Zadatak 181 (Orla, ekonomska škola)

Nađi zbroj svih brojeva između 2345 i 5462 djeljivih s 23.

Rješenje 181

Ponovimo!

Prirodan broj b djeljiv je prirodnim brojem a ako postoji prirodan broj k takav da je

$$b = k \cdot a.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Moramo naći brojeve djeljive s 23, veće od 2345, a manje od 5462.

Tražimo najmanji četveroznamenkasti broj koji je djeljiv s 23, a veći je od 2345.

$$2345 : 23 = 101.9567$$

$$2346 : 23 = 102$$

Tražimo najveći četveroznamenkasti broj koji je djeljiv s 23, a manji je od 5462.

$$5462 : 23 = 237.4783$$

$$5461 : 23 = 237.4348$$

$$5460 : 23 = 237.3913$$

$$5459 : 23 = 237.3478$$

$$5458 : 23 = 237.3043$$

$$5457 : 23 = 237.2609$$

$$5456 : 23 = 237.2174$$

$$5455 : 23 = 237.1739$$

$$5454 : 23 = 237.1304$$

$$5453 : 23 = 237.0870$$

$$5452 : 23 = 237.0435$$

$$5451 : 23 = 237$$

Dakle, riječ je o aritmetičkom nizu. Prvi član je $a_1 = 2346$, a posljednji $a_n = 5451$. Razlika iznosi $d = 23$ jer niz čine brojevi djeljivi s 23.

Broj članova niza odredit ćemo pomoću formule za opći član niza.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\Rightarrow\; a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \;\Rightarrow\; (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \;\Rightarrow\; (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \;/ \cdot \frac{1}{d} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1=\frac{a_n-a_1}{d} \Rightarrow n=\frac{a_n-a_1}{d}+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_n=5451 \\ a_1=2346 \\ d=23 \end{array}\right] \Rightarrow n=\frac{5451-2346}{23}+1 \Rightarrow n=136.$$

Zbroj iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n=136 \\ a_1=2346 \\ a_n=5451 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right]\right] \Rightarrow s_{136}=\frac{136}{2}\cdot\left[2346+5451\right] \Rightarrow s_{136}=530196.$$

Vježba 181

Nađi zbroj svih brojeva između 2345 i 5457 djeljivih s 23.

Rezultat: 530196.

Zadatak 182 (Borna, srednja škola)

Zadana su četiri broja. Prva tri čine geometrijski niz, a posljednja tri aritmetički niz. Zbroj prvoga i četvrtoga broja jednak je 32, a zbroj drugoga i trećega broja jednak je 24. Odredite zadane brojeve.

Rješenje 182

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; a_5-a_4=d \;,\; a_6-a_5=d \;,\; \dots \;,\; a_n-a_{n-1}=d \;\dots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \;,\; n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2\cdot a_n=a_{n-1}+a_{n+1}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q\neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

1.inačica

Neka su a, b, c i d traženi brojevi. Prema uvjetima zadatka možemo zapisati sljedeće jednadžbe:

- prva tri broja čine geometrijski niz

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Rightarrow b^2=a\cdot c$$

- posljednja tri broja čine aritmetički niz

$$c-b=d-c \Rightarrow 2\cdot c=b+d$$

- zbroj prvoga i četvrtoga broja jednak je 32

$$a+d=32$$

- zbroj drugoga i trećega broja jednak je 24

$$b+c=24.$$

Promatramo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a+d=32 \\ b+c=24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow a+d+b+c=56 \Rightarrow (a+c)+(b+d)=56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet aritmetičkog niza} \\ 2\cdot c=b+d \end{bmatrix} \Rightarrow (a+c)+2\cdot c=56 \Rightarrow a+c+2\cdot c=56 \Rightarrow a+3\cdot c=56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=56-3\cdot c.$$

Iz jednadžbe

$$b+c=24$$

slijedi

$$b=24-c.$$

Pomoću sustava jednadžbi izračunamo c.

$$\left.\begin{matrix} b=24-c \\ a=56-3\cdot c \\ b^2=a\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow (24-c)^2=(56-3\cdot c)\cdot c \Rightarrow 576-48\cdot c+c^2=56\cdot c-3\cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 576-48\cdot c+c^2-56\cdot c+3\cdot c^2=0 \Rightarrow 4\cdot c^2-104\cdot c+576=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot c^2-104\cdot c+576=0 \;/:4 \Rightarrow c^2-26\cdot c+144=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} c^2-26\cdot c+144=0 \\ a=1 \;,\; b=-26 \;,\; c=144 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=-26 \;,\; c=144 \\ c_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_{1,2}=\frac{-(-26)\pm\sqrt{(-26)^2-4\cdot1\cdot144}}{2\cdot1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{676-576}}{2} \Rightarrow c_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow c_{1,2}=\frac{26\pm10}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1=\frac{26+10}{2} \\ c_2=\frac{26-10}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = \frac{36}{2} \\ c_2 = \frac{16}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = \frac{36}{2} \\ c_2 = \frac{16}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = 18 \\ c_2 = 8 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva skupa rješenja.

- Za $c_1 = 18$ izračunamo a_1, b_1, d_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 56 - 3 \cdot c_1 \\ b_1 = 24 - c_1 \\ d_1 = 32 - a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 56 - 3 \cdot c_1 \\ b_1 = 24 - c_1 \\ d_1 = 32 - \left(56 - 3 \cdot c_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 56 - 3 \cdot c_1 \\ b_1 = 24 - c_1 \\ d_1 = 32 - 56 + 3 \cdot c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 56 - 3 \cdot c_1 \\ b_1 = 24 - c_1 \\ d_1 = -24 + 3 \cdot c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[c_1 = 18 \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 56 - 3 \cdot 18 \\ b_1 = 24 - 18 \\ d_1 = -24 + 3 \cdot 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 56 - 54 \\ b_1 = 6 \\ d_1 = -24 + 54 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ b_1 = 6 \\ d_1 = 30 \end{array}\right\}.$$

Brojevi su:

a_1	b_1	c_1	d_1
2	6	18	30

- Za $c_2 = 8$ izračunamo a_2, b_2, d_2.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 56 - 3 \cdot c_2 \\ b_2 = 24 - c_2 \\ d_2 = 32 - a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 56 - 3 \cdot c_2 \\ b_2 = 24 - c_2 \\ d_2 = 32 - \left(56 - 3 \cdot c_2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 56 - 3 \cdot c_2 \\ b_2 = 24 - c_2 \\ d_2 = 32 - 56 + 3 \cdot c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 56 - 3 \cdot c_2 \\ b_2 = 24 - c_2 \\ d_2 = -24 + 3 \cdot c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[c_2 = 8 \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 56 - 3 \cdot 8 \\ b_2 = 24 - 8 \\ d_2 = -24 + 3 \cdot 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 56 - 24 \\ b_2 = 16 \\ d_2 = -24 + 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 32 \\ b_2 = 16 \\ d_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Brojevi su:

a_2	b_2	c_2	d_2
32	16	8	0

2.inačica

Neka su a, b, c i d traženi brojevi. Prva tri broja čine geometrijski niz (kvocijent je q) pa ih možemo zapisati na ovaj način:

$$a = a \;\;,\;\; b = a \cdot q \;\;,\;\; c = a \cdot q^2.$$

Posljednja tri broja su članovi aritmetičkog niza za koje vrijedi:

$$d - c = c - b \Rightarrow d = c - b + c \Rightarrow d = 2 \cdot c - b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = a \cdot q^2 \\ b = a \cdot q \end{array}\right] \Rightarrow d = 2 \cdot a \cdot q^2 - a \cdot q.$$

Dakle, tražene brojeve možemo zapisati na sljedeći način:

$$a \;\;,\;\; a \cdot q \;\;,\;\; a \cdot q^2 \;\;,\;\; 2 \cdot a \cdot q^2 - a \cdot q.$$

Iz uvjeta zadatka smijemo napisati dvije jednadžbe:

- zbroj prvoga i četvrtoga broja jednak je 32

$$a + 2 \cdot a \cdot q^2 - a \cdot q = 32$$

- zbroj drugoga i trećega broja jednak je 24

$$a \cdot q + a \cdot q^2 = 24.$$

Promatramo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a + 2 \cdot a \cdot q^2 - a \cdot q = 32 \\ a \cdot q + a \cdot q^2 = 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a \cdot q^2 - a \cdot q + a = 32 \\ a \cdot q^2 + a \cdot q = 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot \left(2 \cdot q^2 - q + 1\right) = 32 \\ a \cdot \left(q^2 + q\right) = 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a \cdot \left(2 \cdot q^2 - q + 1\right)}{a \cdot \left(q^2 + q\right)} = \frac{32}{24} \Rightarrow \frac{a \cdot \left(2 \cdot q^2 - q + 1\right)}{a \cdot \left(q^2 + q\right)} = \frac{32}{24} \Rightarrow \frac{2 \cdot q^2 - q + 1}{q^2 + q} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot q^2 - q + 1}{q^2 + q} = \frac{4}{3} \;/ \cdot 3 \cdot \left(q^2 + q\right) \Rightarrow 3 \cdot \left(2 \cdot q^2 - q + 1\right) = 4 \cdot \left(q^2 + q\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot q^2 - 3 \cdot q + 3 = 4 \cdot q^2 + 4 \cdot q \Rightarrow 6 \cdot q^2 - 3 \cdot q + 3 - 4 \cdot q^2 - 4 \cdot q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot q^2 - 7 \cdot q + 3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot q^2 - 7 \cdot q + 3 = 0 \\ a = 2 \;,\; b = -7 \;,\; c = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 2 \;,\; b = -7 \;,\; c = 3 \\ q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \frac{7+5}{4} \\ q_2 = \frac{7-5}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \frac{12}{4} \\ q_2 = \frac{2}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \frac{12}{4} \\ q_2 = \frac{2}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = 3 \\ q_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Postoje dva skupa rješenja.

- Izračunamo a za q = 3.

$$\left.\begin{matrix} a \cdot \left(q^2 + q\right) = 24 \\ q = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot \left(3^2 + 3\right) = 24 \Rightarrow a \cdot (9 + 3) = 24 \Rightarrow 12 \cdot a = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot a = 24 \;/ : 12 \Rightarrow a = 2.$$

Brojevi b, c i d iznose:

$$\left.\begin{matrix} b = a \cdot q \\ c = a \cdot q^2 \\ d = 2 \cdot a \cdot q^2 - a \cdot q \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 2 \\ q = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = 2 \cdot 3 \\ c = 2 \cdot 3^2 \\ d = 2 \cdot 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = 6 \\ c = 2 \cdot 9 \\ d = 4 \cdot 9 - 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} b = 6 \\ c = 18 \\ d = 30 \end{matrix}\right\}.$$

Traženi brojevi su:

2, 6, 18, 30.

- Izračunamo a za $q = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot\left(q^2+q\right)=24 \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)=24 \Rightarrow a\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=24 \Rightarrow a\cdot\frac{1+2}{4}=24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\frac{3}{4}=24 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot a=24 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot a=24 \,/\cdot\frac{4}{3} \Rightarrow a=32.$$

Brojevi b, c i d iznose:

$$\left.\begin{array}{l} b=a\cdot q \\ c=a\cdot q^2 \\ d=2\cdot a\cdot q^2-a\cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=32 \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=32\cdot\frac{1}{2} \\ c=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ d=2\cdot 32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-32\cdot\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\frac{32}{1}\cdot\frac{1}{2} \\ c=\frac{32}{1}\cdot\frac{1}{4} \\ d=\frac{64}{1}\cdot\frac{1}{4}-\frac{32}{1}\cdot\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\frac{32}{1}\cdot\frac{1}{2} \\ c=\frac{32}{1}\cdot\frac{1}{4} \\ d=\frac{64}{1}\cdot\frac{1}{4}-\frac{32}{1}\cdot\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=16 \\ c=8 \\ d=16-16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=16 \\ c=8 \\ d=0 \end{array}\right\}.$$

Traženi brojevi su:

32, 16, 8, 0.

Zadatak ima dva skupa rješenja:

2, 6, 18, 30 i 32, 16, 8, 0.

Vježba 182

Zadana su četiri broja. Prva tri čine geometrijski niz, a posljednja tri aritmetički niz. Zbroj prvoga i četvrtoga broja jednak je 14, a zbroj drugoga i trećega broja jednak je 12. Odredite zadane brojeve.

Rezultat: 2, 4, 8, 12 i $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$.

Zadatak 183 (Lana, srednja škola)

Zlatko je odlučio štedjeti. Prvi je dan u kasicu ubacio 1 kunu. Svaki sljedeći dan ubacit će 50 lipa više nego što je ubacio prethodnog dana. Koliko će ukupno kuna uštedjeti na taj način za 45 dana?

Rješenje 183

Ponovimo!

$$1\ kn=100\ lp.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right].$$

Uočimo da se u zadatku radi o aritmetičkom nizu. Prvi član je a_1 = 1 kn, a razlika d = 50 lp = 0.50 kn. Izračunajmo koliko će kuna Zlatko uštedjeti za 45 dana.

$$\left.\begin{array}{l} n=45 \\ a_1=1 \\ d=0.50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right] \right] \Rightarrow s_{45}=\frac{45}{2}\cdot\left[2\cdot 1+(45-1)\cdot 0.50\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{45}=\frac{45}{2}\cdot\left[2+44\cdot 0.50\right] \Rightarrow s_{45}=\frac{45}{2}\cdot\left[2+22\right] \Rightarrow s_{45}=\frac{45}{2}\cdot 24 \Rightarrow s_{45}=\frac{45}{2}\cdot\frac{24}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{45}=\frac{45}{2}\cdot\frac{24}{1} \Rightarrow s_{45}=45\cdot 12 \Rightarrow s_{45}=540\ kn.$$

Vježba 183

Zlatko je odlučio štedjeti. Prvi je dan u kasicu ubacio 1 kunu. Svaki sljedeći dan ubacit će 50 lipa više nego što je ubacio prethodnog dana. Koliko će ukupno kuna uštedjeti na taj način za 11 dana?

Rezultat: 38.50 kn.

Zadatak 184 (Tomislav, srednja škola)

Koliki je umnožak drugog, osmog i šesnaestog člana niza s općim članom $a_n=\sqrt{n}$.

$A.\ 16 \qquad B.\ 36 \qquad C.\ 24 \qquad D.\ 48$

Rješenje 184

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f : N \rightarrow R.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n.

$$a_2\cdot a_8\cdot a_{16}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{16} \Rightarrow a_2\cdot a_8\cdot a_{16}=\sqrt{2\cdot 8\cdot 16} \Rightarrow a_2\cdot a_8\cdot a_{16}=\sqrt{16\cdot 16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2\cdot a_8\cdot a_{16}=\sqrt{16^2} \Rightarrow a_2\cdot a_8\cdot a_{16}=16.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 184

Koliki je umnožak četvrtog i dvadeset petog člana niza s općim članom $a_n=\sqrt{n}$.

$A.\ 8 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 12 \qquad D.\ 6$

Rezultat: B.

Zadatak 185 (Maturantica, gimnazija)

Drugi član geometrijskog niza jednak je 3, a peti član istog niza je 12. Odredimo osmi član ovog niza.

Rješenje 185

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Svaki član niza (osim prvoga) jednak je geometrijskoj sredini članova koji prethodi i člana koji slijedi promatrani član. Slično vrijedi i za članove a_{n-k} i a_{n+k} simetrično raspoređene oko člana a_n.

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k} \ , \ k < n.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \\ a_5 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q = 3 \\ a_1 \cdot q^4 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = \frac{12}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot q^4}{\cancel{a_1} \cdot q} = \frac{12}{3} \Rightarrow q^3 = 4 \Rightarrow q^3 = 4 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow q = \sqrt[3]{4}.$$

Računamo a_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q = 3 \\ q = \sqrt[3]{4} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \cdot \sqrt[3]{4} = 3 \Rightarrow a_1 \cdot \sqrt[3]{4} = 3 \ / \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \ , \ q = \sqrt[3]{4} \\ a_8 = a_1 \cdot q^7 \end{array}\right\} \Rightarrow a_8 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^7 \Rightarrow a_8 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8 = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^6 \Rightarrow a_8 = 3 \cdot \sqrt[3]{4^6} \Rightarrow a_8 = 3 \cdot 4^2 \Rightarrow a_8 = 3 \cdot 16 \Rightarrow a_8 = 48.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \\ a_5 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \\ a_1 \cdot q^4 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \\ \left(a_1 \cdot q\right) \cdot q^3 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \\ a_2 \cdot q^3 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot q^3 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot q^3 = 12 \ / : 3 \Rightarrow q^3 = 4.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = 12 \ , \ q^3 = 4 \\ a_8 = a_1 \cdot q^7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_5 = 12 \ , \ q^3 = 4 \\ a_8 = \left(a_1 \cdot q^4\right) \cdot q^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_5 = 12 \ , \ q^3 = 4 \\ a_8 = a_5 \cdot q^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8 = 12 \cdot 4 \Rightarrow a_8 = 48.$$

3.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \ , \ a_5 = 12 \\ a_5^2 = a_{5-3} \cdot a_{5+3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 3 \ , \ a_5 = 12 \\ a_5^2 = a_2 \cdot a_8 \end{array}\right\} \Rightarrow 12^2 = 3 \cdot a_8 \Rightarrow 144 = 3 \cdot a_8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a_8 = 144 \Rightarrow 3 \cdot a_8 = 144 \ /:3 \Rightarrow a_8 = 48.$$

Vježba 185

Drugi član geometrijskog niza jednak je 1, a peti član istog niza je 8. Odredimo osmi član ovog niza.

Rezultat: 64.

Zadatak 186 (Dino, gimnazija)

Od kojeg člana u nizu (slijedu) $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ su sljedeći članovi manji od 0.01?

Rješenje 186

Ponovimo!

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f : N \to R.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n.
Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

$$a_n < 0.01 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < 0.01 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{n^2+1}{1} > \frac{100}{1} \Rightarrow n^2 + 1 > 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 > 100 - 1 \Rightarrow n^2 > 99 \Rightarrow n^2 > 99 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow n > \sqrt{99} \Rightarrow n > 9.95 \Rightarrow n = 10.$$

Vježba 186

Od kojeg člana u nizu (slijedu) $a_n = \frac{1}{n^2 + 2}$ su sljedeći članovi manji od 0.01?

Rezultat: n = 10.

Zadatak 187 (Mira, gimnazija)

Duljine stranica pravokutnog trokuta su tri uzastopna člana aritmetičkog niza razlike d. Ploština trokuta je:

$A.\ P = d \cdot \sqrt{d^2 + 1}$ $\qquad B.\ P = d \cdot \sqrt{d^2 - 1}$ $\qquad C.\ P = 6 \cdot d^2$ $\qquad D.\ P = 4 \cdot d^2$

Rješenje 187

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \dots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

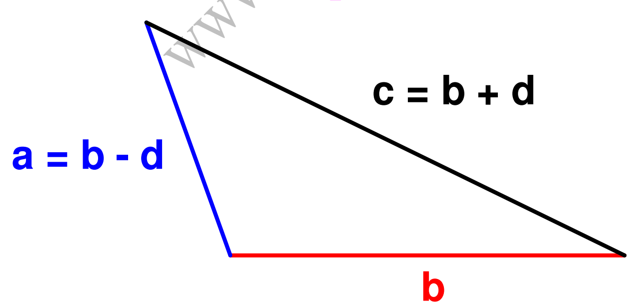
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a\cdot b}{2}.$$



Budući da su duljine stranica pravokutnog trokuta tri uzastopna člana aritmetičkog niza razlike d, možemo zapisati:

$$a = b - d \;,\; b \;,\; c = b + d,$$

gdje su a i b duljine kateta, a c je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Za pravokutni trokut vrijedi Pitagorin poučak zbog čega je

$$a^2 + b^2 = c^2 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a = b - d \\ c = b + d \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; (b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b^2 - 2\cdot b\cdot d + d^2 + b^2 = b^2 + 2\cdot b\cdot d + d^2 \;\Rightarrow\; b^2 - 2\cdot b\cdot d + d^2 + b^2 = b^2 + 2\cdot b\cdot d + d^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -2\cdot b\cdot d + b^2 = 2\cdot b\cdot d \;\Rightarrow\; -2\cdot b\cdot d + b^2 - 2\cdot b\cdot d = 0 \;\Rightarrow\; b^2 - 4\cdot b\cdot d = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \cdot (b - 4 \cdot d) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 0 \text{ nema smisla} \\ b - 4 \cdot d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b - 4 \cdot d = 0 \Rightarrow b = 4 \cdot d.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{array}{l} b = 4 \cdot d \\ a = b - d \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4 \cdot d - d \Rightarrow a = 3 \cdot d.$$

Ploština pravokutnog trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \cdot d \\ b = 4 \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \right] \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot d \cdot 4 \cdot d \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot d \cdot 4 \cdot d \Rightarrow P = 6 \cdot d^2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 187

Duljine stranica pravokutnog trokuta su tri uzastopna člana aritmetičkog niza razlike 2. Ploština trokuta je:

$$A.\ P = 2 \cdot \sqrt{5} \qquad B.\ P = 2 \cdot \sqrt{3} \qquad C.\ P = 24 \qquad D.\ P = 16$$

Rezultat: C.

Zadatak 188 (4A, 4B, TUPŠ)

Na šahovskoj ploči dimenzije 8 x 8 stavljamo zrna riže. Na prvo polje stavljamo tri zrna, na drugo dva zrna više nego na prvo, na treće dva zrna više nego na drugo i tako redom. Koliko smo ukupno stavili zrna riže na šahovsku ploču?

Rješenje 188

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

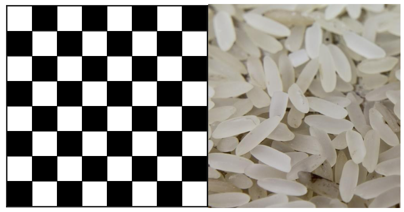
Ako se na prvo polje stave tri zrna riže, a na svako sljedeće dva zrna više, riječ je o aritmetičkom nizu. Budući da šahovska ploča dimenzije 8 x 8 ima 64 polja (kvadrata), slijedi:

$$n = 64 \ , \ a_1 = 3 \ , \ d = 2.$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 64 \\ a_1 = 3 \\ d = 2 \end{array} \right] \Rightarrow s_{64} = \frac{64}{2} \cdot \left[2 \cdot 3 + (64 - 1) \cdot 2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{64} = \frac{64}{2} \cdot \left[2 \cdot 3 + (64 - 1) \cdot 2 \right] \Rightarrow s_{64} = 32 \cdot \left[6 + 63 \cdot 2 \right] \Rightarrow s_{64} = 32 \cdot \left[6 + 126 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{64} = 32 \cdot 132 \Rightarrow s_{64} = 4\,224.$$



Vježba 188

Na šahovskoj ploči dimenzije 8 x 8 stavljamo zrna riže. Na prvo polje stavljamo dva zrna, na drugo dva zrna više nego na prvo, na treće dva zrna više nego na drugo i tako redom. Koliko smo ukupno stavili zrna riže na šahovsku ploču?

Rezultat: 4160.

Zadatak 189 (Marin, srednja škola)

Zbroj 30 uzastopnih parnih prirodnih brojeva iznosi 1230. Koji je od njih najveći broj?

Rješenje 189

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Prirodan broj je paran ako je višekratnik broja 2, odnosno ako je djeljiv brojem 2 bez ostatka, a neparan ako nije paran. Parni prirodni brojevi su: 2, 4, 6, 8, 10, … , 2 · n (n je prirodan broj), …

Budući da su zadani uzastopni parni prirodni brojevi, riječ je o aritmetičkom nizu čija je razlika d = 2.

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \Rightarrow \left[n = 30 \right] \Rightarrow s_{30} = \frac{30}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (30-1) \cdot d \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{30} = \frac{30}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 29 \cdot d \right] \Rightarrow s_{30} = 15 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 29 \cdot d \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} s_{30} = 1230 \\ d = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1230 = 15 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 29 \cdot 2 \right] \Rightarrow 1230 = 15 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 58 \right] \Rightarrow 15 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 58 \right] = 1230 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 58 \right] = 1230 \ /:15 \Rightarrow 2 \cdot a_1 + 58 = 82 \Rightarrow 2 \cdot a_1 = 82 - 58 \Rightarrow 2 \cdot a_1 = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a_1 = 24 \ /:2 \Rightarrow a_1 = 12.$$

Najveći po redu je trideseti član.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} n = 30 \\ a_1 = 12 \\ d = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{30} = 12 + (30-1) \cdot 2 \Rightarrow a_{30} = 12 + 29 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{30} = 12 + 58 \Rightarrow a_{30} = 70.$$

Vježba 189

Zbroj 30 uzastopnih parnih prirodnih brojeva iznosi 1230. Koji je od njih najmanji broj?

Rezultat: 12.

Zadatak 190 (Kiki, gimnazija)

Godine starosti petero braće čine aritmetički niz. Zbroj godina najstarije dvojice jednak je zbroju godina ostale trojice, dok svi osim najmlađeg imaju ukupno 78 godina. Koliko godina ima najmlađi brat?

Rješenje 190

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Neka su a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 godine braće redom po starosti, od najmlađeg do najstarijeg. To su članovi aritmetičkog niza.

Iz uvjeta zadatka dobije se sustav jednadžbi:

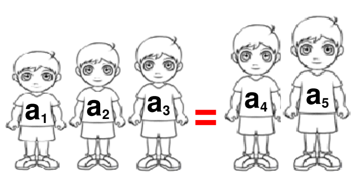
$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 78 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2 \cdot d = a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 4 \cdot d \\ a_1 + d + a_1 + 2 \cdot d + a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 4 \cdot d = 78 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2 \cdot d = a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 4 \cdot d \\ 4 \cdot a_1 + 10 \cdot d = 78 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \cdot d \\ 4 \cdot a_1 + 10 \cdot d = 78 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot d + 10 \cdot d = 78 \Rightarrow 16 \cdot d + 10 \cdot d = 78 \Rightarrow 26 \cdot d = 78 \Rightarrow 26 \cdot d = 78 \ /: 26 \Rightarrow d = 3.$$

Računamo godine starosti najmlađeg brata.

$$\left.\begin{array}{l} d = 3 \\ a_1 = 4 \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = 4 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 12.$$



Vježba 190

Godine starosti petero braće čine aritmetički niz. Zbroj godina najstarije dvojice jednak je zbroju godina ostale trojice, dok svi osim najmlađeg imaju ukupno 78 godina. Koliko godina ima najstariji brat?

Rezultat: 24.

Zadatak 191 (Dora, gimnazija)

U aritmetičkom nizu sastavljenom od 4 različita člana a_1, a_2, a_3, a_4 prvi član je $a_1 = 1$. Izostavimo li drugi član niza, preostala tri člana a_1, a_3, a_4 tvore geometrijski niz. Koliki je zbroj svih članova aritmetičkog niza?

Rješenje 191

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalan i iznosi q. Broj q zovemo kvocijent (količnik) geometrijskog niza.

$$\frac{a_2}{a_1} = q \ , \ \frac{a_3}{a_2} = q \ , \ \frac{a_4}{a_3} = q \ , \ \frac{a_5}{a_4} = q \ , \ \frac{a_6}{a_5} = q \ , \ \dots \ \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \ \dots$$

Svaki član geometrijskog niza (osim prvog) jednak je geometrijskoj sredini susjednih članova (prethodnika i sljedbenika).

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \ \Rightarrow \ a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

Neka su zadana prva četiri člana aritmetičkog niza:

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

to jest

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2 \cdot d, a_1 + 3 \cdot d.$$

Ako je $a_1 = 1$ tada niz glasi:

$$1, 1 + d, 1 + 2 \cdot d, 1 + 3 \cdot d.$$

Izostavimo li drugi član niza preostala tri člana

$$1, 1 + 2 \cdot d, 1 + 3 \cdot d$$

čine geometrijski niz za koji vrijedi:

$$(1 + 2 \cdot d)^2 = 1 \cdot (1 + 3 \cdot d) \ \Rightarrow \ 1 + 4 \cdot d + 4 \cdot d^2 = 1 + 3 \cdot d \ \Rightarrow \ 1 + 4 \cdot d + 4 \cdot d^2 = 1 + 3 \cdot d \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4 \cdot d + 4 \cdot d^2 = 3 \cdot d \ \Rightarrow \ 4 \cdot d + 4 \cdot d^2 - 3 \cdot d = 0 \ \Rightarrow \ 4 \cdot d^2 + d = 0 \ \Rightarrow \ d \cdot (4 \cdot d + 1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d=0 \text{ nema smisla} \\ 4\cdot d+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\cdot d+1=0 \Rightarrow 4\cdot d=-1 \Rightarrow 4\cdot d=-1 \,/:4 \Rightarrow d=-\frac{1}{4}.$$

Računamo vrijednosti članova aritmetičkog niza.

$$\left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=1+d \\ a_3=1+2\cdot d \\ a_4=1+3\cdot d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[d=-\frac{1}{4}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=1+\left(-\frac{1}{4}\right) \\ a_3=1+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ a_4=1+3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=1-\frac{1}{4} \\ a_3=1-\frac{2}{4} \\ a_4=1-\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=\frac{1}{1}-\frac{1}{4} \\ a_3=\frac{1}{1}-\frac{2}{4} \\ a_4=\frac{1}{1}-\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=\frac{4-1}{4} \\ a_3=\frac{4-2}{4} \\ a_4=\frac{4-3}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=\frac{3}{4} \\ a_3=\frac{2}{4} \\ a_4=\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=\frac{3}{4} \\ a_3=\frac{2}{4} \\ a_4=\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=\frac{3}{4} \\ a_3=\frac{1}{2} \\ a_4=\frac{1}{4} \end{matrix}\right\}.$$

Zbroj članova iznosi:

$$a_1+a_2+a_3+a_4=1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{4+3+2+1}{4} \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{10}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{10}{4} \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{5}{2}=2.5.$$

Vježba 191

U aritmetičkom nizu sastavljenom od 4 različita člana a_1, a_2, a_3, a_4 prvi član je $a_1 = 1$. Izostavimo li drugi član niza, preostala tri člana a_1, a_3, a_4 tvore geometrijski niz. Koliki je umnožak svih članova aritmetičkog niza?

Rezultat: $\frac{3}{32}.$

Zadatak 192 (Ivana, gimnazija)

Zbroj tri uzastopna člana aritmetičkog niza je 33, a umnožak 1232. Koji je najveći član niza?

Rješenje 192

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; a_5-a_4=d \;,\; a_6-a_5=d \;,\; \ldots \;,\; a_n-a_{n-1}=d \;\ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \;,\; n\ge 2.$$

Ako je d > 0 niz je rastući, tj. $a_{n+1} > a_n$. Ako je d < 0 niz je padajući, tj. $a_{n+1} < a_n$.
Tri uzastopna člana aritmetičkog niza, zbog jednostavnosti, zapisat ćemo na sljedeći način:

$$a_1 = a_2 - d \ , \ a_2 \ , \ a_3 = a_2 + d.$$

Njihov zbroj je 33 pa izračunamo srednji član a_2.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33 \Rightarrow a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 33 \Rightarrow a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a_2 = 33 \Rightarrow 3 \cdot a_2 = 33 \ /: 3 \Rightarrow a_2 = 11.$$

Isto tako radimo i za umnožak ova tri člana niza koji iznosi 1232.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1232 \Rightarrow (a_2 - d) \cdot a_2 \cdot (a_2 + d) = 1232 \Rightarrow \left[a_2 = 11 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (11 - d) \cdot 11 \cdot (11 + d) = 1232 \Rightarrow (11 - d) \cdot 11 \cdot (11 + d) = 1232 \ /: 11 \Rightarrow (11 - d) \cdot (11 + d) = 112 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 121 - d^2 = 112 \Rightarrow -d^2 = 112 - 121 \Rightarrow -d^2 = -9 \Rightarrow -d^2 = -9 \ / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d^2 = 9 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow d_{1,2} = \pm \sqrt{9} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_1 = 3 \\ d_2 = -3 \end{array} \right\}.$$

Postoje dva aritmetička niza:

- $$\left. \begin{array}{l} a_1 = 11 - d \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 11 + d \end{array} \right\} \Rightarrow \left[d = 3 \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 11 - 3 \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 11 + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 8 \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 14 \end{array} \right\} \Rightarrow 8, 11, 14.$$
- $$\left. \begin{array}{l} a_1 = 11 - d \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 11 + d \end{array} \right\} \Rightarrow \left[d = -3 \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 11 - (-3) \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 11 + (-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 11 - (-3) \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 11 + (-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 11 + 3 \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 11 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_2 = 11 \\ a_3 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 14, 11, 8.$$

Najveći član niza je broj 14, u oba slučaja.

Vježba 192

Zbroj tri uzastopna člana aritmetičkog niza je 33, a umnožak 1232. Koji je najmanji član niza?

Rezultat: 8.

Zadatak 193 (Ivana, gimnazija)

U geometrijskom nizu je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prvih triju članova. Koliki je kvocijent niza?

Rješenje 193

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad ,$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent (količnik) geometrijskog niza.
Ako je q = 1 kažemo da je niz konstantan.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ , \ q \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$S_6 = 3 \cdot S_3 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \Rightarrow a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \ / \cdot \frac{q - 1}{a_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^6 - 1 = 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) \Rightarrow q^6 - 1 = 3 \cdot q^3 - 3 \Rightarrow q^6 - 1 - 3 \cdot q^3 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^6 - 3 \cdot q^3 + 2 = 0 \Rightarrow \left(q^3\right)^2 - 3 \cdot q^3 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ q^3 = t \end{bmatrix} \Rightarrow t^2 - 3 \cdot t + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2 - 3 \cdot t + 2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = 2 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{3+1}{2} \\ t_2 = \dfrac{3-1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{4}{2} \\ t_2 = \dfrac{2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{4}{2} \\ t_2 = \dfrac{2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se na zamjenu.

- $\left.\begin{matrix} q^3 = t \\ t = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q^3 = 2 \Rightarrow q^3 = 2 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow q_1 = \sqrt[3]{2}$ je rješenje.
- $\left.\begin{matrix} q^3 = t \\ t = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q^3 = 1 \Rightarrow q^3 = 1 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow q_2 = \sqrt[3]{1} \Rightarrow q_2 = 1$ nema smisla jer $q \neq 1$.

Vježba 193

U geometrijskom nizu je zbroj prvih triju članova jednak trećini zbroja prvih 6 članova. Koliki je kvocijent niza?

Rezultat: $q = \sqrt[3]{2}.$

Zadatak 194 (Kiki, gimnazija)

Unutarnji kutovi konveksnog n – terokuta (mnogokuta) čine aritmetički niz s razlikom 5°. Odredite n, ako je najveći kut tog n – terokuta 160°.

Rješenje 194

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

Mnogokut (poligon ili n – terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama.

Zbroj unutarnjih kutova mnogokuta sa n stranica dan je formulom:

$$K(n) = (n-2) \cdot 180^{\circ}.$$

Dogovor! Zbog jednostavnosti u pisanju izostavljamo simbol za stupanj.

Preoblikovat ćemo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \\ S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = a_n - (n-1) \cdot d \\ S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_n - (n-1) \cdot d + a_n \right] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_n - (n-1) \cdot d \right].$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} S_n = (n-2) \cdot 180 \\ S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_n - (n-1) \cdot d \right] \end{array}\right\} \Rightarrow (n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_n - (n-1) \cdot d \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_n = 160 \\ d = 5 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot 160 - (n-1) \cdot 5 \right] \Rightarrow (n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2} \cdot \left[320 - 5 \cdot n + 5 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2} \cdot \left[325 - 5 \cdot n \right] \Rightarrow (n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2} \cdot \left[325 - 5 \cdot n \right] \; / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-2) \cdot 360 = n \cdot \left[325 - 5 \cdot n \right] \Rightarrow 360 \cdot n - 720 = 325 \cdot n - 5 \cdot n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 360 \cdot n - 720 - 325 \cdot n + 5 \cdot n^2 = 0 \Rightarrow 5 \cdot n^2 + 35 \cdot n - 720 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot n^2 + 35 \cdot n - 720 = 0 \; /:5 \Rightarrow n^2 + 7 \cdot n - 144 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2 + 7 \cdot n - 144 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 7 \;,\; c = -144 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 7 \;,\; c = -144 \\ n_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-144)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm 25}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{-7 + 25}{2} \\ n_2 = \dfrac{-7 - 25}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{18}{2} \\ n_2 = -\dfrac{32}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{18}{2} \\ n_2 = -\dfrac{32}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 9 \\ n_2 = -16 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 9.$$

Vježba 194

Unutarnji kutovi konveksnog n – terokuta (mnogokuta) čine aritmetički niz s razlikom 5°. Odredite n, ako je najveći kut tog n – terokuta 65°.

Rezultat: n = 3.

Zadatak 195 (Marko, gimnazija)

Zbroj šest uzastopnih prirodnih brojeva je 57. Koliki je njihov najmanji zajednički višekratnik?

Rješenje 195

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Prirodnih brojeva ima bezbroj (beskonačno).

Neposredni prethodnik prirodnog broja je broj za 1 manji od toga broja. Svaki prirodni broj osim broja 1 ima svog prethodnika**.**

Neposredni sljedbenik prirodnog broja je broj za 1 veći od toga broja. Svaki prirodni broj ima svog sljedbenika**.**

Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a, b, c, ... (oznaka nzv(a, b, c, ...)) je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svakim od tih brojeva.

Prirodni brojevi koji su djeljivi samo sa 1 i sa samim sobom zovu se prosti ili prim brojevi.

Brojevi koji imaju više od dva djelitelja su složeni brojevi.

Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva računa se po formuli:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

1.inačica

Neka je zadano šest uzastopnih prirodnih brojeva:

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5.$$

Budući da je njihov zbroj 57, slijedi:

$$n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5=57 \Rightarrow 6\cdot n+15=57 \Rightarrow 6\cdot n=57-15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\cdot n=42 \Rightarrow 6\cdot n=42\ /:6 \Rightarrow n=7.$$

To su brojevi:

- $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$
  - $7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12.$

Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik rastavit ćemo brojeve na proste faktore.

$$7=7$$
$$8=2\cdot 2\cdot 2=2^3$$
$$9=3\cdot 3=3^2$$
$$10=2\cdot 5$$
$$11=11$$
$$12=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3.$$

Najmanji zajednički višekratnik iznosi:

$$nzv(7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12)=7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11=27\,720.$$

2.inačica

Neka je zadano šest uzastopnih prirodnih brojeva:

$$n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3.$$

Budući da je njihov zbroj 57, slijedi:

$$n-2+n-1+n+n+1+n+2+n+3=57 \Rightarrow n-2+n-1+n+n+1+n+2+n+3=57 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\cdot n+3=57 \Rightarrow 6\cdot n=57-3 \Rightarrow 6\cdot n=54 \Rightarrow 6\cdot n=54\ /:6 \Rightarrow n=9.$$

To su brojevi:

- $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$
  - $7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12.$

Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik rastavit ćemo brojeve na proste faktore.

$$7=7$$
$$8=2\cdot 2\cdot 2=2^3$$
$$9=3\cdot 3=3^2$$
$$10=2\cdot 5$$
$$11=11$$
$$12=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3.$$

Najmanji zajednički višekratnik iznosi:

$$nzv(7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12)=7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11=27\,720.$$

3.inačica

Neka je zadano šest uzastopnih prirodnih brojeva:

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5.$$

Budući da je njihov zbroj 57, slijedi:

$$n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5=57 \Rightarrow 6\cdot n+(1+2+3+4+5)=57 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\cdot n+\frac{5\cdot(5+1)}{2}=57 \Rightarrow 6\cdot n+\frac{5\cdot 6}{2}=57 \Rightarrow 6\cdot n+\frac{5\cdot 6}{2}=57 \Rightarrow 6\cdot n+5\cdot 3=57 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\cdot n+15=57 \Rightarrow 6\cdot n=57-15 \Rightarrow 6\cdot n=42 \Rightarrow 6\cdot n=42\ /:6 \Rightarrow n=7.$$

To su brojevi:

- $n, \; n+1, \; n+2, \; n+3, \; n+4, \; n+5$
- $7, \; 8, \; 9, \; 10, \; 11, \; 12.$

Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik rastavit ćemo brojeve na proste faktore.

$$7 = 7$$
$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$
$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$
$$10 = 2 \cdot 5$$
$$11 = 11$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3.$$

Najmanji zajednički višekratnik iznosi:

$$nzv(7, \, 8, \, 9, \, 10, \, 11, \, 12) = 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 27\,720.$$

Vježba 195

Zbroj četiri uzastopna prirodna broja je 22. Koliki je njihov najmanji zajednički višekratnik?

Rezultat: 420.

Zadatak 196 (Katarina, gimnazija)

Zbroj tri broja koji čine rastući geometrijski niz iznosi 126. Ako je srednji član tog niza jednak 24, koliko iznosi najmanji?

Rješenje 196

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1.$$

Geometrijski niz (a_n) je rastući za:

- $a_1 > 0 \quad , \quad q > 1$
- $a_1 < 0 \quad , \quad 0 < q < 1.$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

1.inačica

Neka su zadana tri broja koji čine rastući geometrijski niz

$$a_1, \, a_2, \, a_3,$$

to jest

$$a_1, \; a_2 = a_1 \cdot q, \; a_3 = a_1 \cdot q^2.$$

Njihov zbroj je 126, a srednji član 24 pa vrijedi sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3=126 \\ a_2=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_2\cdot q=126 \\ a_2=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+24+24\cdot q=126 \\ a_2=24 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+24\cdot q=126-24 \\ a_2=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+24\cdot q=102 \\ a_1\cdot q=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+24\cdot q=102 \\ a_1\cdot q=24 \ /:q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+24\cdot q=102 \\ a_1=\frac{24}{q} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{24}{q}+24\cdot q=102 \Rightarrow \frac{24}{q}+24\cdot q=102 \ /\cdot q \Rightarrow 24+24\cdot q^2=102\cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24+24\cdot q^2-102\cdot q=0 \Rightarrow 24\cdot q^2-102\cdot q+24=0 \Rightarrow 24\cdot q^2-102\cdot q+24=0 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot q^2-51\cdot q+12=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12\cdot q^2-51\cdot q+12=0 \\ a=12 \ , \ b=-51 \ , \ c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=12 \ , \ b=-51 \ , \ c=12 \\ q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{-(-51)\pm\sqrt{(-51)^2-4\cdot 12\cdot 12}}{2\cdot 12} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{51\pm\sqrt{2601-576}}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{51\pm\sqrt{2025}}{24} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{51\pm 45}{24} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\frac{51+45}{24} \\ q_2=\frac{51-45}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\frac{96}{24} \\ q_2=\frac{6}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\frac{96}{24} \\ q_2=\frac{6}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=4 \ \text{rastući niz} \\ q_2=\frac{1}{4} \ \text{padajući niz} \end{array}\right\} \Rightarrow q=4.$$

Računamo članove a_1 i a_3 rastućeg geometrijskog niza.

- $\left.\begin{array}{l} q=4 \\ a_2=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q=4 \\ a_1\cdot q=24 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\cdot 4=24 \Rightarrow 4\cdot a_1=24 \ /:4 \Rightarrow a_1=6.$
- $\left.\begin{array}{l} a_2=24 \ , \ q=4 \\ a_3=a_2\cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow a_3=24\cdot 4 \Rightarrow a_3=96.$

Članovi rastućeg geometrijskog niza su:

$$6, \ 24, \ 96$$

pa je najmanji član 6.

2.inačica

Neka su zadana tri broja koji čine rastući geometrijski niz

$$a_1, a_2, a_3,$$

to jest

$$a_1=\frac{a}{q}, \ a_2=a, \ a_3=a\cdot q.$$

Njihov zbroj je 126, a srednji član 24 pa vrijedi sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3=126 \\ a_2=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{q}+a+a\cdot q=126 \\ a=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{24}{q}+24+24\cdot q=126 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{24}{q}+24+24\cdot q=126 \;/\cdot\frac{q}{3} \Rightarrow 8+8\cdot q+8\cdot q^2=42\cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+8\cdot q+8\cdot q^2-42\cdot q=0 \Rightarrow 8\cdot q^2-34\cdot q+8=0 \Rightarrow 8\cdot q^2-34\cdot q+8=0 \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot q^2-17\cdot q+4=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot q^2-17\cdot q+4=0 \\ a=4\ ,\ b=-17\ ,\ c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=4\ ,\ b=-17\ ,\ c=4 \\ q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot 4\cdot 4}}{2\cdot 4} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{225}}{8} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{17\pm 15}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\frac{17+15}{8} \\ q_2=\frac{17-15}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\frac{32}{8} \\ q_2=\frac{2}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\frac{32}{8} \\ q_2=\frac{2}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=4 \text{ rastući niz} \\ q_2=\frac{1}{4} \text{ padajući niz} \end{array}\right\} \Rightarrow q=4.$$

Računamo članove a_1 i a_3 rastućeg geometrijskog niza

- $$\left.\begin{array}{l} a_1=\frac{a}{q} \\ a_2=a \\ a_3=a\cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=24 \\ q=4 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\frac{24}{4} \\ a_2=24 \\ a_3=24\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\frac{24}{4} \\ a_2=24 \\ a_3=24\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=6 \\ a_2=24 \\ a_3=96 \end{array}\right\}.$$

Članovi rastućeg geometrijskog niza su:

6, 24, 96

pa je najmanji član 6.

Vježba 196

Zbroj tri broja koji čine rastući geometrijski niz iznosi 126. Ako je srednji član tog niza jednak 24, koliko iznosi najveći?

Rezultat: 96.

Zadatak 197 (Domagoj, gimnazija)

Između brojeva 33 i 145 interpolirano je 6 brojeva, tako da svih 8 brojeva čine aritmetički niz. Kolika je razlika (diferencija)?

Rješenje 197

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Ako između dva zadana broja a i b treba interpolirati (umetnuti) r brojeva tako da dobiveni niz bude aritmetički, u kojem je a prvi, a b posljednji član niza, razlika se dobije po formuli:

$$d = \frac{b-a}{r+1}.$$

prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

1.inačica

Ako između brojeva 33 i 145 interpoliramo 6 brojeva dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a = 33 \ , \ b = 145 \\ r = 6 \\ d = \frac{b-a}{r+1} \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{145-33}{6+1} \Rightarrow d = \frac{112}{7} \Rightarrow d = \frac{112}{7} \Rightarrow d = 16.$$

2.inačica

Budući da između brojeva 33 i 145 treba umetnuti 6 članova tako da dobiveni niz bude aritmetički, prvi član će biti $a_1 = 33$, a posljednji (osmi) $a_8 = 145$. Računamo razliku pomoću formule za opći član aritmetičkog niza.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \ / \cdot \frac{1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow [n = 8] \Rightarrow d = \frac{a_8 - a_1}{8-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_8 = 145 \\ a_1 = 33 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{145-33}{7} \Rightarrow d = \frac{112}{7} \Rightarrow d = \frac{112}{7} \Rightarrow d = 16.$$

Vježba 197

Između brojeva 2 i 16 interpolirano je 6 brojeva, tako da svih 8 brojeva čine aritmetički niz. Kolika je razlika (diferencija)?

Rezultat: d = 2.

Zadatak 198 (Ana, gimnazija)

Gumena kuglica ispuštena je s visine od 3 m na tvrdu podlogu. Svaki put kada udari u nju odbije se do $\frac{2}{3}$ visine. Koliko iznosi ukupan put (padanja i podizanja) koji prevali kuglica do svog mirovanja?

Rješenje 198

Ponovimo!

Geometrijski red

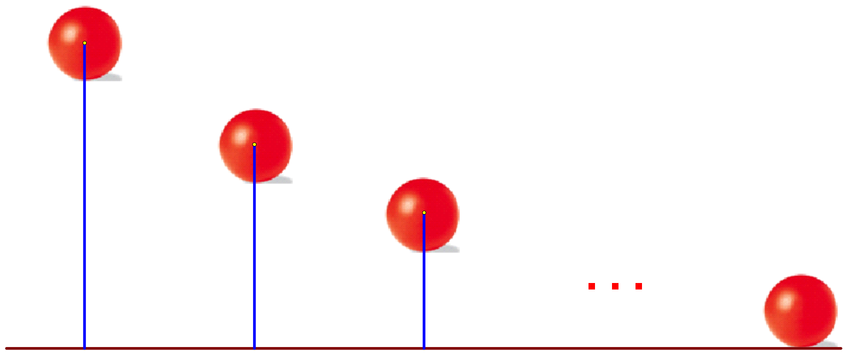
$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$



- Računamo put kuglice samo pri padanju.

Svakim padom na podlogu kuglica se odbije do $\frac{2}{3}$ visine.

Prvi put kuglica je pala s visine: h.

Drugi put kuglica je pala s visine: $\frac{2}{3} \cdot h.$

Treći put kuglica je pala s visine: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot h = \frac{4}{9} \cdot h.$

Četvrti put kuglica je pala s visine: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot h = \frac{8}{27} \cdot h,$ itd.

Ukupan put S_1 pri padanju kuglice jednak je zbroju geometrijskog reda s beskonačno mnogo članova

$$S_1 = h + \frac{2}{3} \cdot h + \frac{4}{9} \cdot h + \frac{8}{27} \cdot h + \dots \quad , \quad q = \frac{2}{3} \text{ kvocijent reda}$$

čiji je iznos

$$S_1 = h \cdot \frac{1}{1-q}.$$

- Računamo put kuglice samo pri podizanju.

Svakim udarom u podlogu kuglica se odbije do $\frac{2}{3}$ visine.

Prvi put kuglica je dosegla visinu $\frac{2}{3} \cdot h$ jer kod podizanja ne može postići početnu visinu h.

Drugi put kuglica je dosegla visinu: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot h = \frac{4}{9} \cdot h.$

Treći put kuglica je dosegla visinu: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot h = \frac{8}{27} \cdot h,$ itd.

Ukupan put S_2 pri podizanju kuglice jednak je zbroju geometrijskog reda s beskonačno mnogo članova

$$S_2 = \frac{2}{3} \cdot h + \frac{4}{9} \cdot h + \frac{8}{27} \cdot h + \dots \quad , \quad q = \frac{2}{3} \text{ kvocijent reda}$$

čiji je iznos

$$S_2 = \frac{2}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Ili

$$S_2 = S_1 - h \Rightarrow S_2 = h \cdot \frac{1}{1-q} - h$$

jer kuglica kod podizanja ne dosegne početnu visinu h.
Ukupan put S koji prevali kuglica do svoga mirovanja iznosi:

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S = h \cdot \frac{1}{1-q} + h \cdot \frac{1}{1-q} - h \Rightarrow S = 2 \cdot h \cdot \frac{1}{1-q} - h \Rightarrow S = h \cdot \left(\frac{2}{1-q} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$= 3\ m \cdot \left(\frac{2}{1-\frac{2}{3}} - 1 \right) = 3\ m \cdot \left(\frac{2}{\frac{1}{1}-\frac{2}{3}} - 1 \right) = 3\ m \cdot \left(\frac{2}{\frac{3-2}{3}} - 1 \right) = 3\ m \cdot \left(\frac{2}{\frac{1}{3}} - 1 \right) = 3\ m \cdot \left(\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{3}} - 1 \right) =$$

$$= 3\ m \cdot (6-1) = 3\ m \cdot 5 = 15\ m.$$

Vježba 198

Gumena kuglica ispuštena je s visine od 6 m na tvrdu podlogu. Svaki put kada udari u nju odbije se do $\frac{2}{3}$ visine. Koliko iznosi ukupan put (padanja i podizanja) koji prevali kuglica do svog mirovanja?

Rezultat: 30 m.

Zadatak 199 (Karlo, srednja škola)

Koliko iznosi zbroj svih troznamenkastih brojeva djeljivih sa 5 i 3?

Rješenje 199

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d\ ,\ a_3 - a_2 = d\ ,\ a_4 - a_3 = d\ ,\ a_5 - a_4 = d\ ,\ a_6 - a_5 = d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n - a_{n-1} = d\ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d\ ,\ n \geq 2.$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodnih brojeva ima bezbroj (beskonačno).
Neposredni sljedbenik prirodnog broja je broj za 1 veći od toga broja. Svaki prirodni broj ima svog sljedbenika**.**
Višekratnik broja n je umnožak tog broja n i nekog prirodnog broja k.
Zbroj prvih n prirodnih brojeva računa se po formuli:

$$1+2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

1.inačica

Traženi prirodni brojevi djeljivi su sa 5 i 3 pa moraju biti višekratnici broja 15, (5 · 3).

$$N=15\cdot n,\ n \text{ je prirodan broj}.$$

Najmanji troznamenkasti broj djeljiv sa 15 je

$$N_1=15\cdot 7=105,$$

a najveći

$$N_2=15\cdot 66=990..$$

Zbroj S svih troznamenkastih brojeva djeljivih sa 5 i 3 iznosi:

$$S=15\cdot 7+15\cdot 8+15\cdot 9+\ldots+15\cdot 66 \Rightarrow S=15\cdot\left[7+8+9+\ldots+66\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=15\cdot\left[(1+2+3+\ldots+66)-(1+2+3+\ldots+6)\right] \Rightarrow S=15\cdot\left[\frac{66\cdot(66+1)}{2}-\frac{6\cdot(6+1)}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=15\cdot\left[\frac{66\cdot 67}{2}-\frac{6\cdot 7}{2}\right] \Rightarrow S=15\cdot\left[\frac{66\cdot 67}{2}-\frac{6\cdot 7}{2}\right] \Rightarrow S=15\cdot\left[33\cdot 67-3\cdot 7\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=15\cdot\left[2211-21\right] \Rightarrow S=15\cdot 2190 \Rightarrow S=32850.$$

2.inačica

Traženi prirodni brojevi djeljivi su sa 5 i 3 pa moraju biti višekratnici broja 15, (5 · 3).

$$N=15\cdot n,\ n \text{ je prirodan broj}.$$

Najmanji troznamenkasti broj djeljiv sa 15 je

$$N_1=15\cdot 7=105,$$

a najveći

$$N_2=15\cdot 66=990..$$

Uočimo riječ je o aritmetičkom nizu čiji je prvi član a_1 = 105, posljednji a_n = 990, a razlika d = 15. Izračunajmo broj članova niza.

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d \Rightarrow a_1+(n-1)\cdot d=a_n \Rightarrow (n-1)\cdot d=a_n-a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)\cdot d=a_n-a_1 \ /\cdot\frac{1}{d} \Rightarrow n-1=\frac{a_n-a_1}{d} \Rightarrow n=\frac{a_n-a_1}{d}+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_n=990 \\ a_1=106 \\ d=15 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\frac{990-105}{15}+1 \Rightarrow n=\frac{885}{15}+1 \Rightarrow n=\frac{885}{15}+1 \Rightarrow n=59+1 \Rightarrow n=60.$$

Zbroj S svih troznamenkastih brojeva djeljivih sa 5 i 3 iznosi:

$$S=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=60 \\ a_1=105 \\ a_n=990 \end{array}\right] \Rightarrow S=\frac{60}{2}\cdot(105+990) \Rightarrow S=\frac{60}{2}\cdot(105+990) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=30\cdot 1095 \Rightarrow S=32850.$$

Vježba 199

Koliko iznosi zbroj svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih sa 5 i 3?

Rezultat: 315.

Zadatak 200 (Lana, gimnazija)

Tri broja čine silazni aritmetički niz. Njihov zbroj je 9. Ako se prvi uveća za 4, niz postaje geometrijski. Koliko iznosi treći broj u nizu?

Rješenje 200

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \dots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \ne 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Neka su zadana tri broja koji čine aritmetički niz.

$$a_1, a_2, a_3.$$

Budući da je niz silazan (padajući) aritmetički niz, možemo zapisati.

$$a_1 = a_2 + d,\; a_2,\; a_3 = a_2 - d \;,\; d > 0.$$

Zbroj članova je 9 pa slijedi:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 9 \Rightarrow a_2 + d + a_2 + a_2 - d = 9 \Rightarrow a_2 + d + a_2 + a_2 - d = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a_2 = 9 \Rightarrow 3 \cdot a_2 = 9 \; /:3 \Rightarrow a_2 = 3.$$

Članovi silaznog aritmetičkog niza glase:

$$a_1 = 3 + d,\; a_2 = 3,\; a_3 = 3 - d.$$

Ako se prvi član uveća za 4 niz postaje geometrijski.

$$a_1 + 4,\; a_2,\; a_3,$$

$$3 + d + 4,\; 3,\; 3 - d,$$

$$7 + d,\; 3,\; 3 - d.$$

Za geometrijski niz vrijedi:

$$3^2=(7+d)\cdot(3-d)\ \Rightarrow$$

$$9=21+3\cdot d-7\cdot d-d^2\ \Rightarrow\ 9-21-3\cdot d+7\cdot d+d^2=0\ \Rightarrow\ d^2+4\cdot d-12=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d^2+4\cdot d-12=0 \\ a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=-12 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=-12 \\ d_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}\Rightarrow d_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2}\Rightarrow d_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{2}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=\dfrac{-4+8}{2} \\ d_2=\dfrac{-4-8}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=\dfrac{4}{2} \\ d_2=-\dfrac{12}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=\dfrac{4}{2} \\ d_2=-\dfrac{12}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=2\ \text{je rješenje} \\ d_2=-6\ \text{nije rješenje jer mora biti}\ d>0 \end{array}\right\}\Rightarrow\ d=2.$$

Treći broj u nizu iznosi:

$$a_3=3-d\ \Rightarrow\ [\,d=2\,]\ \Rightarrow\ a_3=3-2\ \Rightarrow\ a_3=1.$$

Vježba 200

Tri broja čine silazni aritmetički niz. Njihov zbroj je 9. Ako se prvi uveća za 4, niz postaje geometrijski. Koliko iznosi srednji broj u nizu?

Rezultat: 3.