Zadatak 201 (Davor, gimnazija)

Tri prirodna broja koji čine aritmetički niz imaju zbroj 21. Ako im dodamo redom 2, 3 i 9 dobivamo geometrijski niz. Koliki je umnožak početna tri broja?

Rješenje 201

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \ne 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Neka su zadana tri broja koji čine aritmetički niz.

$$a_1, a_2, a_3.$$

Možemo ih zapisati na sljedeći način:

$$a_1 = a_2 - d, \ a_2, \ a_3 = a_2 + d.$$

Zbroj članova je 21 pa slijedi:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21 \Rightarrow a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 21 \Rightarrow a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a_2 = 21 \Rightarrow 3 \cdot a_2 = 21 \ /:3 \Rightarrow a_2 = 7.$$

Članovi aritmetičkog niza glase:

$$a_1 = 7 - d, \ a_2 = 7, \ a_3 = 7 + d.$$

Ako im dodamo redom 2, 3, 9 niz postaje geometrijski.

$$a_1 + 2, \ a_2 + 3, \ a_3 + 9,$$

$$7 - d + 2, \ 7 + 3, \ 7 + d + 9,$$

$$9 - d, \ 10, \ 16 + d.$$

Za geometrijski niz vrijedi:

$$10^2 = (9-d)\cdot(16+d) \Rightarrow$$

$$100 = 144 + 9\cdot d - 16\cdot d - d^2 \Rightarrow 100 - 144 - 9\cdot d + 16\cdot d + d^2 = 0 \Rightarrow d^2 + 7\cdot d - 44 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d^2 + 7\cdot d - 44 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 7 \ , \ c = -44 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = 7 \ , \ c = -44 \\ d_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 1\cdot(-44)}}{2\cdot 1} \Rightarrow d_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+176}}{2} \Rightarrow d_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1,2} = \frac{-7 \pm 15}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d_1 = \dfrac{-7+15}{2} \\ d_2 = \dfrac{-7-15}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d_1 = \dfrac{8}{2} \\ d_2 = -\dfrac{22}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d_1 = \dfrac{8}{2} \\ d_2 = -\dfrac{22}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d_1 = 4 \text{ je rješenje} \\ d_2 = -11 \text{ svi članovi niza nisu prirodni brojevi, nije rješenje} \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = 4.$$

Članovi aritmetičkog niza su:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 7 - d \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 7 + d \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, d = 4 \,] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 7 - 4 \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 7 + 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3,\ 7,\ 11.$$

Umnožak početna tri broja je:

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3 = 3\cdot 7\cdot 11 \Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot a_3 = 231.$$

Vježba 201

Tri prirodna broja koji čine aritmetički niz imaju zbroj 21. Ako im dodamo redom 2, 3 i 9 dobivamo geometrijski niz. Koliki je umnožak konačna tri broja?

Rezultat: 1000.

Zadatak 202 (4A, 4B, TUPŠ)

U jezeru je otkriveno 10 grama algi za koje se zna da utječu na porast populacije rakova. Naseobina algi povećava se 15% tjedno. Populacija rakova u jezeru počinje naglo rasti ako je u njemu više od 10000 grama algi.

a) Koliko će grama algi biti u jezeru tjedan dana nakon što su otkrivene?
b) Koliko će grama algi biti u jezeru nakon 3 tjedna?
c) U kojem će tjednu populacija rakova početi naglo rasti?

Rješenje 202

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a > b \ , \ c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$, $81\ \% = \frac{81}{100}$, $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$, $p\ \% = \frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100}\cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \ge 1.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\boxed{\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \rightarrow \qquad a = b^c}$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\boxed{\log_{10} x = \log x.}$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

a)
Računamo koliko će algi biti u jezeru tjedan dana nakon otkrića.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \ g \\ p = \frac{15}{100} = 0.15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a_2 = a_1 + p \cdot a_1 \right] \Rightarrow a_2 = a_1 + 0.15 \cdot a_1 \Rightarrow a_2 = 1.15 \cdot a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = 1.15 \cdot 10 \ g \Rightarrow a_2 = 11.5 \ g.$$

b)
Ako sa a_1 označimo masu algi na početku prvog tjedna (nakon otkrića) na kraju prvog tjedna njihova masa poveća se 15% i iznosi:

$$a_2 = a_1 + 0.15 \cdot a_1 \Rightarrow a_2 = 1.15 \cdot a_1.$$

Na kraju drugog tjedna masa algi je:

$$a_3 = a_2 + 0.15 \cdot a_2 \Rightarrow a_3 = 1.15 \cdot a_2 \Rightarrow a_3 = 1.15 \cdot 1.15 \cdot a_1 \Rightarrow a_3 = 1.15^2 \cdot a_1 \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot 1.15^2.$$

Na kraju trećeg tjedna masa algi je:

$$a_4 = a_3 + 0.15 \cdot a_3 \Rightarrow a_4 = 1.15 \cdot a_3 \Rightarrow a_4 = 1.15 \cdot 1.15^2 \cdot a_1 \Rightarrow a_4 = 1.15^3 \cdot a_1 \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot 1.15^3.$$

Brojčano to iznosi:

$$a_4 = 10 \ g \cdot 1.15^3 = 15.20875 \ g.$$

c)
Vidimo da se radi o geometrijskom nizu s kvocijentom q = 1.15.

$$a_1 \quad , \quad a_2 = a_1 \cdot 1.15 \quad , \quad a_3 = a_1 \cdot 1.15^2 \quad , \quad a_4 = a_1 \cdot 1.15^3 \quad , \quad \ldots$$

Budući da populacija rakova u jezeru počinje naglo rasti u tjednu kad će u njemu biti više od 10000 grama algi, trebamo izračunati u kojem će se tjednu naseobina algi povećati preko 10000 grama.

$$a_n > 10000 \Rightarrow \left[a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \right] \Rightarrow a_1 \cdot q^{n-1} > 10000 \Rightarrow \left[\begin{matrix} a_1 = 10 \\ q = 1.15 \end{matrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 1.15^{n-1} > 10000 \Rightarrow 10 \cdot 1.15^{n-1} > 10000 \; / : 10 \Rightarrow 1.15^{n-1} > 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{matrix} \right] \Rightarrow 1.15^{n-1} > 1000 \; / \log \Rightarrow \log 1.15^{n-1} > \log 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot \log 1.15 > \log 1000 \Rightarrow (n-1) \cdot \log 1.15 > \log 1000 \; / \cdot \frac{1}{\log 1.15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 > \frac{\log 1000}{\log 1.15} \Rightarrow n > \frac{\log 1000}{\log 1.15} + 1 \Rightarrow n > 50.43.$$

Populacija rakova naglo će početi rasti u pedesetom tjednu.

Vježba 202

U jezeru je otkriveno 10 grama algi za koje se zna da utječu na porast populacije rakova. Naseobina algi povećava se 15% tjedno. Populacija rakova u jezeru počinje naglo rasti ako je u njemu više od 10000 grama algi. Koliko će grama algi biti u jezeru nakon 2 tjedna?

Rezultat: 13.225 g.

Zadatak 203 (Katarina, srednja škola)

Zadan je aritmetički niz 3, 9, 15, … . Odredite formulu za opći član.

Rješenje 203

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \; , \; a_3 - a_2 = d \; , \; a_4 - a_3 = d \; , \; a_5 - a_4 = d \; , \; a_6 - a_5 = d \; , \; \ldots \; , \; a_n - a_{n-1} = d \; \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \; , \; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je zadan aritmetički niz 3, 9, 15, … , lako se vidi da je

$$a_1 = 3 \quad , \quad d = 9 - 3 = 15 - 9 = \ldots = 6.$$

Uporabom formule za opći član aritmetičkog niza nalazimo da je opći član zadan izrazom

$$\left. \begin{matrix} a_1 = 3 \; , \; d = 6 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow a_n = 3 + 6 \cdot n - 6 \Rightarrow a_n = -3 + 6 \cdot n.$$

Vježba 203

Zadan je aritmetički niz 4, 10, 16, … . Odredite formulu za opći član.

Rezultat: $a_n = -2 + 6 \cdot n.$

Zadatak 204 (Katarina, srednja škola)

Zadan je aritmetički niz 3, 9, 15, … , 297. Odredite broj članova toga niza.

Rješenje 204

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Budući da je zadan aritmetički niz 3, 9, 15, … , 297, lako se vidi da je

$$a_1 = 3 \quad , \quad d = 9 - 3 = 15 - 9 = \ldots = 6 \quad , \quad a_n = 297.$$

Uporabom formule za opći član aritmetičkog niza dobije se broj članova niza.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \;,\; d = 6 \;,\; a_n = 297 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 297 = 3 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow 297 = 3 + 6 \cdot n - 6 \Rightarrow 297 = -3 + 6 \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 6 \cdot n = 297 \Rightarrow 6 \cdot n = 297 + 3 \Rightarrow 6 \cdot n = 300 \Rightarrow 6 \cdot n = 300 \;/:6 \Rightarrow n = 50.$$

Vježba 204

Zadan je aritmetički niz 4, 10, 16, … , 298. Odredite broj članova toga niza.

Rezultat: 50.

Zadatak 205 (Sandra, maturantica)

Prvi član geometrijskog niza je 16. Za treći i četvrti član tog niza vrijedi $a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3.$

Izračunajte sedmi član niza.

Rješenje 205

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

1.inačica

$$a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3 \ \Rightarrow \ a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3 \ / \cdot \frac{1}{a_3} \ \Rightarrow \ \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ \left[\frac{a_4}{a_3} = q \right] \ \Rightarrow \ q = \frac{3}{2}.$$

Sada je:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} a_1 = 16 \\ q = \frac{3}{2} \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ a_7 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^6 \ \Rightarrow \ a_7 = 16 \cdot 1.5^6 \ \Rightarrow \ a_7 = 182.25.$$

2.inačica

$$a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3 \ \Rightarrow \ a_1 \cdot q^3 = \frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot q^2 \ \Rightarrow \ a_1 \cdot q^3 = \frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot q^2 \ /: a_1 \ \Rightarrow \ q^3 = \frac{3}{2} \cdot q^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ q^3 - \frac{3}{2} \cdot q^2 = 0 \ \Rightarrow \ q^2 \cdot \left(q - \frac{3}{2} \right) = 0 \ \Rightarrow \ \left. \begin{array}{l} q^2 = 0 \\ q - \frac{3}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ \left. \begin{array}{l} q = 0 \ \text{nema smisla} \\ q = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \ \Rightarrow \ q = \frac{3}{2}.$$

Sada je:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} a_1 = 16 \\ q = \frac{3}{2} \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ a_7 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^6 \ \Rightarrow \ a_7 = 16 \cdot 1.5^6 \ \Rightarrow \ a_7 = 182.25.$$

Vježba 205

Prvi član geometrijskog niza je 16. Za treći i četvrti član tog niza vrijedi $a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3$.

Izračunajte peti član niza.

Rezultat: 81.

Zadatak 206 (Tomislav, srednja škola)

Koliki je zbroj prvih 13 članova niza $a_n = 502 + 3 \cdot (n-1)$?

A. 520 *B.* 538 *C.* 6724 *D.* 6760

Rješenje 206

Ponovimo!

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Dokažimo da je niz

$$a_n = 502 + 3 \cdot (n - 1)$$

aritmetički niz, tj. da ima stalnu razliku između dva susjedna člana.

$$a_{n+1} - a_n = 502 + 3 \cdot ((n+1) - 1) - \left[502 + 3 \cdot (n-1) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = 502 + 3 \cdot (n + 1 - 1) - 502 - 3 \cdot (n - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = 502 + 3 \cdot (n + 1 - 1) - 502 - 3 \cdot n + 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3 \cdot n - 3 \cdot n + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3 \cdot n - 3 \cdot n + 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3.$$

Odredimo vrijednost članova a_1 i a_{13} niza

$$a_n = 502 + 3 \cdot (n - 1).$$

- $a_1 = 502 + 3 \cdot (1 - 1) \Rightarrow a_1 = 502 + 3 \cdot 0 \Rightarrow a_1 = 502 + 0 \Rightarrow a_1 = 502$
- $a_{13} = 502 + 3 \cdot (13 - 1) \Rightarrow a_{13} = 502 + 3 \cdot 12 \Rightarrow a_{13} = 502 + 36 \Rightarrow a_{13} = 538.$

Zbroj prvih 13 članova niza

$$a_n = 502 + 3 \cdot (n - 1)$$

iznosi:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} n = 13 \\ a_1 = 502 \\ a_{13} = 538 \end{bmatrix} \Rightarrow s_{13} = \frac{13}{2} \cdot \left[502 + 538 \right] \Rightarrow s_{13} = \frac{13}{2} \cdot 1040 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{13} = \frac{13}{2} \cdot 1040 \Rightarrow s_{13} = 13 \cdot 520 \Rightarrow s_{13} = 6760.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Za niz

$$a_n = 502 + 3 \cdot (n - 1)$$

napišimo prvih 13 članova:

- $a_1 = 502 + 3 \cdot (1 - 1) \Rightarrow a_1 = 502 + 3 \cdot 0 \Rightarrow a_1 = 502$
- $a_2 = 502 + 3 \cdot (2 - 1) \Rightarrow a_2 = 502 + 3 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = 502 + 3$
- $a_3 = 502 + 3 \cdot (3 - 1) \Rightarrow a_3 = 502 + 3 \cdot 2 \Rightarrow a_3 = 502 + 6$
- $a_4 = 502 + 3 \cdot (4 - 1) \Rightarrow a_4 = 502 + 3 \cdot 3 \Rightarrow a_4 = 502 + 9$

$$\ldots$$

- $a_{13} = 502 + 3 \cdot (13 - 1) \Rightarrow a_{13} = 502 + 3 \cdot 12 \Rightarrow a_{13} = 502 + 36.$

Zbroj prvih 13 članova iznosi:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{13}=13\cdot 502+3+6+9+\ldots+36=6526+3\cdot(1+2+3+\ldots+12)=$$

$$=6526+3\cdot\frac{12\cdot(12+1)}{2}=6526+3\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=6526+3\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=6526+3\cdot 6\cdot 13=6760.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 206

Koliki je zbroj prvih 13 članova niza $a_n=502-3\cdot(1-n)$?

$A.\ 520 \qquad B.\ 538 \qquad C.\ 6724 \qquad D.\ 6760$

Rezultat: D.

Zadatak 207 (Ivana, medicinska škola)

Odredi 10. član niza kojemu je prvi član 5, a za ostale članove vrijedi $a_{n+1}=1.2\cdot a_n,\ n\in N$.

Rješenje 207

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Budući da za članove niza vrijedi

$$a_{n+1}=1.2\cdot a_n,$$

riječ je o geometrijskom nizu za koji je

$$q=1.2\ ,\ a_1=5.$$

Tada 10. član iznosi:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\Rightarrow\begin{bmatrix}n=10\\ a_1=5\\ q=1.2\end{bmatrix}\Rightarrow a_{10}=5\cdot 1.2^9\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{bmatrix}\Rightarrow a_{10}=25.7989.$$

Vježba 207

Odredi 11. član niza kojemu je prvi član 5, a za ostale članove vrijedi $a_{n+1}=1.2\cdot a_n,\ n\in N$.

Rezultat: 30.9587.

Zadatak 208 (Borna, tehnička škola)

Tri broja čiji je zbroj 15 određuju uzastopne članove aritmetičkog niza. Ako se tim brojevima redom doda 1, 4, 19 dobiju se tri uzastopna člana geometrijskog niza. Koji su to brojevi?

Rješenje 208

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\ \Rightarrow\ a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zbog jednostavnosti tri uzastopna člana aritmetičkog niza zapišimo na ovaj način:

$$a_1=a-d\quad ,\quad a_2=a\quad ,\quad a_3=a+d.$$

Budući da je njihov zbroj 15, slijedi:

$$a_1+a_2+a_3=15\ \Rightarrow\ a-d+a+a+d=15\ \Rightarrow\ a-d+a+a+d=15\ \Rightarrow\ 3\cdot a=15\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot a=15\ /:3\ \Rightarrow\ a=5.$$

Članovi niza su:

$$a_1=5-d\quad ,\quad a_2=5\quad ,\quad a_3=5+d.$$

Ako se tim brojevima redom doda 1, 4, 19 dobiju se tri uzastopna člana geometrijskog niza.

$$\left.\begin{array}{l} b_1=a_1+1 \\ b_2=a_2+4 \\ b_3=a_3+19 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b_1=5-d+1 \\ b_2=5+4 \\ b_3=5+d+19 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b_1=6-d \\ b_2=9 \\ b_3=24+d \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left[\begin{array}{c} \text{svojstvo geometrijskog niza} \\ b_2^2=b_1\cdot b_3 \end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 9^2=(6-d)\cdot(24+d)\ \Rightarrow\ 81=144+6\cdot d-24\cdot d-d^2\ \Rightarrow\ 81-144-6\cdot d+24\cdot d+d^2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ d^2+18\cdot d-63=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} d^2+18\cdot d-63=0 \\ a=1\ ,\ b=18\ ,\ c=-63 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=18\ ,\ c=-63 \\ d_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ d_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 1\cdot(-63)}}{2\cdot 1}\ \Rightarrow\ d_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{324+252}}{2}\ \Rightarrow\ d_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{576}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1,2}=\frac{-18\pm 24}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=\frac{-18+24}{2} \\ d_2=\frac{-18-24}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=\frac{6}{2} \\ d_2=-\frac{42}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=\frac{6}{2} \\ d_2=-\frac{42}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=3 \\ d_2=-21 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva skupa rješenja:

- $$\left.\begin{array}{l} a_1=5-d \\ a_2=5 \\ a_3=5+d \end{array}\right\} \Rightarrow [\, d=3 \,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=5-3 \\ a_2=5 \\ a_3=5+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_3=8 \end{array}\right\}$$
- $$\left.\begin{array}{l} a_1=5-d \\ a_2=5 \\ a_3=5+d \end{array}\right\} \Rightarrow [\, d=-21 \,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=5-(-21) \\ a_2=5 \\ a_3=5+(-21) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=5+21 \\ a_2=5 \\ a_3=5-21 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=26 \\ a_2=5 \\ a_3=-16 \end{array}\right\}.$$

Vježba 208

Tri broja čiji je zbroj 12 određuju uzastopne članove aritmetičkog niza. Ako se tim brojevima redom doda 1, 2, 6 dobiju se tri uzastopna člana geometrijskog niza. Koji su to brojevi?

Rezultat: 2, 4, 6 i 11, 4, – 3.

Zadatak 209 (Borna, tehnička škola)

Odredi zbroj prvih 100 članova aritmetičkog niza ako je zbroj prvog i petog člana 24, a umnožak drugog i trećeg člana 60.

Rješenje 209

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; a_5-a_4=d \;,\; a_6-a_5=d \;,\; \ldots \;,\; a_n-a_{n-1}=d \;\ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \;,\; n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[\, 2\cdot a_1+(n-1)\cdot d \,\right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_5=24 \\ a_2\cdot a_3=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+a_1+4\cdot d=24 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+2\cdot d)=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a_1+4\cdot d=24 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+2\cdot d)=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a_1+4\cdot d=24 \ /:2 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+2\cdot d)=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+2\cdot d=12 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+2\cdot d)=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=12-2\cdot d \\ (a_1+d)\cdot(a_1+2\cdot d)=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow (12-2\cdot d+d)\cdot(12-2\cdot d+2\cdot d)=60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (12-d)\cdot(12-2\cdot d+2\cdot d)=60 \Rightarrow (12-d)\cdot 12=60 \Rightarrow (12-d)\cdot 12=60 \ /:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12-d=5 \Rightarrow -d=5-12 \Rightarrow -d=-7 \Rightarrow -d=-7 \ /\cdot(-1) \Rightarrow d=7.$$

Računamo a_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=12-2\cdot d \\ d=7 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1=12-2\cdot 7 \Rightarrow a_1=12-14 \Rightarrow a_1=-2.$$

Zbroj prvih 100 članova aritmetičkog niza iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=-2 \ , \ d=7 \ , \ n=100 \\ s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{100}=\frac{100}{2}\cdot\left[2\cdot(-2)+(100-1)\cdot 7\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{100}=\frac{100}{2}\cdot\left[2\cdot(-2)+(100-1)\cdot 7\right] \Rightarrow s_{100}=50\cdot\left[-4+99\cdot 7\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{100}=50\cdot\left[-4+693\right] \Rightarrow s_{100}=34\,450.$$

Vježba 209

Odredi zbroj prvih 8 članova aritmetičkog niza ako je zbroj prvog i petog člana 10, a umnožak drugog i trećeg člana 15.

Rezultat: 64.

Zadatak 210 (Vedran, srednja škola)

Niz je zadan sa $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 6 \cdot n$. Provjeri da je $a_n = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$ za svaki prirodni broj n.

Rješenje 210

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f:N\to R.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. Uz rekurziju treba zadati i vrijednosti prvih nekoliko članova niza – onoliko koliko se prethodnih članova javlja u rekurziji.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

Provjeravamo matematičkom indukcijom.
baza indukcije
n = 1

$$a_n = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 - 3 + 1 \Rightarrow a_1 = 3 - 3 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = 3 - 3 + 1 \Rightarrow a_1 = 1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.
korak indukcije
n
Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n, tj. da vrijedi

$$a_n = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1
Sada računamo

$$a_{n+1} = a_n + 6 \cdot n \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{induktivna pretpostavka} \\ a_n = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 + 6 \cdot n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 3 - 3 \cdot n - 3 + 1 \Rightarrow a_{n+1} = \left(3 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 3\right) + \left(-3 \cdot n - 3\right) + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 1\right) - 3 \cdot (n+1) + 1 \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot (n+1)^2 - 3 \cdot (n+1) + 1.$$

Vježba 210

Niz je zadan sa $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 6 \cdot n$. Provjeri da je $a_n = 3 \cdot n \cdot (n - 1) + 1$ za svaki prirodni broj n.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 211 (Vedran, srednja škola)

Ako je $a_n = 2 \cdot n + 3$ opći član niza dokaži da vrijedi $a_{n+2} = a_n + 4$.

Rješenje 211

Ponovimo!

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f : N \rightarrow R.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$a_n = 2 \cdot n + 3 \Rightarrow a_{n+2} = 2 \cdot (n + 2) + 3 \Rightarrow a_{n+2} = 2 \cdot n + 4 + 3 \Rightarrow a_{n+2} = 2 \cdot n + 3 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{n+2} = (2 \cdot n + 3) + 4 \Rightarrow \left[a_n = 2 \cdot n + 3\right] \Rightarrow a_{n+2} = a_n + 4.$$

Vježba 211

Ako je $a_n = 2 \cdot n + 1$ opći član niza dokaži da vrijedi $a_{n+2} = a_n + 4$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 212 (Ana - Marija, tehnička škola)

Koliko je $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$ ako je niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmetički te vrijedi $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147$?

Rješenje 212

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_1 + (a_1 + 3 \cdot d) + (a_1 + 6 \cdot d) + (a_1 + 9 \cdot d) + (a_1 + 12 \cdot d) + (a_1 + 15 \cdot d) = 147 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_1 + a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 6 \cdot d + a_1 + 9 \cdot d + a_1 + 12 \cdot d + a_1 + 15 \cdot d = 147 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 6 \cdot a_1 + 45 \cdot d = 147 \ \Rightarrow \ 6 \cdot a_1 + 45 \cdot d = 147 \ /: 3 \ \Rightarrow \ 2 \cdot a_1 + 15 \cdot d = 49.$$

Sada je:

$$a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = a_1 + (a_1 + 5 \cdot d) + (a_1 + 10 \cdot d) + (a_1 + 15 \cdot d) =$$

$$= a_1 + a_1 + 5 \cdot d + a_1 + 10 \cdot d + a_1 + 15 \cdot d = 4 \cdot a_1 + 30 \cdot d = 2 \cdot (2 \cdot a_1 + 15 \cdot d) =$$

$$= \left[\ 2 \cdot a_1 + 15 \cdot d = 49 \ \right] = 2 \cdot 49 = 98.$$

Vježba 212

Koliko je $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$ ako je niz $a_1, a_2, a_3, \dots$ aritmetički te vrijedi $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 141$?

Rezultat: 94.

Zadatak 213 (Ana - Marija, tehnička škola)

Izračunaj zbroj prvih 200 neparnih prirodnih brojeva koji pri dijeljenu s 3 daju ostatak 1.

Rješenje 213

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = k \quad \text{ili} \quad a : b = k.$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Neparni prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1 redom su:

- 1
  $1 : 3 = 0$
  1
- 7
  $7 : 3 = 2$
  1
- 13
  $13 : 3 = 4$
  1
- 19
  $19 : 3 = 6$
  1
- itd.

Neparni prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1 čine aritmetički niz:

1, 7, 13, 19, …

Prvi član je $a_1 = 1$, a diferencija $d = 6$. Zbroj prvih 200 članova niza iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ a_1 = 1 \\ d = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \right] \Rightarrow S_{200} = \frac{200}{2} \cdot \left[2 \cdot 1 + (200-1) \cdot 6 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{200} = \frac{200}{2} \cdot \left[2 \cdot 1 + 199 \cdot 6 \right] \Rightarrow S_{200} = 100 \cdot \left[2 + 1994 \right] \Rightarrow S_{200} = 119\,600.$$

Vježba 213

Izračunaj zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva koji pri dijeljenu s 3 daju ostatak 1.

Rezultat: 29800.

Zadatak 214 (Ana - Marija, tehnička škola)

Razlika aritmetičkog niza s konačnim brojem članova jednaka je 2, a njegov zbroj iznosi 28. Prvi član jednak je broju članova niza. Koji je to niz?

Rješenje 214

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} d = 2 \\ S_n = 28 \\ a_1 = n \end{array}\right\} \Rightarrow \left[S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \right] \Rightarrow 28 = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot n + (n-1) \cdot 2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28 = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n + \frac{n}{2} \cdot (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 28 = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n + \frac{n}{2} \cdot (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 28 = n^2 + n \cdot (n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28 = n^2 + n^2 - n \Rightarrow 28 = 2 \cdot n^2 - n \Rightarrow 2 \cdot n^2 - n = 28 \Rightarrow 2 \cdot n^2 - n - 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot n^2 - n - 28 = 0 \\ a = 2 \;,\; b = -1 \;,\; c = -28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \;,\; b = -1 \;,\; c = -28 \\ n_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-28)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{4} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm 15}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{1+15}{4} \\ n_2 = \dfrac{1-15}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{16}{4} \\ n_2 = -\dfrac{14}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{16}{4} \\ n_2 = -\dfrac{14}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 4 \\ n_2 = -\dfrac{7}{2} \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 4.$$

Niz ima 4 člana i oni glase:

4, 6, 8, 10.

Vježba 214

Razlika aritmetičkog niza s konačnim brojem članova jednaka je 2, a njegov zbroj iznosi 15. Prvi član jednak je broju članova niza. Koji je to niz?

Rezultat: 3, 5, 7.

Zadatak 215 (Iva, gimnazija)

Koliki je kut α (0º < α < 360º) u beskonačnom redu

$$1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos^3\alpha+\cos^4\alpha+\cos^5\alpha+\cos^6\alpha+\ldots,$$

ako je razlika između zbroja svih neparnih članova i zbroja svih parnih članova jednaka $\frac{2}{3}$?

Rješenje 215

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad , \quad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c \quad , \quad \cos 60^\circ=\cos 300^\circ=\frac{1}{2}.$$

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ldots+a_1\cdot q^n+\ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Uočimo da je red konvergentan za

$$|\cos\alpha|<1.$$

Za beskonačan red

$$1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos^3\alpha+\cos^4\alpha+\cos^5\alpha+\cos^6\alpha+\ldots$$

je zbroj svih:

- neparnih članova

$$S_1=1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+\cos^6\alpha+\ldots \Rightarrow \left[q=\frac{\cos^2\alpha}{1}=\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\ldots=\cos^2\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{1-\cos^2\alpha}$$

- parnih članova

$$S_2=\cos\alpha+\cos^3\alpha+\cos^5\alpha+\cos^7\alpha+\ldots \Rightarrow \left[q=\frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^5\alpha}{\cos^3\alpha}=\ldots=\cos^2\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}.$$

Dalje slijedi:

$$S_1 - S_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{1-\cos^2\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\cos\alpha \neq \pm 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(1+\cos\alpha) = 3\cdot 1 \Rightarrow 2 + 2\cdot\cos\alpha = 3 \Rightarrow 2\cdot\cos\alpha = 3-2 \Rightarrow 2\cdot\cos\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha = 1 \;/:2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 = 60^\circ \\ \alpha_2 = 300^\circ \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 215

Koliki je kut α (0° < α < 360°) u beskonačnom redu

$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \cos^5\alpha + \cos^6\alpha + \ldots,$$

ako je razlika između zbroja svih neparnih članova i zbroja svih parnih članova jednaka $\frac{4}{6}$?

Rezultat: $\alpha_1 = 60^\circ \;,\; \alpha_2 = 300^\circ.$

Zadatak 216 (Matija, gimnazija)

Koji je član u nizu 28, 26, 24, … jednak svome rednom broju, $a_n = n$?

Rješenje 216

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Uočimo da je niz 28, 26, 24, … aritmetički niz čiji prvi član i diferencija iznose:

$$28,\ 26,\ 24,\ \ldots \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 28 \\ d = 26 - 28 = 24 - 26 = \ldots = -2 \end{matrix}\right\}.$$

Tada je:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n = n \\ a_1 = 28 \\ d = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow n = 28 + (n-1)\cdot(-2) \Rightarrow n = 28 - 2\cdot n + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n + 2\cdot n = 28 + 2 \Rightarrow 3\cdot n = 30 \Rightarrow 3\cdot n = 30 \;/:3 \Rightarrow n = 10.$$

Vježba 216

Koji je član u nizu 4, 2, 0, … jednak svome rednom broju, $a_n = n$?

Rezultat: n = 2.

Zadatak 217 (Filip, gimnazija)

Tijelo pri slobodnom padu prijeđe u prvoj sekundi put od 0.5 · g metara, a u svakoj sljedećoj sekundi g metara više nego u prethodnoj. Koliki je prijeđeni put za t sekundi?

Rješenje 217

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Uočimo da je riječ o aritmetičkom nizu gdje je

$$a_1 = 0.5 \cdot g \quad , \quad d = g$$

pa je za t sekundi tijelo prešlo put

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 0.5 \cdot g \;,\; d = g \\ s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (t-1) \cdot d \right] \end{array} \right\} \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot 0.5 \cdot g + (t-1) \cdot g \right] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[g + (t-1) \cdot g \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[g + t \cdot g - g \right] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[g + t \cdot g - g \right] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot t \cdot g \Rightarrow s_t = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Vježba 217

Tijelo pri slobodnom padu prijeđe u prvoj sekundi put od 0.5 · g metara, a u svakoj sljedećoj sekundi g metara više nego u prethodnoj. Koliki je prijeđeni put za 4 sekunde?

Rezultat: 8 · g.

Zadatak 218 (Filip, gimnazija)

Tijelo bačeno uvis u praznom prostoru početnom brzinom v_0 prijeđe u prvoj sekundi (v_0 – 0.5 · g) metara, a u svakoj sljedećoj sekundi g metara manje nego u prethodnoj. Koliki je prijeđeni put za t sekundi?

Rješenje 218

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Uočimo da je riječ o aritmetičkom nizu gdje je

$$a_1 = v_\circ - 0.5 \cdot g \quad , \quad d = -g$$

pa je za t sekundi tijelo prešlo put

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = v_\circ - 0.5 \cdot g \ , \ d = -g \\ s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (t-1) \cdot d \right] \end{array} \right\} \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot (v_\circ - 0.5 \cdot g) + (t-1) \cdot (-g) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot v_\circ - g - g \cdot t + g \right] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot v_\circ \cancel{- g} - g \cdot t \cancel{+ g} \right] \Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot \left[2 \cdot v_\circ - g \cdot t \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_t = \frac{t}{2} \cdot 2 \cdot v_\circ - \frac{t}{2} \cdot g \cdot t \Rightarrow s_t = \frac{t}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot v_\circ - \frac{t}{2} \cdot g \cdot t \Rightarrow s_t = v_\circ \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Vježba 218

Tijelo bačeno uvis u praznom prostoru početnom brzinom v_0 prijeđe u prvoj sekundi ($v_0 - 0.5 \cdot g$) metara, a u svakoj sljedećoj sekundi g metara manje nego u prethodnoj. Koliki je prijeđeni put za 4 sekunde?

Rezultat: $4 \cdot v_\circ - 8 \cdot g.$

Zadatak 219 (Suzy, gimnazija)

Zadan je niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Ako je njegov zbroj $s_n = a \cdot n^2 - b \cdot n,$ gdje su a i b zadane konstante pokažite da se radi o aritmetičkom nizu.

Rješenje 219

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Uočimo da za opći član a_n vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Opći član a_n glasi:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow a_n = \left(a \cdot n^2 - b \cdot n\right) - \left(a \cdot (n-1)^2 - b \cdot (n-1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = a \cdot n^2 - b \cdot n - \left(a \cdot \left(n^2 - 2 \cdot n + 1\right) - b \cdot n + b\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = a \cdot n^2 - b \cdot n - \left(a \cdot n^2 - 2 \cdot a \cdot n + a - b \cdot n + b\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = a \cdot n^2 - b \cdot n - a \cdot n^2 + 2 \cdot a \cdot n - a + b \cdot n - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = a \cdot n^2 - b \cdot n - a \cdot n^2 + 2 \cdot a \cdot n - a + b \cdot n - b \Rightarrow a_n = 2 \cdot a \cdot n - a - b.$$

Pokažimo da je niz aritmetički!

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = 2 \cdot a \cdot (n-1) - a - b \\ a_n = 2 \cdot a \cdot n - a - b \\ a_{n+1} = 2 \cdot a \cdot (n+1) - a - b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot (n-1) - a - b + 2 \cdot a \cdot (n+1) - a - b}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot n - 2 \cdot a - a - b + 2 \cdot a \cdot n + 2 \cdot a - a - b}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot n - 2 \cdot a - a - b + 2 \cdot a \cdot n + 2 \cdot a - a - b}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot n - a - b + 2 \cdot a \cdot n - a - b}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow \frac{4 \cdot a \cdot n - 2 \cdot a - 2 \cdot b}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot (2 \cdot a \cdot n - a - b)}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow \frac{2 \cdot (2 \cdot a \cdot n - a - b)}{2} = 2 \cdot a \cdot n - a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot n - a - b = 2 \cdot a \cdot n - a - b.$$

Vježba 219

Zadan je niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Ako je njegov zbroj $s_n = n \cdot (a \cdot n - b)$, gdje su a i b zadane konstante pokažite da se radi o aritmetičkom nizu.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 220 (Tin, gimnazija)

Izračunaj zbroj beskonačnog geometrijskog reda $1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+...$, za $|b|<|a|$..

Rješenje 220

Ponovimo!

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right| \quad , \quad |x|<a \;,\; a>0 \;\Rightarrow\; -a<x<a \quad , \quad a<b \;,\; c>0 \;\Rightarrow\; a\cdot c<b\cdot c.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ ...\ +a_1\cdot q^n+\ ...$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Iz uvjeta

$$|b|<|a|,$$

slijedi

$$|b|<|a| \;\Rightarrow\; |b|<|a| \;/\cdot\frac{1}{|a|} \;\Rightarrow\; \frac{|b|}{|a|}<1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{b}{a}\right|<1 \;\Rightarrow\; -1<\frac{b}{a}<1.$$

U geometrijskom redu

$$1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+...$$

je količnik

$$q=-\frac{b}{a} \;\Rightarrow\; -1<q<1$$

pa zbroj reda iznosi:

$$S=1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+... \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a_1=1 \;,\; q=-\frac{b}{a} \\ S=\frac{a_1}{1-q} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; S=\frac{1}{1-\left(-\frac{b}{a}\right)} \;\Rightarrow\; S=\frac{1}{1+\frac{b}{a}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; S=\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{b}{a}} \;\Rightarrow\; S=\frac{1}{\frac{a+b}{a}} \;\Rightarrow\; S=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{a+b}{a}} \;\Rightarrow\; S=\frac{a}{a+b}.$$

Vježba 220

Izračunaj zbroj beskonačnog geometrijskog reda $1+\frac{b}{a}+\frac{b^{2}}{a^{2}}+\frac{b^{3}}{a^{3}}+\ldots$, za $\left|b\right|<\left|a\right|$..

Rezulat: $S=\frac{a}{a-b}$.