1 = r_1^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; P_1 = (10\ cm)^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; P_1 = 100 \cdot \pi\ cm^2.$$

Promjer kruga K_2 jednak je polumjeru kruga K_1. Zato polumjer kruga K_2 iznosi:

$$2 \cdot r_2 = r_1 \;\Rightarrow\; 2 \cdot r_2 = 10\ cm \;\Rightarrow\; 2 \cdot r_2 = 10\ cm\ /:2 \;\Rightarrow\; r_2 = 5\ cm.$$

Krug K_2 ima polumjer r_2 = 5 cm pa njegova ploština iznosi:

$$P_2 = r_2^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; P_2 = (5\ cm)^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; P_2 = 25 \cdot \pi\ cm^2.$$

Promjer kruga K_3 jednak je polumjeru kruga K_2. Zato polumjer kruga K_3 iznosi:

$$2 \cdot r_3 = r_2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot r_3 = 5\ cm \;\Rightarrow\; 2 \cdot r_3 = 5\ cm\ /:2 \;\Rightarrow\; r_3 = \frac{5}{2}\ cm.$$

Krug K_3 ima polumjer $r_3 = \frac{5}{2}\ cm$ pa njegova ploština iznosi:

$$P_3 = r_3^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; P_3 = \left(\frac{5}{2}\ cm\right)^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; P_3 = \frac{25}{4} \cdot \pi\ cm^2.$$

Itd.
Zbrajajući ploštine svih beskonačno mnogo krugova dobijemo geometrijski red čiji zbroj iznosi:

$$P_1+P_2+P_3+\ldots=100\cdot\pi\ cm^2+25\cdot\pi\ cm^2+\frac{25}{4}\cdot\pi\ cm^2+\ldots=$$

$$\Rightarrow\left[q=\frac{25\cdot\pi\ cm^2}{100\cdot\pi\ cm^2}=\frac{\frac{25}{4}\cdot\pi\ cm^2}{25\cdot\pi\ cm^2}=\ldots=\frac{1}{4}<1\right]=\left[\begin{array}{l}a_1=100\cdot\pi\ cm^2\\ q=\frac{1}{4}\\ s=\frac{a_1}{1-q}\end{array}\right]=$$

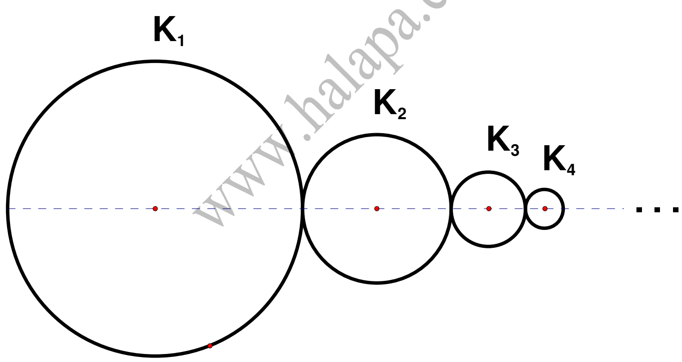
$$=100\cdot\pi\ cm^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=100\cdot\pi\ cm^2\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}=100\cdot\pi\ cm^2\cdot\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{4}}=100\cdot\pi\ cm^2\cdot\frac{4}{3}=\frac{400\cdot\pi}{3}\ cm^2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 171

Zadano je beskonačno mnogo krugova kojima su središta na jednome pravcu i koji se dodiruju izvana kao što je prikazano na skici. Krug K_1 ima polumjer 1 dm. Promjer kruga K_2 jednak je polumjeru kruga K_1, promjer kruga K_3 jednak je polumjeru kruga K_2 itd. Koliki je zbroj površina svih tih beskonačno mnogo krugova?

$A.\ 275\cdot\pi\ cm^2$ $\quad B.\ 125\cdot\pi\ cm^2$ $\quad C.\ \frac{400\cdot\pi}{3}\ cm^2$ $\quad D.\ \frac{500\cdot\pi}{3}\ cm^2$



Rezultat: C.

Zadatak 172 (Luka, gimnazija)

Dokaži ako su x, y i z uzastopni članovi geometrijskog niza, tada vrijedi
$(x+y+z)\cdot(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$

Rješenje 172

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q \Rightarrow a_n=a_{n-1}\cdot q.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G=\sqrt{x\cdot y}.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1} \Rightarrow a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}.$$

Budući da su x, y i z uzastopni članovi geometrijskog niza vrijedi

$$y^2=x\cdot z.$$

Sada je:

$$(x+y+z)\cdot(x-y+z)=(x+z+y)\cdot(x+z-y)=((x+z)+y)\cdot((x+z)-y)=$$

$$=(x+z)^2-y^2=x^2+2\cdot x\cdot z+z^2-y^2=\left[y^2=x\cdot z.\right]=x^2+2\cdot y^2+z^2-y^2=$$

$$=x^2+y^2+z^2.$$

Vježba 172

Dokaži ako su x, y i z uzastopni članovi geometrijskog niza, tada vrijedi
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)\cdot(x-y+z)$.

Rezultat: Dokaz provodimo u obrnutom smjeru.

Zadatak 173 (Ivana, gimnazija)

U jednome je stroju spojeno u nizu nekoliko zupčanika. Svaki zupčanik, počevši od drugoga, ima dvostruko manje zubaca od prethodnoga, što znači da prilikom rada stroja napravi dvostruko veći broj okretaja od prethodnoga. Dok se najveći zupčanik okrene 9 puta, najmanji se okrene 1152 puta. Koliko je zupčanika spojeno u nizu?

$A.\ 4 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 10$

Rješenje 173

Ponovimo!

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q \Rightarrow a_n=a_{n-1}\cdot q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1},\ n\geq 1.$$

Budući da prilikom rada stroja svaki zupčanik napravi dvostruko veći broj okretaja od prethodnoga, riječ je o geometrijskom nizu za koji vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} q=2 \\ a_1=9 \text{ broj okretaja najvećeg zupčanika} \\ a_n=1152 \text{ broj okretaja najmanjeg zupčanika} \end{array}\right\}.$$

Računamo broj zupčanika n.

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \Rightarrow 1152=9\cdot 2^{n-1} \Rightarrow 9\cdot 2^{n-1}=1152 \Rightarrow 9\cdot 2^{n-1}=1152 \ /:9 \Rightarrow 2^{n-1}=128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{n-1}=2^7 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=7+1 \Rightarrow n=8.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 173

U jednome je stroju spojeno u nizu nekoliko zupčanika. Svaki zupčanik, počevši od drugoga, ima dvostruko manje zubaca od prethodnoga, što znači da prilikom rada stroja napravi dvostruko veći broj okretaja od prethodnoga. Dok se najveći zupčanik okrene 18 puta, najmanji se okrene 2304 puta. Koliko je zupčanika spojeno u nizu?

$A.\ 4 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 10$

Rezultat: C.

Zadatak 174 (Anita, ekonomska škola)

Izračunajte zbroj prvih sto zajedničkih članova aritmetičkih nizova 17, 21, 25, … i 16, 21, 26, ….

Rješenje 174

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ ...\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ ...$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right].$$

Uočimo da je razlika niza:

- 17, 21, 25, … jednaka d = 21 – 17 = 25 – 21 = … = 4
- 16, 21, 26, … jednaka d = 21 – 16 = 26 – 21 = … = 5.

Budući da tražimo zajedničke članove oba niza, razlika tog aritmetičkog niza je najmanji zajednički višekratnik brojeva 4 i 5.

$$d=4\cdot 5 \Rightarrow d=20.$$

Prvi član traženog niza je a_1 = 21.

$$\left.\begin{array}{l} 17,\ 21,\ 25,\ ... \\ 16,\ 21,\ 26,\ ... \end{array}\right\} \Rightarrow 21,\ 41,\ 61,\ ...$$

Zbroj prvih sto članova aritmetičkog niza 21, 41, 61, … iznosi:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 21 \\ d &= 20 \\ n &= 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \right] \Rightarrow s_{100} = \frac{100}{2} \cdot \left[2 \cdot 21 + (100-1) \cdot 20 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{100} = 50 \cdot [42 + 99 \cdot 20] \Rightarrow s_{100} = 101100.$$

Vježba 174

Izračunajte zbroj prvih dvjesta zajedničkih članova aritmetičkih nizova 17, 21, 25, … i 16, 21, 26, ….

Rezultat: 402200.

Zadatak 175 (Stjepan, gimnazija)

Prvi član aritmetičkog niza je 2. Zbroj p početnih članova se prema zbroju q početnih članova niza odnosi kao $p \cdot (p+1) : q \cdot (q+1)$, $p, q \in N$. Razlika niza je jednaka

$$A. -2 \qquad B. \ 2 \qquad C. \ 1 \qquad D. -1$$

Rješenje 175

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

$$\left.\begin{aligned} & a_1 = 2 \\ & \frac{s_p}{s_q} = \frac{p \cdot (p+1)}{q \cdot (q+1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \right] \Rightarrow \frac{\frac{p}{2} \cdot \left[2 \cdot 2 + (p-1) \cdot d \right]}{\frac{q}{2} \cdot \left[2 \cdot 2 + (q-1) \cdot d \right]} = \frac{p \cdot (p+1)}{q \cdot (q+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{p}{2} \cdot \left[2 \cdot 2 + (p-1) \cdot d \right]}{\frac{q}{2} \cdot \left[2 \cdot 2 + (q-1) \cdot d \right]} = \frac{p \cdot (p+1)}{q \cdot (q+1)} \Rightarrow \frac{p \cdot [4 + p \cdot d - d]}{q \cdot [4 + q \cdot d - d]} = \frac{p \cdot (p+1)}{q \cdot (q+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p \cdot [4 + p \cdot d - d]}{q \cdot [4 + q \cdot d - d]} = \frac{p \cdot (p+1)}{q \cdot (q+1)} \ / \cdot \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{4 + p \cdot d - d}{4 + q \cdot d - d} = \frac{p+1}{q+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 + p \cdot d - d}{4 + q \cdot d - d} = \frac{p+1}{q+1} \ / \cdot (q+1) \cdot (4 + q \cdot d - d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4 + p \cdot d - d) \cdot (q+1) = (4 + q \cdot d - d) \cdot (p+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot q + p \cdot d \cdot q - d \cdot q + 4 + p \cdot d - d = 4 \cdot p + q \cdot d \cdot p - d \cdot p + 4 + q \cdot d - d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot q+p\cdot d\cdot q-d\cdot q+4+p\cdot d-d=4\cdot p+q\cdot d\cdot p-d\cdot p+4+q\cdot d-d\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot q-d\cdot q+p\cdot d=4\cdot p-d\cdot p+q\cdot d\ \Rightarrow\ 4\cdot q-d\cdot q+p\cdot d-4\cdot p+d\cdot p-q\cdot d=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot q-4\cdot p-2\cdot d\cdot q+2\cdot p\cdot d=0\ \Rightarrow\ 4\cdot q-4\cdot p-2\cdot d\cdot q+2\cdot p\cdot d=0\ /:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot q-2\cdot p-d\cdot q+p\cdot d=0\ \Rightarrow\ 2\cdot(q-p)-d\cdot(q-p)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[q-p\neq 0\right]\ \Rightarrow\ 2\cdot(q-p)-d\cdot(q-p)=0\ /:(q-p)\ \Rightarrow\ 2-d=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -d=-2\ \Rightarrow\ -d=-2\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ d=2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 175

Prvi član aritmetičkog niza je 2. Zbroj 7 početnih članova se prema zbroju 9 početnih članova niza odnosi kao 56 : 90. Razlika niza je jednaka

$$A.\ -2\qquad B.\ 2\qquad C.\ 1\qquad D.\ -1$$

Rezultat: B.

Zadatak 176 (Amelia, gimnazija)

Zbroj prvih n članova niza dan je formulom $s_n=5\cdot n^2-4\cdot n.$ Odredite opći član a_n niza.

Rješenje 176

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f:N\rightarrow R.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Ako je zadan niz $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, onda zbroj prvih n članova niza označavamo sa s_n i vrijedi:

$$\begin{aligned}&s_1=a_1\\&s_2=a_1+a_2\\&s_3=a_1+a_2+a_3\\&\vdots\\&s_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n.\end{aligned}$$

Opći član a_n niza jednak je razlici zbroja prvih n članova i zbroja prvih n – 1 članova tog niza.

$$\left.\begin{aligned}s_{n-1}&=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}\\s_n&=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}+a_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}s_{n-1}&=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}\\s_n&=\left(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}\right)+a_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s_n=s_{n-1}+a_n\ \Rightarrow\ s_{n-1}+a_n=s_n\ \Rightarrow\ a_n=s_n-s_{n-1}\ \Rightarrow\ \left[s_n=5\cdot n^2-4\cdot n\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_n=5\cdot n^2-4\cdot n-\left[5\cdot(n-1)^2-4\cdot(n-1)\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_n=5\cdot n^2-4\cdot n-\left[5\cdot\left(n^2-2\cdot n+1\right)-4\cdot(n-1)\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot n^2 - 4 \cdot n - \left[5 \cdot n^2 - 10 \cdot n + 5 - 4 \cdot n + 4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot n^2 - 4 \cdot n - 5 \cdot n^2 + 10 \cdot n - 5 + 4 \cdot n - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot n^2 - 4 \cdot n - 5 \cdot n^2 + 10 \cdot n - 5 + 4 \cdot n - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 10 \cdot n - 5 - 4 \Rightarrow a_n = 10 \cdot n - 9.$$

Vježba 176

Zbroj prvih n članova niza dan je formulom $s_n = 3 \cdot n^2 - 2 \cdot n.$ Odredite opći član a_n niza.

Rezultat: $a_n = 6 \cdot n - 5.$

Zadatak 177 (Amelia, gimnazija)

Zbroj prvih n članova niza dan je formulom $s_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n.$ Odredite niz i dokažite da je to aritmetički niz.

Rješenje 177

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f : N \to R.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Ako je zadan niz $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, onda zbroj prvih n članova niza označavamo sa s_n i vrijedi:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Opći član a_n niza jednak je razlici zbroja prvih n članova i zbroja prvih n – 1 članova tog niza.

$$\left.\begin{array}{l} s_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1} \\ s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1} \\ s_n=\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}\right)+a_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n=s_{n-1}+a_n \Rightarrow s_{n-1}+a_n=s_n \Rightarrow a_n=s_n-s_{n-1} \Rightarrow \left[s_n=2\cdot n^2+3\cdot n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=2\cdot n^2+3\cdot n-\left[2\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=2\cdot n^2+3\cdot n-\left[2\cdot\left(n^2-2\cdot n+1\right)+3\cdot(n-1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=2\cdot n^2+3\cdot n-\left[2\cdot n^2-4\cdot n+2+3\cdot n-3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=2\cdot n^2+3\cdot n-2\cdot n^2+4\cdot n-2-3\cdot n+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=2\cdot n^2+3\cdot n-2\cdot n^2+4\cdot n-2-3\cdot n+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=4\cdot n-2+3 \Rightarrow a_n=4\cdot n+1.$$

Opći član niza je

$$a_n=4\cdot n+1.$$

Prva tri člana niza iznose:

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a_n=4\cdot n+1\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=4\cdot 1+1 \\ a_2=4\cdot 2+1 \\ a_3=4\cdot 3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=4+1 \\ a_2=8+1 \\ a_3=12+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=5 \\ a_2=9 \\ a_3=13 \end{array}\right\} \Rightarrow 5,\ 9,\ 13,\ \ldots$$

Pokažimo da je svaki član ovog niza (osim prvog) jednak aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika), tj. da je niz aritmetički.

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1}=4\cdot(n-1)+1 \\ a_n=4\cdot n+1 \\ a_{n+1}=4\cdot(n+1)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{n-1}=4\cdot n-4+1 \\ a_n=4\cdot n+1 \\ a_{n+1}=4\cdot n+4+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{n-1}=4\cdot n-3 \\ a_n=4\cdot n+1 \\ a_{n+1}=4\cdot n+5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\right] \Rightarrow 4\cdot n+1=\frac{4\cdot n-3+4\cdot n+5}{2} \Rightarrow 4\cdot n+1=\frac{8\cdot n+2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n+1=\frac{2\cdot(4\cdot n+1)}{2} \Rightarrow 4\cdot n+1=\frac{2\cdot(4\cdot n+1)}{2} \Rightarrow 4\cdot n+1=4\cdot n+1.$$

Vježba 177

Zbroj prvih n članova niza dan je formulom $s_n=2\cdot n^2+n.$ Odredite niz i dokažite da je to aritmetički niz.

Rezultat: $a_n=4\cdot n-1$; 3, 7, 11, ... ; niz je aritmetički.

Zadatak 178 (4A, TUPŠ)

Prvi je član geometrijskoga reda 0.5, a suma je toga geometrijskog reda 1.25. Koliko iznosi kvocijent toga geometrijskog reda?

Rješenje 178

Ponovimo!

Geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots$$

konvergentan je (zbroj je konačan) onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1 \Rightarrow -1 < q < 1.$$

Geometrijski red ima stalan kvocijent između susjednih članova. Njegova je suma jednaka

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0.5 \\ s = 1.25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{5}{10} \\ s = \frac{125}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{5}{10} \\ s = \frac{125}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2} \\ s = \frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \right] \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{2 \cdot (1-q)} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{2 \cdot (1-q)} \; / \cdot 4 \cdot (1-q) \Rightarrow 5 \cdot (1-q) = 2 \Rightarrow 5 \cdot (1-q) = 2 \; /: 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - q = \frac{2}{5} \Rightarrow -q = \frac{2}{5} - 1 \Rightarrow -q = \frac{2}{5} - 1 \; / \cdot (-1) \Rightarrow q = -\frac{2}{5} + 1 \Rightarrow q = -\frac{2}{5} + \frac{1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{-2+5}{5} \Rightarrow q = \frac{3}{5} = 0.6.$$

2.inačica

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \Rightarrow s = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow s = \frac{a_1}{1-q} \; / \cdot (1-q) \Rightarrow s \cdot (1-q) = a_1 \Rightarrow s \cdot (1-q) = a_1 \; /: s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - q = \frac{a_1}{s} \Rightarrow -q = \frac{a_1}{s} - 1 \Rightarrow -q = \frac{a_1}{s} - 1 \; / \cdot (-1) \Rightarrow q = -\frac{a_1}{s} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ q = 1 - \frac{a_1}{s} \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} a_1 = 0.5 \\ s = 1.25 \end{array}\right] \ \Rightarrow \ q = 1 - \frac{0.5}{1.25} \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} \text{razlomak} \\ \text{proširimo s } 4 \end{array}\right] \ \Rightarrow \ q = 1 - \frac{2}{5} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ q = \frac{1}{1} - \frac{2}{5} \ \Rightarrow \ q = \frac{5-2}{5} \ \Rightarrow \ q = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Vježba 178

Prvi je član geometrijskoga reda 0.2, a suma je toga geometrijskog reda 1.2. Koliko iznosi kvocijent toga geometrijskog reda?

Rezultat: $q = \frac{5}{6}.$

Zadatak 179 (Ana, gimnazija)

Ako je $a_1 = \frac{1}{5}$ te $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ za $n > 1,$ izrazi a_n kao funkciju od n.

Rješenje 179

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Funkcija a kojoj je domena skup N zove se niz ili slijed. Niz realnih brojeva je funkcija koja svakom prirodnom broju pridružuje realni broj.

$$a : N \rightarrow R.$$

Vrijednost funkcije $a(n),\ n \in N,$ tj. brojeve a(1), a(2), a(3), … uobičajeno označujemo a_1, a_2, a_3, … i zovemo članovi niza. Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Kažemo da je n – ti član niza a_n funkcija svog indeksa n.

$$a_n = a(n).$$

Prirodan broj je paran ako je višekratnik broja 2, tj. ako je djeljiv brojem 2 bez ostatka, a neparan ako nije paran.
Napišimo nekoliko članova niza.

$$a_1 = \frac{1}{5},$$

$$a_2 = \left[a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \right] = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{5}} = 5,$$

$$a_3 = \left[a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \right] = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{5},$$

$$a_4 = \left[a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \right] = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{5}} = 5 \text{ itd.}$$

Vidi se ako je indeks n neparan broj onda je $a_n = \frac{1}{5},$ ako je indeks n paran broj onda je $a_n = 5.$

Dakle, vrijedi:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{5}, \ n \text{ je neparan broj} \\ 5, \ n \text{ je paran broj.} \end{cases}$$

Vježba 179

Ako je $a_1 = \frac{1}{6}$ te $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ za $n > 1$, izrazi a_n kao funkciju od n.

Rezultat: $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{6}, \ n \text{ je neparan broj} \\ 6, \ n \text{ je paran broj.} \end{cases}$$

Zadatak 180 (Orla, ekonomska škola)

Nađi zbroj svih parnih brojeva od 100 do 1000.

Rješenje 180

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Brojevi 2, 4, 6, 8, … su parni prirodni brojevi. Oni su djeljivi brojem 2.
Zbroj prvih n prirodnih brojeva.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo zbroj svih parnih prirodnih brojeva od 100 do 1000.

$$100 + 102 + 104 + 106 + 108 + \dots + 998 + 1000 = 2 \cdot (50 + 51 + 52 + 53 + 54 + \dots + 499 + 500) =$$

$$= 2 \cdot \left[(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 500) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 49)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{500 \cdot (500+1)}{2} - \frac{49 \cdot (49+1)}{2}\right] = 2 \cdot \left[\frac{500 \cdot 501}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2}\right] = 500 \cdot 501 - 49 \cdot 50 = 248\,050.$$

2.inačica

Uočimo da je skup svih parnih brojeva od 100 do 1000 aritmetički niz. Prvi član je $a_1 = 100$, a posljednji $a_n = 1000$. Razlika iznosi d = 2 jer parni brojevi rastu za 2.

Broj članova niza odredit ćemo pomoću formule za opći član niza.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \;/ \cdot \frac{1}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n = 1000 \\ a_1 = 100 \\ d = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow n = \frac{1000 - 100}{2} + 1 \Rightarrow n = 451.$$

Zbroj svih parnih brojeva od 100 do 1000 iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n = 451 \\ a_1 = 100 \\ a_n = 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \right] \Rightarrow s_{451} = \frac{451}{2} \cdot \left[100 + 1000 \right] \Rightarrow s_{451} = 248\,050.$$

Vježba 180

Nađi zbroj svih parnih brojeva od 2 do 1000.

Rezultat: 250500.