Zadatak 221 (Karlo, gimnazija)

Dokazati da je u tablici

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
…………………

zbroj svih članova u svakom redu jednak kvadratu srednjeg člana.

Rješenje 221

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ ... \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ ...$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Primijetimo da k – ti redak ove tablice ima oblik

$$k, \ k+1, \ k+2, \ ... \ , \ 2 \cdot k - 1, \ ... \ , \ 3 \cdot k - 3, \ 3 \cdot k - 2.$$

To je aritmetički niz sa razlikom d = 1.

$$d = k + 1 - k = k + 2 - (k+2) = ... = 3 \cdot k - 2 - (3 \cdot k - 3) = 1.$$

Tada je

$$a_1 = k, \ a_n = 3 \cdot k - 2.$$

Odredimo n broj članova niza.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 3 \cdot k - 2 \ , \ a_1 = k \ , \ d = 1 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot k - 2 = k + (n-1) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot k - 2 = k + n - 1 \Rightarrow k + n - 1 = 3 \cdot k - 2 \Rightarrow n = 3 \cdot k - 2 - k + 1 \Rightarrow n = 2 \cdot k - 1.$$

Zbroj članova u k – tom redu niza iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} n = 2 \cdot k - 1 \ , \ a_1 = k \ , \ a_n = 3 \cdot k - 2 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \end{array} \right\} \Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot \left[k + 3 \cdot k - 2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot [4 \cdot k - 2] \Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot 2 \cdot [2 \cdot k - 1] \Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot 2 \cdot [2 \cdot k - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = (2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot k - 1) \Rightarrow s_n = (2 \cdot k - 1)^2.$$

Vježba 221

Nema vježbe!

Rezultat: ☺.

Zadatak 222 (Ankica, srednja škola)

U nekom geometrijskom nizu je $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot \ldots \cdot a_{20} = 32.$ Odredite 11. član ovog niza.

Rješenje 222

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$\sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1.$$

$$a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8 \cdot a_{10} \cdot a_{12} \cdot a_{14} \cdot a_{16} \cdot a_{18} \cdot a_{20} = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^5 \cdot a_1 \cdot q^7 \cdot a_1 \cdot q^9 \cdot a_1 \cdot q^{11} \cdot a_1 \cdot q^{13} \cdot a_1 \cdot q^{15} \cdot a_1 \cdot q^{17} \cdot a_1 \cdot q^{19} = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^{10} \cdot q^{100} = 32 \Rightarrow a_1^{10} \cdot \left(q^{10}\right)^{10} = 32 \Rightarrow \left(a_1 \cdot q^{10}\right)^{10} = 32 \Rightarrow \left(a_1 \cdot q^{10}\right)^{10} = 32 \; / \sqrt[10]{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt[10]{32} \Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt[10]{2^5} \Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt[10]{2^5} \Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_{11} = a_1 \cdot q^{10}\right] \Rightarrow a_{11} = \sqrt{2}.$$

Vježba 222

U nekom geometrijskom nizu je $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot \ldots \cdot a_{20} = 1024.$ Odredite 11. član ovog niza.

Rezultat: 2.

Zadatak 223 (Ankica, srednja škola)

Zbroj prvih n članova niza zadan je formulom $S_n = 3 \cdot \left(1 - 2^n\right)$ za svaki prirodni broj n. Odredite taj niz.

Rješenje 223

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a-c=b-d \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n} \cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza. Ako promatramo samo prvih n članova niza govorimo o konačnom nizu:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n.$$

Tada se zbroj prvih n članova niza zapisuje

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n.$$

$$\left.\begin{array}{l} S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n \\ S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n-S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n-\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n-S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n-a_1-a_2-a_3-\ldots-a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n-S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n-a_1-a_2-a_3-\ldots-a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n-S_{n-1}=a_n \Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1} \Rightarrow \left[S_n=3\cdot\left(1-2^{n}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=3\cdot\left(1-2^{n}\right)-3\cdot\left(1-2^{n-1}\right) \Rightarrow a_n=3-3\cdot 2^{n}-3+3\cdot 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=3-3\cdot 2^{n}-3+3\cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n=-3\cdot 2^{n}+3\cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n=-3\cdot 2^{n-1}\cdot 2^{1}+3\cdot 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=-3\cdot 2^{n-1}\cdot 2+3\cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n=-6\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n=-3\cdot 2^{n-1}.$$

Vježba 223

Nema vježbe!

Rezultat: ☺.

Zadatak 224 (Neno, gimnazija)

Zadan je opći član niza formulom $a_n=\begin{cases} 2\cdot n+1, & n=3\cdot k-2 \\ \dfrac{n}{n+1}, & n=3\cdot k-1,\ k\in N. \\ n^{2}-1, & n=3\cdot k \end{cases}$

Odredi jedanaesti, dvanaesti i trinaesti član niza.

Rješenje 224

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Iz općeg člana vidimo da se članovi niza određuju prema ostatku pri dijeljenju indeksa člana brojem 3. Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} 11=3\cdot 4-1 \\ 12=3\cdot 4 \\ 13=3\cdot 5-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_n=\frac{n}{n+1},\ n=3\cdot k-1 \\ a_n=n^2-1,\ n=3\cdot k \\ a_n=2\cdot n+1,\ n=3\cdot k-2 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11}=\frac{11}{11+1} \\ a_{12}=12^2-1 \\ a_{13}=2\cdot 13+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11}=\frac{11}{12} \\ a_{12}=143 \\ a_{13}=27 \end{array}\right\}.$$

Vježba 224

Zadan je opći član niza formulom $a_n=\begin{cases} 2\cdot n+3,\ n=3\cdot k-2 \\ \frac{n+1}{n},\ n=3\cdot k-1,\ k\in N. \\ n^2+1,\ n=3\cdot k \end{cases}$

Odredi jedanaesti, dvanaesti i trinaesti član niza.

Rezultat: $a_{11}=\frac{12}{11}$, $a_{12}=145$, $a_{13}=29.$

Zadatak 225 (Marija, gimnazija)

U aritmetičkom nizu prvi član iznosi 1, a zbroj prvih pet članova jednak je četvrtini zbroja sljedećih pet članova. Kolika je razlika toga niza?

Rješenje 225

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.
Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$
$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati n – ti dio broja a?

$$\frac{1}{n}\cdot a.$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{1}{4}\cdot\left(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}\right).$$

Sve članove izrazimo pomoći a_1 i d.

$$a_1+a_1+d+a_1+2\cdot d+a_1+3\cdot d+a_1+4\cdot d=\frac{1}{4}\cdot\left(a_1+5\cdot d+a_1+6\cdot d+a_1+7\cdot d+a_1+8\cdot d+a_1+9\cdot d\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot a_1+10\cdot d=\frac{1}{4}\cdot\left(5\cdot a_1+35\cdot d\right)\ \Rightarrow\ \left[\ a_1=1\ \right]\ \Rightarrow\ 5\cdot 1+10\cdot d=\frac{1}{4}\cdot\left(5\cdot 1+35\cdot d\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5+10\cdot d=\frac{1}{4}\cdot\left(5+35\cdot d\right)\ \Rightarrow\ 5\cdot\left(1+2\cdot d\right)=\frac{1}{4}\cdot 5\cdot\left(1+7\cdot d\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot\left(1+2\cdot d\right)=\frac{1}{4}\cdot 5\cdot\left(1+7\cdot d\right)\ /\cdot\frac{4}{5}\ \Rightarrow\ 4\cdot\left(1+2\cdot d\right)=1+7\cdot d\ \Rightarrow\ 4+8\cdot d=1+7\cdot d\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8\cdot d-7\cdot d=1-4\ \Rightarrow\ d=-3.$$

Vježba 225

U aritmetičkom nizu prvi član iznosi 3, a zbroj prvih pet članova jednak je četvrtini zbroja sljedećih pet članova. Kolika je razlika toga niza?

Rezultat: d = – 9.

Zadatak 226 (Asterix, gimnazija)

Odredi moguću rekurzivnu formulu za niz: 5, 9, 17, 33, 65, … i ispiši naredna dva člana.

Rješenje 226

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.

Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.

Nakon dubokoumnog razmišljanja i puno neprospavanih noći!

$$5,\ 9,\ 17,\ 33,\ 65,\ \ldots\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} a_1=1 \\ a_n=2\cdot a_{n-1}-1 \end{array}\right].$$

Sada je:

$$\begin{aligned} &a_1=5 \\ &a_2=2\cdot a_1-1=2\cdot 5-1=10-1=9 \\ &a_3=2\cdot a_2-1=2\cdot 9-1=18-1=17 \\ &a_4=2\cdot a_3-1=2\cdot 17-1=34-1=33 \\ &a_5=2\cdot a_4-1=2\cdot 33-1=66-1=65 \\ &a_6=2\cdot a_5-1=2\cdot 65-1=130-1=129 \\ &a_7=2\cdot a_6-1=2\cdot 129-1=258-1=257\ \text{ itd.} \end{aligned}$$

Dakle,

5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, …

Vježba 226

Odredi moguću rekurzivnu formulu za niz: 4, 7, 11, 16, 22, … i ispiši naredna dva člana.

Rezultat: $a_1=4\ ,\ a_{n+1}=a_n+\left(n+2\right)\ ,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ 22,\ 29,\ 37,\ \ldots$

Zadatak 227 (Željka, gimnazija)

Niz (a_n) dan je općim članom a_n,

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ ako je n neparan} \\ n, \text{ ako je n paran.} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 članova ovog niza?

Rješenje 227

Ponovimo!

$$1+2+3+4+\ ...\ +n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m = 2\cdot k+1\ ,\ k\in N.$$

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2\cdot k\ ,\ k\in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Riječ je o nizu

$$1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 6,\ 1,\ 8,\ ...\ ,\ 1,\ 100.$$

Uočimo da su na:

- neparnim mjestima same jedinice

$$\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ ...\ ,\ 1}_{50\ -\ članova}.$$

Ima 50 jedinica pa je zbroj jednak:

$$50\cdot 1 = 50.$$

- parnim mjestima uzastopni parni brojevi

$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ ...\ ,\ 100}_{50\ -\ članova}.$$

Ima 50 uzastopnih parnih brojeva pa je zbroj jednak:

$$2+4+6+8+\ ...\ +100 = 2\cdot(1+2+3+4+\ ...\ +50) = 2\cdot\frac{50\cdot(50+1)}{2} = 2\cdot\frac{50\cdot 51}{2} =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{50\cdot 51}{\cancel{2}} = 50\cdot 51 = 2550.$$

Zbroj prvih 100 članova ovog niza iznosi:

$$50+2\,550 = 2\,600.$$

Vježba 227

Niz (a_n) dan je općim članom a_n,

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ ako je n neparan} \\ n, \text{ ako je n paran.} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 50 članova ovog niza?

Rezultat: 675.

Zadatak 228 (Asterix, gimnazija)

Odredite $x \in \left\langle 0, \pi \right\rangle$ za koji su $\frac{1}{tg\ x}, \frac{1}{\sin x}, tg\ x$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rješenje 228

Ponovimo!

$$ctg\ x = \frac{1}{tg\ x} \quad , \quad ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Trigonometrijska jednadžba cos x = a

Jednadžba ima rješenje ako i samo ako je

$$-1 \leq a \leq 1.$$

Tada postoji jedinstven kut α u intervalu

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

čiji je kosinus jednak a pa postoji jednadžba

$$\cos x = \cos \alpha$$

koja ima dva skupa rješenja:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi \ , \ k \in Z \\ x_2 = -\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi \ , \ k \in Z \end{array} \right\} \text{ ili } x_{1,2} = \pm \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi \ , \ k \in Z.$$

Razlomci $\frac{1}{tg\ x}, \frac{1}{\sin x}, tg\ x$ definirani su za svaki $x \in \left\langle 0, \pi \right\rangle$, osim za $\frac{\pi}{2}$ jer $tg \frac{\pi}{2}$ nije definiran.

Budući da zadani izrazi tvore tri uzastopna člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$\frac{2}{\sin x}=\frac{1}{tg\ x}+tg\ x \Rightarrow \frac{2}{\sin x}=ctg\ x+tg\ x \Rightarrow \frac{2}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x} \Rightarrow \frac{2}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x} \Rightarrow 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x\cdot\left(2\cdot\cos x-1\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\sin x=0\\ 2\cdot\cos x-1=0\end{matrix}\right\}.$$

Vidi se da ne može biti sin x = 0 jer tada $\frac{1}{\sin x}$ nije definirano. Zato je:

$$2\cdot\cos x-1=0 \Rightarrow 2\cdot\cos x=1 \Rightarrow 2\cdot\cos x=1\ /:2 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$

Dakle, na skupu $\left\langle 0,\ \pi\right\rangle \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ je $x=\frac{\pi}{3}$ jedinstveno rješenje.

Vježba 228

Odredite $x\in\left\langle 0,\ \pi\right\rangle$ za koji su $tg\ x,\ \frac{1}{\sin x},\ \frac{1}{tg\ x}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rezultat: $\frac{\pi}{3}.$

Zadatak 229 (Asterix, gimnazija)

Broj q količnik je geometrijskog niza s pozitivnim članovima. Za koji od navedenih količnika q tri uzastopna člana geometrijskog niza mogu biti duljine stranica nekog trokuta?

$A.$ za $q=0.25$ $B.$ za $q=0.5$ $C.$ za $q=1.5$ $D.$ za $q=2$

Rješenje 229

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica.

$$a+b>c\quad ,\quad a+c>b\quad ,\quad b+c>a.$$

Pretpostavimo da je a pozitivan broj.

- Za q = 0.25 tri uzastopna člana geometrijskog niza su:

$$a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2 \Rightarrow a,\ 0.25\cdot a,\ 0.0625\cdot a.$$

Provjerimo mogu li oni biti duljine stranica nekog trokuta.

$$a,\ 0.25\cdot a,\ 0.0625\cdot a$$

$$\left.\begin{array}{l} a+0.25\cdot a>0.0625\cdot a \\ a+0.0625\cdot a>0.25\cdot a \\ 0.25\cdot a+0.0625\cdot a>a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1.25\cdot a>0.0625\cdot a \\ 1.0625\cdot a>0.25\cdot a \\ 0.3125\cdot a>a \text{ nije točno} \end{array}\right\}.$$

Za q = 0.25 tri uzastopna člana geometrijskog niza ne mogu biti duljine stranica nekog trokuta.

- Za q = 0.5 tri uzastopna člana geometrijskog niza su:

$$a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2 \Rightarrow a,\ 0.5\cdot a,\ 0.25\cdot a.$$

Provjerimo mogu li oni biti duljine stranica nekog trokuta.

$$a,\ 0.5\cdot a,\ 0.25\cdot a$$

$$\left.\begin{array}{l} a+0.5\cdot a>0.25\cdot a \\ a+0.25\cdot a>0.5\cdot a \\ 0.5\cdot a+0.25\cdot a>a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1.5\cdot a>0.25\cdot a \\ 1.25\cdot a>0.5\cdot a \\ 0.75\cdot a>a \text{ nije točno} \end{array}\right\}.$$

Za q = 0.5 tri uzastopna člana geometrijskog niza ne mogu biti duljine stranica nekog trokuta.

- Za q = 1.5 tri uzastopna člana geometrijskog niza su:

$$a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2 \Rightarrow a,\ 1.5\cdot a,\ 2.25\cdot a.$$

Provjerimo mogu li oni biti duljine stranica nekog trokuta.

$$a,\ 1.5\cdot a,\ 2.25\cdot a$$

$$\left.\begin{array}{l} a+1.5\cdot a>2.25\cdot a \\ a+2.25\cdot a>1.5\cdot a \\ 1.5\cdot a+2.25\cdot a>a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.5\cdot a>2.25\cdot a \\ 3.25\cdot a>1.5\cdot a \\ 3.75\cdot a>a \end{array}\right\}.$$

Za q = 1.5 tri uzastopna člana geometrijskog niza mogu biti duljine stranica nekog trokuta.
Odgovor je pod C.
Odgovor D ne treba ni računati jer od 4 ponuđena odgovora (A, B, C i D) samo jedan mora biti točan.

Vježba 229

Nema vježbe!

Rezultat: ☺

Zadatak 230 (Lucia, ekonomija ☺)

Ispitajte je li 96 član aritmetičkog niza, za koji je $a_3 = 26$, $a_{15} - a_{12} = 30$.

Rješenje 230

Ponovimo!

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d\ ,\ a_3 - a_2 = d\ ,\ a_4 - a_3 = d\ ,\ a_5 - a_4 = d\ ,\ a_6 - a_5 = d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n - a_{n-1} = d\ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d\ ,\ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Najprije odredimo prvi član a_1 i razliku (diferenciju) d niza iz zadanih uvjeta.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = 26 \\ a_{15} - a_{12} = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ a_1 + 14 \cdot d - \left(a_1 + 11 \cdot d\right) = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ a_1 + 14 \cdot d - a_1 - 11 \cdot d = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ a_1 + 14 \cdot d - a_1 - 11 \cdot d = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ 14 \cdot d - 11 \cdot d = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ 3 \cdot d = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ 3 \cdot d = 30 \; /:3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ d = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow a_1 + 2 \cdot 10 = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 20 = 26 \Rightarrow a_1 = 26 - 20 \Rightarrow a_1 = 6.$$

Riječ je o aritmetičkom nizu čiji je prvi član $a_1 = 6$, a razlika (diferencija) $d = 10$.
Ispitajmo je li 96 član toga niza! Idemoooooooo!

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 6 \;\;,\;\; d = 10 \\ a_n = 96 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\; a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\right] \Rightarrow 96 = 6 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 96 = 6 + 10 \cdot n - 10 \Rightarrow 96 = 10 \cdot n - 4 \Rightarrow 10 \cdot n - 4 = 96 \Rightarrow 10 \cdot n = 96 + 4 \Rightarrow 10 \cdot n = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot n = 100 \; /:10 \Rightarrow n = 10.$$


Super, broj 96 je **deseti** član toga niza. Broj n redni je broj člana niza pa mora biti prirodan broj, tj.

$$n \in N.$$

Vježba 230

Ispitajte je li 76 član aritmetičkog niza, za koji je $a_3 = 26$, $a_{15} - a_{12} = 30$.

Rezultat: Da, osmi je član.

Zadatak 231 (Tonka, gimnazija)

Zapiši opći član aritmetičkog niza (a_n) ako je $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 70$ te $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 85.$

Rješenje 231

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bismo napisali opći član aritmetičkog niza moramo najprije odrediti prvi član a_1 i razliku (diferenciju) d.

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=70 \\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+a_1+2\cdot d+a_1+4\cdot d+a_1+6\cdot d+a_1+8\cdot d=70 \\ a_1+d+a_1+3\cdot d+a_1+5\cdot d+a_1+7\cdot d+a_1+9\cdot d=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot a_1+20\cdot d=70 \\ 5\cdot a_1+25\cdot d=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot a_1+20\cdot d=70 \;/:(-5) \\ 5\cdot a_1+25\cdot d=85 \;/:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a_1-4\cdot d=-14 \\ a_1+5\cdot d=17 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow d=3.$$

Računamo a_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1+5\cdot d=17 \\ d=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1+5\cdot 3=17 \Rightarrow a_1+15=17 \Rightarrow a_1=17-15 \Rightarrow a_1=2.$$

Opći član a_n glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \;\;,\;\; d=3 \\ a_n=a_1+(n-1)\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_n=2+(n-1)\cdot 3 \Rightarrow a_n=2+3\cdot n-3 \Rightarrow a_n=3\cdot n-1.$$

Vježba 231

Zapiši opći član aritmetičkog niza (a_n) ako je $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=45$ te $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=55.$

Rezultat: $a_n=2\cdot n-1.$

Zadatak 232 (Tomislav, gimnazija)

Od kojeg je člana niza (a_n), $a_n=n^2-12\cdot n+11$, ispunjena nejednakost $a_{n+1}>a_n$?

Rješenje 232

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a>b \;,\; c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a_{n+1}>a_n \Rightarrow (n+1)^2-12\cdot(n+1)+11>n^2-12\cdot n+11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+2\cdot n+1-12\cdot n-12+11>n^2-12\cdot n+11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+2\cdot n+1-12\cdot n-12+11>n^2-12\cdot n+11 \Rightarrow 2\cdot n+1-12>0 \Rightarrow 2\cdot n>-1+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n>11 \Rightarrow 2\cdot n>11 \;/:2 \Rightarrow n>5.5.$$

Broj n jednak je 6.
Nejednakost je ispunjena od člana a_6.

Vježba 232

Od kojeg je člana niza (a_n), $a_n = n^2 - 12 \cdot n + 11$, ispunjena nejednakost $a_n < a_{n+1}$?

Rezultat: a_6.

Zadatak 233 (Tomislav, gimnazija)

Dokažite da je niz (a_n) s općim članom $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ rastući.

Rješenje 233

Ponovimo!

$$a \ge b \;,\; c > 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c \ge b \cdot c \quad , \quad a \ge b \;,\; c > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Za niz (a_n) kažemo da je rastući ako za svaki n vrijedi

$$a_{n+1} \ge a_n.$$

$$a_{n+1} \ge a_n \;\Rightarrow\; a_{n+1} - a_n \ge 0 \;\Rightarrow\; \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2^n - 1}{2^n + 1} \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2^n - 1}{2^n + 1} \ge 0 \;/ \cdot \left(2^{n+1} + 1\right) \cdot \left(2^n + 1\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2^{n+1} - 1\right) \cdot \left(2^n + 1\right) - \left(2^n - 1\right) \cdot \left(2^{n+1} + 1\right) \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2 \cdot n + 1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - \left(2^{2 \cdot n + 1} + 2^n - 2^{n+1} - 1\right) \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2 \cdot n + 1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - 2^{2 \cdot n + 1} - 2^n + 2^{n+1} + 1 \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2 \cdot n + 1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - 2^{2 \cdot n + 1} - 2^n + 2^{n+1} + 1 \ge 0 \;\Rightarrow\; 2^{n+1} - 2^n - 2^n + 2^{n+1} \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n \ge 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n \ge 0 \;/ : 2 \;\Rightarrow\; 2^{n+1} - 2^n \ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^n - 2^n \ge 0 \;\Rightarrow\; 2^n \ge 0.$$

Točno je za svaki $n \in N$.

Vježba 233

Dokažite da je niz (a_n) s općim članom $a_n = -\frac{1 - 2^n}{2^n + 1}$ rastući.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 234 (Ante, srednja škola)

Odredi 37. član niza (a_n), ako je $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ te $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $n \ge 2$.

Rješenje 234

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.
Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Nađemo nekoliko sljedećih članova niza.

- $a_3 = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_2 = 2 \\ a_1 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{1} \Rightarrow a_3 = 2$
- $a_4 = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_3 = 2 \\ a_2 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{2} \Rightarrow a_4 = 1$
- $a_5 = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_4 = 1 \\ a_3 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}$
- $a_6 = \frac{a_5}{a_4} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_5 = \frac{1}{2} \\ a_4 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_6 = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{2}$
- $a_7 = \frac{a_6}{a_5} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_6 = \frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_7 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_7 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_7 = 1$
- $a_8 = \frac{a_7}{a_6} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_7 = 1 \\ a_6 = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_8 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_8 = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_8 = \frac{2}{1} \Rightarrow a_8 = 2$
- $a_9 = \frac{a_8}{a_7} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_8 = 2 \\ a_7 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_9 = \frac{2}{1} \Rightarrow a_9 = 2$
- $a_{10} = \frac{a_9}{a_8} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_9 = 2 \\ a_8 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{10} = \frac{2}{2} \Rightarrow a_{10} = \frac{2}{2} \Rightarrow a_{10} = 1$

- $a_{11}=\frac{a_{10}}{a_9} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{10}=1 \\ a_9=2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11}=\frac{1}{2}$
- $a_{12}=\frac{a_{11}}{a_{10}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}=\frac{1}{2} \\ a_{10}=1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{12}=\frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow a_{12}=\frac{1}{2}$
- $a_{13}=\frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{12}=\frac{1}{2} \\ a_{11}=\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{13}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_{13}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_{13}=1$

itd.
To je niz

$$1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \ldots$$

u kojem se ponavlja uzastopce njegovih šest članova

$$1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.$$

Budući da je

$$37 = 6 \cdot 6 + 1,$$

slijedi da će 37. član niza biti broj 1.

$$\underbrace{1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{6\text{ članova ponavlja se 6 puta}},\ 1,\ \ldots$$

Dakle, vrijedi

$$a_{37} = 1.$$

Vježba 234

Odredi 38. član niza (a_n), ako je $a_1=1,\ a_2=2$ te $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $n \geq 2$.

Rezultat: $a_{38} = 2$.

Zadatak 235 (Ante, srednja škola)

Koliki je količnik beskonačnog konvergentnog geometrijskog niza ako je zbroj prvih šest članova u nizu jednak $\frac{7}{8}$ njegovog ukupnog zbroja?

Rješenje 235

Ponovimo!

$$a^6-b^6=(a-b)\cdot\left(a^5+a^4\cdot b+a^3\cdot b^2+a^2\cdot b^3+a\cdot b^4+b^5\right).$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\quad,\quad \sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \ n \geq 1.$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ ... \ + a_1 \cdot q^n + \ ...$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kako računamo $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b} \cdot x.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{7}{8} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ ...) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = \frac{7}{8} \cdot (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ ...) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = \frac{7}{8} \cdot \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow [\, a_1 \neq 0 \,] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = \frac{7}{8} \cdot \frac{a_1}{1-q} \ / \cdot \frac{1-q}{a_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-q) \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = \frac{7}{8} \Rightarrow 1 - q^6 = \frac{7}{8} \Rightarrow -q^6 = \frac{7}{8} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -q^6 = \frac{7}{8} - \frac{1}{1} \Rightarrow -q^6 = \frac{7-8}{8} \Rightarrow -q^6 = -\frac{1}{8} \Rightarrow -q^6 = -\frac{1}{8} \ / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^6 = \frac{1}{8} \Rightarrow q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ / \sqrt[6]{\ } \Rightarrow q = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \Rightarrow q = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; q=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}} \;\Rightarrow\; q=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vježba 235

Koliki je količnik beskonačnog konvergentnog geometrijskog niza ako je zbroj prvih šest članova u nizu jednak 0.875 njegovog ukupnog zbroja?

Rezultat: $q=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Zadatak 236 (Don, gimnazija)

Prvi član aritmetičkog niza iznosi 1, zbroj prvih m članova odnosi se prema zbroju prvih n članova kao $m^2 : n^2$. Nađite razliku toga niza.

Rješenje 236

Ponovimo!

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \;\; \text{i} \;\; c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; a_5-a_4=d \;,\; a_6-a_5=d \;,\; \ldots \;,\; a_n-a_{n-1}=d \;\ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \;,\; n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[\,2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\,\right].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$S_m:S_n=m^2:n^2 \;\Rightarrow\; \frac{m}{2}\cdot\left(2\cdot a_1+(m-1)\cdot d\right):\frac{n}{2}\cdot\left(2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right)=m^2:n^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left[\,a_1=1\,\right] \;\Rightarrow\; \frac{m}{2}\cdot\left(2\cdot 1+m\cdot d-d\right):\frac{n}{2}\cdot\left(2\cdot 1+n\cdot d-d\right)=m^2:n^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{m}{2}\cdot\left(2+m\cdot d-d\right):\frac{n}{2}\cdot\left(2+n\cdot d-d\right)=m^2:n^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\cdot(2+m\cdot d-d)\cdot n^2=\frac{n}{2}\cdot(2+n\cdot d-d)\cdot m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\cdot(2+m\cdot d-d)\cdot n^2=\frac{n}{2}\cdot(2+n\cdot d-d)\cdot m^2 \quad /\cdot\frac{2}{m\cdot n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+m\cdot d-d)\cdot n=(2+n\cdot d-d)\cdot m \Rightarrow 2\cdot n+m\cdot n\cdot d-n\cdot d=2\cdot m+m\cdot n\cdot d-m\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n+m\cdot n\cdot d-n\cdot d=2\cdot m+m\cdot n\cdot d-m\cdot d \Rightarrow 2\cdot n-n\cdot d=2\cdot m-m\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot(2-d)=m\cdot(2-d) \Rightarrow n\cdot(2-d)-m\cdot(2-d)=0 \Rightarrow (2-d)\cdot(n-m)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n-m\neq 0 \text{ jer je } n\neq m \\ 2-d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2-d=0 \Rightarrow 2=d \Rightarrow d=2.$$

Vježba 236

Prvi član aritmetičkog niza iznosi 1, zbroj prvih n članova odnosi se prema zbroju prvih m članova kao $n^2 : m^2$. Nađite razliku toga niza.

Rezultat: 2.

Zadatak 237 (Zlatko, gimnazija)

Kutovi trokuta čine aritmetički niz. Izračunajte ih ako je zbroj njihovih sinusa $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje 237

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \ , \ a_3-a_2=d \ , \ a_4-a_3=d \ , \ a_5-a_4=d \ , \ a_6-a_5=d \ , \ \ldots \ , \ a_n-a_{n-1}=d \ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \ , \ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području $-a\leq x\leq a$ nazivamo:

- parnom, ako je $f(-x)=f(x)$
- neparnom, ako je $f(-x)=-f(x)$.

Funkcija kosinus je parna funkcija.

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Budući da tvore aritmetički niz, možemo zapisati:

$$\alpha=x-d \quad , \quad \beta=x \quad , \quad \gamma=x+d.$$

Tada vrijedi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \Rightarrow x-d+x+x+d=180^\circ \Rightarrow x-d+x+x+d=180^\circ \Rightarrow 3\cdot x=180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x=180^\circ \;/:3 \Rightarrow x=60^\circ \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=60^\circ-d\\ \beta=60^\circ\\ \gamma=60^\circ+d\end{array}\right\}.$$

Zbroj sinusa kutova zadan je pa slijedi:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\left(60^\circ-d\right)+\sin 60^\circ+\sin\left(60^\circ+d\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(60^\circ-d\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(60^\circ+d\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\left(60^\circ-d\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(60^\circ+d\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(60^\circ-d\right)+\sin\left(60^\circ+d\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow \left[\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin\frac{60^\circ-d+60^\circ+d}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ-d-\left(60^\circ+d\right)}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin\frac{60^\circ-d+60^\circ+d}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ-d-60^\circ-d}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\cdot\sin\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ-d-60^\circ-d}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{-2\cdot d}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\cdot\sin 60^\circ\cdot\cos\frac{-2\cdot d}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\left(-d\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos d=\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\cos d=\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\cos d=\frac{3}{2}\;/\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos d=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] \Rightarrow \cos d=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos d=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow \cos d=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos d=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3} \Rightarrow \cos d=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow d=30^\circ.$$

Kutovi trokuta su:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=60^\circ-d\\ \beta=60^\circ\\ \gamma=60^\circ+d\end{array}\right\} \Rightarrow \left[d=30^\circ\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=60^\circ-30^\circ\\ \beta=60^\circ\\ \gamma=60^\circ+30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=30^\circ\\ \beta=60^\circ\\ \gamma=90^\circ\end{array}\right\}.$$

Vježba 237

Kutovi trokuta čine aritmetički niz. Izračunajte ih ako je zbroj njihovih sinusa $0.5\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$.

Rezultat: 30º, 60º, 90º.

Zadatak 238 (Tomislava, gimnazija)

Ako kotangensi kutova trokuta čine aritmetički niz, onda i kvadrati stranica čine aritmetički niz. Dokažite!

Rješenje 238

Ponovimo!

$$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusov poučak).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{a}{2 \cdot R} \\ \sin\beta = \frac{b}{2 \cdot R} \\ \sin\gamma = \frac{c}{2 \cdot R} \end{array}\right\},$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti (poučak o kosinusu):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uporabom poučka o sinusu i kosinusu dobije se:

- $\sin\alpha = \frac{a}{2 \cdot R} \ , \ \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

- $\sin\beta=\frac{b}{2\cdot R}$, $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}$
- $\sin\gamma=\frac{c}{2\cdot R}$, $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$.

Kotangensi kutova α, β, γ trokuta čine aritmetički niz pa vrijedi:

$$2\cdot ctg\,\beta=ctg\,\alpha+ctg\,\gamma\;\Rightarrow\;2\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}}{\frac{b}{2\cdot R}}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}}{\frac{a}{2\cdot R}}+\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}}{\frac{c}{2\cdot R}}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot\frac{2\cdot R\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}=\frac{2\cdot R\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}+\frac{2\cdot R\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot\frac{2\cdot R\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}=\frac{2\cdot R\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}+\frac{2\cdot R\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot\frac{R\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{a\cdot b\cdot c}=\frac{R\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a\cdot b\cdot c}+\frac{R\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)}{a\cdot b\cdot c}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot\frac{R\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{a\cdot b\cdot c}=\frac{R\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a\cdot b\cdot c}+\frac{R\cdot\left(a^2+b^2-c^2\right)}{a\cdot b\cdot c}\;/\cdot\frac{a\cdot b\cdot c}{R}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)=b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot a^2+2\cdot c^2-2\cdot b^2=b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot a^2+2\cdot c^2-2\cdot b^2=2\cdot b^2\;\Rightarrow\;2\cdot a^2+2\cdot c^2=2\cdot b^2+2\cdot b^2\;\Rightarrow\;2\cdot a^2+2\cdot c^2=4\cdot b^2\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;4\cdot b^2=2\cdot a^2+2\cdot c^2\;\Rightarrow\;4\cdot b^2=2\cdot\left(a^2+c^2\right)\;\Rightarrow\;4\cdot b^2=2\cdot\left(a^2+2\cdot c^2\right)\;/:2\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot b^2=a^2+c^2.$$

Kvadrati stranica trokuta čine aritmetički niz.

Vježba 238

Ako kotangensi kutova trokuta čine aritmetički niz, onda i kvadrati stranica čine aritmetički niz. Dokažite!

Rezultat: 30º, 60º, 90º.

Zadatak 239 (Tomislava, gimnazija)

Ako kutovi trokuta α, β, γ čine aritmetički niz u zadanome poretku, dokaži da između stranica trokuta a, b, c postoji sveza $a^2-a\cdot c+c^2=b^2$.

Rješenje 239

Ponovimo!

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je π radijana

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot a_n=a_{n-1}+a_{n+1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti (poučak o kosinusu):

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\quad,\quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\quad,\quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Kutovi trokuta α, β, γ čine aritmetički niz u zadanome poretku.

$$2\cdot\beta=\alpha+\gamma.$$

Iz sustava izračunamo kut β.

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot\beta=\alpha+\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma=\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot\beta=\alpha+\gamma\\ \alpha+\gamma+\beta=\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot\beta+\beta=\pi\ \Rightarrow\ 3\cdot\beta=\pi\ \Rightarrow\ 3\cdot\beta=\pi\ /:3\ \Rightarrow\ \beta=\frac{\pi}{3}.$$

Uporabom poučka o kosinusu dobije se:

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\ \Rightarrow\ \left[\beta=\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ b^2=a^2+c^2-a\cdot c\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2+c^2-a\cdot c=b^2\ \Rightarrow\ a^2-a\cdot c+c^2=b^2.$$

Vježba 239

Ako kutovi trokuta α, β, γ čine aritmetički niz u zadanome poretku, dokaži da između stranica trokuta a, b, c postoji sveza $a^2+c^2-b^2=a\cdot c.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 240 (Iva, gimnazija)

Aritmetički niz ima 20 članova. Zbroj članova na parnim mjestima je 250, a zbroj članova na neparnim mjestima 220. Nađite dva srednja člana.

Rješenje 240

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Niz

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{20}$$

je aritmetički sa razlikom d.
Članovi

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots, a_{20}$$

čine aritmetički niz sa razlikom 2 · d, a broj članova je n = 10. Zbroj članova na parnim mjestima je 250 pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{r} \text{prvi član } a_2 \\ \text{razlika } 2 \cdot d \\ \text{broj lanova } n = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_2 + 9 \cdot 2 \cdot d \right] = 250 \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_2 + 18 \cdot d \right] = 250 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \left[2 \cdot a_2 + 18 \cdot d \right] = 250 \Rightarrow 5 \cdot \left[2 \cdot a_2 + 18 \cdot d \right] = 250 \ /: 5 \Rightarrow 2 \cdot a_2 + 18 \cdot d = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a_2 + 18 \cdot d = 50 \ /: 2 \Rightarrow a_2 + 9 \cdot d = 25 \Rightarrow \left[a_2 = a_1 + d \right] \Rightarrow a_1 + d + 9 \cdot d = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 10 \cdot d = 25.$$

Članovi

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{19}$$

čine aritmetički niz sa razlikom 2 · d, a broj članova je n = 10. Zbroj članova na neparnim mjestima je 220 pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{r} \text{prvi član } a_1 \\ \text{razlika } 2 \cdot d \\ \text{broj članova } n = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot 2 \cdot d \right] = 220 \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 18 \cdot d \right] = 220 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 18 \cdot d \right] = 220 \Rightarrow 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 18 \cdot d \right] = 220 \ /: 5 \Rightarrow 2 \cdot a_1 + 18 \cdot d = 44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a_1 + 18 \cdot d = 44 \ /: 2 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = 22.$$

Iz sustava izračunamo a_1 i d.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 10 \cdot d = 25 \\ a_1 + 9 \cdot d = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 10 \cdot d = 25 \\ a_1 + 9 \cdot d = 22 \ / \cdot (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 10 \cdot d = 25 \\ -a_1 - 9 \cdot d = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 3.$$

Računamo a_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + 9 \cdot d = 2 \\ d = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + 9 \cdot 3 = 22 \Rightarrow a_1 + 27 = 22 \Rightarrow a_1 = 22 - 27 \Rightarrow a_1 = -5.$$

Srednji članovi aritmetičkog niza su:

- $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = -5 \\ d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{10} = -5 + 9 \cdot 3 \Rightarrow a_{10} = -5 + 27 \Rightarrow a_{10} = 22$
- $a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = -5 \\ d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = -5 + 10 \cdot 3 \Rightarrow a_{11} = -5 + 30 \Rightarrow a_{11} = 25.$

Ili

$$a_{11} = a_{10} + d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{10} = 22 \\ d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = 22 + 3 \Rightarrow a_{11} = 25.$$

Vježba 240

Aritmetički niz ima 10 članova. Zbroj članova na parnim mjestima je 30, a zbroj članova na neparnim mjestima 25. Nađite dva srednja člana.

Rezultat: $a_5 = 5,\ a_6 = 6.$