Zadatak 001 (Maja, gimnazija)

Dokažimo da među 13 učenika uvijek postoje dva učenika koji su rođeni istog mjeseca.

Rješenje 001

Povežimo učenike i mjesece. Učenika ima 13, a mjeseci ima 12. Primjena Dirichletova pravila dokazuje istinitost tvrdnje. Jedna od formulacija Dirichletova pravila glasi ovako: Ako n + 1 predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.

Vježba 001

Dokažimo da među 8 učenika uvijek postoje dva učenika koji su rođeni istog dana.

Rezultat: Koristi Dirichletovo pravilo.

Zadatak 002 (Martina, hotelijerska škola)

Dokaži: $P_n = (n-1) \cdot (P_{n-1} + P_{n-2})$.

Rješenje 002

Broj različitih permutacija skupa od n elemenata je:

$$\mathbf{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!} \text{ (čitaj en faktorijela).}$$

Uoči da se **n!** može rastaviti na razne načine:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n,$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = (n-4)! \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n,$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n,$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n, \text{ itd.}$$

Budući da je

$$P_n = n!, \quad P_{n-1} = (n-1)!, \quad P_{n-2} = (n-2)!,$$

pišemo zadanu relaciju ovako:

$$P_n = (n-1) \cdot (P_{n-1} + P_{n-2}) \Rightarrow n! = (n-1) \cdot [(n-1)! + (n-2)!] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n! = (n-1) \cdot [(n-2)! \cdot (n-1) + (n-2)!] \Rightarrow n! = (n-1) \cdot (n-2)! \cdot [n-1+1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n! = (n-1) \cdot (n-2)! \cdot n \Rightarrow n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n \Rightarrow n! = n!.$$

Vježba 002

Dokaži: $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Rezultat: Točno.

Zadatak 003 (Danijela, hotelijerska škola)

Broj permutacija skupa od n + 2 elementa 56 puta je veći od broja permutacija skupa od n elemenata. Koliki je n?

Rješenje 003

Broj različitih permutacija skupa od n elemenata je:

$$\mathbf{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!} \text{ (čitaj en faktorijela).}$$

Uoči da se **(n + 2)!** može rastaviti na razne načine:

$$(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2),$$

$$(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2),$$

$$(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n+1)! \cdot (n+2), \text{ itd.}$$

Broj permutacija skupa od n + 2 elementa je: $P_{n+2} = (n+2)!$,

a broj permutacija skupa od n elemenata je: $P_n = n!$.

Budući da je broj permutacija skupa od n + 2 elementa 56 puta veći od broja permutacija skupa od n elemenata, pišemo

$$(n+2)! = 56 \cdot n! \quad \Rightarrow \quad n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 56 \cdot n! \quad / : n! \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (n+1) \cdot (n+2) = 56 \quad \Rightarrow \quad n^2 + 2n + n + 2 - 56 = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 + 3n - 54 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; \Rightarrow \; n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 216}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-3 \pm 15}{2} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; n_1 = \frac{-3+15}{2} = \frac{12}{2} = 6 \;\; i \;\; n_2 = \frac{-3-15}{2} = \frac{-18}{2} = -9 \left[\text{nema smisla}\right].$$

Broj n = 6.

Vježba 003

Broj permutacija skupa od n + 1 elementa 5 puta je veći od broja permutacija skupa od n elemenata. Koliki je n?

Rezultat: n = 4.

Zadatak 004 (Matea, gimnazija)

Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu: $C_{x+1}^{3} : C_{x}^{4} = 6 : 5$.

Rješenje 004

Ponovimo definiciju kombinacija bez ponavljanja!

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Zadana jednadžba napisana je u obliku razmjera. Razmjer rješavamo tako da pomnožimo vanjske članove i unutarnje članove:

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

$$C_{x+1}^{3} : C_{x}^{4} = 6 : 5 \; \Rightarrow \; 5 \cdot C_{x+1}^{3} = 6 \cdot C_{x}^{4} \; \Rightarrow \; 5 \cdot \frac{(x+1)!}{3! \cdot (x+1-3)!} = 6 \cdot \frac{x!}{4! \cdot (x-4)!} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 5 \cdot \frac{(x+1)!}{3! \cdot (x-2)!} = 6 \cdot \frac{x!}{4! \cdot (x-4)!} \; \Rightarrow \; 5 \cdot \frac{(x-2)! \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1)}{3! \cdot (x-2)!} = 6 \cdot \frac{(x-4)! \cdot (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x}{4! \cdot (x-4)!} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 5 \cdot \frac{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)}{3!} = 6 \cdot \frac{(x-3) \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x}{4!} \; / \cdot 4! \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) = 6 \cdot (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x \; / : \left[(x-1) \cdot x\right] \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 20 \cdot (x+1) = 6 \cdot (x-3) \cdot (x-2).$$

Kada se riješimo zagrada, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu:

$$20 \cdot (x+1) = 6 \cdot (x-3) \cdot (x-2) \quad \Rightarrow \quad 20x + 20 = 6 \cdot (x^2 - 2x - 3x + 6) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 20x + 20 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 6) \quad \Rightarrow \quad 20x + 20 = 6x^2 - 30x + 36 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2 - 30x + 36 - 20x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 50x + 16 = 0 \; / : 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 25x + 8 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; \Rightarrow \; x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 96}}{6} = \frac{25 \pm \sqrt{529}}{6} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x_{1,2} = \frac{25 \pm 23}{6} \; \Rightarrow \; x_1 = \frac{25+23}{6} = \frac{48}{6} = 8 \;\; i \;\; x_2 = \frac{25-23}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Budući da rješenje mora biti prirodan broj, odgovor je x = 8.

Vježba 004

Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu: $C_{x+1}^{2} : C_{x}^{3} = 4:5.$

Rezultat: x = 7.

Zadatak 005 (Ivana, gimnazija)

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $4n^2$. Izračunajte član a_{10}!

Rješenje 005

Budući da znamo zbroj prvih n članova aritmetičkog niza,

$$s_n = 4n^2,$$

član a_{10} možemo dobiti kao razliku zbroja prvih deset članova i zbroja prvih devet članova:

$$a_{10} = s_{10} - s_9,$$

$$a_{10} = 4 \cdot 10^2 - 4 \cdot 9^2 = 4 \cdot (10^2 - 9^2) = 4 \cdot (100 - 81) = 4 \cdot 19 = 76.$$

Vježba 005

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $2n^2$. Izračunajte član a_5!

Rezultat: $a_5 = 18$.

Zadatak 006 (Ariana, gimnazija)

Kolika je vjerojatnost da je broj $n \in N$, $n \le 100$ paran broj?

Rješenje 006

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja računa se formulom:

$$v = \frac{p}{m},$$

gdje je p broj povoljnih ishoda, a m broj mogućih ishoda.

Budući da je broj $n \le 100$, broj mogućih ishoda je 100.

$$m = 100.$$

U prvih 100 prirodnih brojeva ima 50 parnih. Zato je broj povoljnih ishoda 50.

$$p = 50.$$

Vjerojatnost je

$$v = \frac{p}{m} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Vježba 006

Kolika je vjerojatnost da je broj $n \in N$, $n \le 100$ neparan broj?

Rezultat: 0.5.

Zadatak 007 (Ariana, gimnazija)

Kolika je vjerojatnost da u tri bacanja kocke padnu brojevi čiji je zbroj 2 ili umnožak 4?

Rješenje 007

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja računa se formulom:

$$v = \frac{p}{m},$$

gdje je p broj povoljnih ishoda, a m broj mogućih ishoda.

Ako bacamo jednu kocku, broj mogućih ishoda je 6. U tri bacanja kocke imamo $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ mogućih ishoda: m = 216.

Na svakoj kocki najmanji broj je 1, tako da u tri bacanja najmanji zbroj je 3. Prema tome nema povoljnih ishoda za koje bi zbroj bio 2: $p_1 = 0$.

Ako se kocka tri puta baca, tada brojevi od 1 do 6 daju umnožak 4 u sljedećim slučajevima:

$$1 \cdot 1 \cdot 4 \quad , \; 1 \cdot 4 \cdot 1 \quad , \quad 4 \cdot 1 \cdot 1 \quad , \quad 1 \cdot 2 \cdot 2 \quad , \quad 2 \cdot 1 \cdot 2 \quad , \quad 2 \cdot 2 \cdot 1.$$

Sada je broj povoljnih ishoda 6: $p_2 = 6$.

Vjerojatnost je

$$v = \frac{p}{m} = \frac{p_1 + p_2}{m} = \frac{0+6}{216} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Vježba 007

Kolika je vjerojatnost da u tri bacanja kocke padnu brojevi čiji je zbroj 1 ili umnožak 1?

Rezultat: $\frac{1}{216}.$

Zadatak 008 (Sančy, hotelijerska škola)

Na koliko načina možemo podijeliti 12 različitih čokoladica na troje djece tako da jedno dijete dobije tri, drugo četiri a treće pet čokoladica?

Rješenje 008

Prvo dijete od 12 čokoladica uzima 3 čokoladice. To može učiniti na $\binom{12}{3}$ načina. Ostalo je 9 čokoladica (12 – 3).

Drugo dijete od 9 čokoladica uzima 4 čokoladice. To može učiniti na $\binom{9}{4}$ načina. Sada je ostalo 5 čokoladica (9 – 4).

Treće dijete od 5 čokoladica uzima 5 čokoladica. To može učiniti na $\binom{5}{5} = 1$ način.

Ukupan broj podjela bit će:

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot 1 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{12!}{3!} \cdot \frac{1}{4! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{6 \cdot 24 \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{24} = 27\,720.$$

Vježba 008

Na koliko načina možemo podijeliti 10 različitih čokoladica na troje djece tako da jedno dijete dobije dvije, drugo tri a treće pet čokoladica?

Rezultat: $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot 1.$

Zadatak 009 (Sančy, hotelijerska škola)

Na koliko načina možemo zapakirati 9 različitih knjiga u 5 paketa, ako četiri paketa sadrže po dvije a jedan jednu knjigu?

Rješenje 009

U prvi paket, od devet knjiga, uzimamo dvije knjige. To možemo učiniti na $\binom{9}{2}$ načina. Ostalo je 7 knjiga (9 – 2).

U drugi paket, od sedam knjiga, uzimamo dvije knjige. To možemo učiniti na $\binom{7}{2}$ načina. Sada je ostalo 5 knjiga (7 – 2).

U treći paket, od pet knjiga, uzimamo dvije knjige. To možemo učiniti na $\binom{5}{2}$ načina.

Ostale su tri knjige (5 – 2).

U četvrti paket, od tri knjige, uzimamo dvije knjige. To možemo učiniti na $\binom{3}{2}$ načina. Ostala je jedna knjiga (3 – 2).

U peti paket, od jedne knjige, uzimamo jednu knjigu. To možemo učiniti na 1 način.

Ukupan broj pakiranja bit će:

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 1.$$

Vježba 009

Na koliko načina možemo zapakirati 7 različitih knjiga u 3 paketa, ako dva paketa sadrže po tri a jedan jednu knjigu?

Rezultat: $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot 1.$

Zadatak 010 (Sančy, hotelijerska škola)

Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 5, 7 i 8 kuglica?

Rješenje 010

U prvu skupinu, od dvadeset kuglica, uzimamo pet kuglica. To možemo učiniti na $\binom{20}{5}$ načina. Ostalo je 15 kuglica (20 – 5).

U drugu skupinu, od petnaest kuglica, uzimamo sedam kuglica. To možemo učiniti na $\binom{15}{7}$ načina. Sada je ostalo 8 kuglica (7 – 2).

U treću skupinu, od osam kuglica, uzimamo osam kuglica. To možemo učiniti na 1 način..

Ukupan broj podijela kuglica bit će:

$$\binom{20}{5}\cdot\binom{15}{7}\cdot 1.$$

Vježba 010

Na koliko se načina 10 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 3, 5 i 2 kuglica?

Rezultat: $\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{5}\cdot 1.$

Zadatak 011 (Max, gimnazija)

Dano je 12 točaka u ravnini i nikoje tri nisu na jednom pravcu. Koliko pravaca određuju ovih 12 točaka?

Rješenje 011

Budući da je pravac određen s dvije točke (kroz dvije točke može se konstruirati točno jedan pravac), ovih 12 točaka određuje $\binom{12}{2}=66$ pravaca. (To su kombinacije bez ponavljanja.)

Vježba 011

Dano je 8 točaka u ravnini i nikoje tri nisu na jednom pravcu. Koliko pravaca određuju ovih 8 točaka?

Rezultat: 28.

Zadatak 012 (Max, gimnazija)

Dano je 12 točaka u ravnini i nikoje tri nisu na jednom pravcu. Koliko je trokuta određeno s tih 12 točaka?

Rješenje 012

Budući da je trokut određen s tri točke (tri vrha), ovih 12 točaka određuje $\binom{12}{3} = 220$ trokuta. (To su kombinacije bez ponavljanja.)

Vježba 012

Dano je 8 točaka u ravnini i nikoje tri nisu na jednom pravcu. Koliko je trokuta određeno s tih 8 točaka?

Rezultat: 56.

Zadatak 013 (Alica, gimnazija)

Riješi jednadžbu:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 72.$$

Rješenje 013

Gornju faktorijelu napišemo u obliku: (n + 2)! = **n!** · (n + 1) · (n + 2).

Sada je:

$$\frac{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n!} = 72 \Rightarrow [\text{kratimo razlomak s n!}] \Rightarrow (n+1)\cdot(n+2) = 72.$$

Množenjem zagrada i sređivanjem dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$n^2 + 2n + n + 2 = 72 \Rightarrow n^2 + 3n + 2 - 72 = 0 \Rightarrow n^2 + 3n - 70 = 0 \Rightarrow$$

$$a = 1,\ b = 3,\ c = -70,$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot(-70)}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{-3+17}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ i } n_2 = \frac{-3-17}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \text{ (nema smisla)}.$$

Rješenje jednadžbe je n = 7.

Vježba 013

Riješi jednadžbu:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 30.$$

Rezultat: n = 4.

Zadatak 014 (Tin, hotelijerska škola)

Riješi jednadžbu:

$$\binom{n}{5} = \binom{n}{3}.$$

Rješenje 014

1.inačica

Uporabit ćemo svojstvo simetrije binomnog koeficijenta:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Iz

$$\binom{n}{5} = \binom{n}{3}$$

slijedi

$$k = 5,\ n - k = 3 \ \ \Rightarrow \ \ n = 3 + 5 = 8.$$

Rješenje jednadžbe je n = 8.

2.inačica

Zadanu jednadžbu napišemo na sljedeći način:

$$\binom{n}{5} = \binom{n}{3} \Rightarrow \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} \ /:n! \Rightarrow \frac{1}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{1}{3! \cdot (n-3)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 3! \cdot (n-3)! = 5! \cdot (n-5)! \ \Rightarrow \ \mathbf{3!} \cdot \mathbf{(n-5)!} \cdot (n-4) \cdot (n-3) = \mathbf{3!} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \mathbf{(n-5)!} \ /:3! \cdot (n-5)! \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (n-4) \cdot (n-3) = 20 \ \Rightarrow \ n^2 - 3n - 4n + 12 - 20 = 0 \ \Rightarrow \ n^2 - 7n - 8 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ [a = 1, b = -7, c = -8] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8, \quad n_2 = \frac{7-9}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \ \text{(nema smisla)}.$$

Vježba 014

Riješi jednadžbu:

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{2}.$$

Rezultat: n = 6.

Zadatak 015 (Tina, gimnazija)

U razvoju binomnog izraza $(x + y)^n$, $n \in N_0$, koeficijent uz četvrti član je 15 puta veći od koeficijenta uz drugi član. Odredi broj n.

Rješenje 015

Iz binomne formule

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^n,$$

zaključuje se da r-ti član glasi:

$$\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}.$$

$$\text{[Počinje se brojiti od 0: } \overset{1}{\binom{n}{0}}, \overset{2}{\binom{n}{1}}, \overset{3}{\binom{n}{2}}, \overset{4}{\binom{n}{3}}, \ldots \binom{n}{n}.]$$

U zadatku četvrti član glasi:

$$\binom{n}{3} x^{n-3} y^3,$$

a drugi član iznosi:

$$\binom{n}{1} x^{n-1} y^1.$$

Budući da je koeficijent uz četvrti član 15 puta veći od koeficijenta uz drugi član, pišemo:

$$\binom{n}{3} = 15 \cdot \binom{n}{1}.$$

Dalje se lako računa:

$$\binom{n}{3}=15\cdot\binom{n}{1} \Rightarrow \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=15\cdot n \Rightarrow \frac{(n-3)!\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{3!\cdot(n-3)!}=15\cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{6}=15\cdot n \ /\cdot 6 \Rightarrow (n-2)\cdot(n-1)\cdot n=90n \Rightarrow$$

$$=> \ (n-2)\cdot(n-1)\cdot n-90n=0 \ => \ n\cdot[(n-2)\cdot(n-1)-90]=0 \ =>$$

$$=> \ n_1=0 \text{ (nema smisla)}, \quad (n-2)\cdot(n-1)-90=0 \ => \ n^2-n-2n+2-90=0 \ =>$$

$$=> \ n^2-3n-88=0 \ =>$$

$$\Rightarrow n_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9+352}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{3\pm19}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_2=\frac{3+19}{2}=11, \ n_3=\frac{3-19}{2}=-8 \text{ (nema smisla).}$$

Rezultat je n = 11.

Vježba 015

U razvoju binomnog izraza $(x + y)^n$, $n \varepsilon N_0$, koeficijent uz treći član je 3 puta veći od koeficijenta uz drugi član. Odredi broj n.

Rezultat: n = 7.

Zadatak 016 (Marija, gimnazija)

U razvoju binomnog izraza $(x + y)^n$, $n \varepsilon N_0$, koeficijent uz treći član za 27 je veći od koeficijenta uz drugi član. Odredi broj n.

Rješenje 016

Iz binomne formule

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

zaključuje se da r-ti član glasi:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}.$$

$$\left[\text{Počinje se brojiti od 0: } \overset{1}{\binom{n}{0}}, \overset{2}{\binom{n}{1}}, \overset{3}{\binom{n}{2}}, \overset{4}{\binom{n}{3}}, \ldots \binom{n}{n}.\right]$$

U zadatku treći član glasi:

$$\binom{n}{2}x^{n-2}y^2,$$

a drugi član iznosi:

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y^1.$$

Budući da je koeficijent uz treći član za 27 veći od koeficijenta uz drugi član, pišemo:

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+27.$$

Dalje ide ovako:

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+27 \Rightarrow \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=n+27 \Rightarrow \frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{2!\cdot(n-2)!}=n+27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)\cdot n}{2}=n+27 \ /\cdot 2 \Rightarrow (n-1)\cdot n=2n+54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n^2-n-2n-54=0 \ \Rightarrow \ n^2-3n-54=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9+216}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{3\pm 15}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1=\frac{3+15}{2}=9, \ n_2=\frac{3-15}{2}=-6 \text{ (nema smisla).}$$

Rezultat je n = 9.

Vježba 016

U razvoju binomnog izraza $(x + y)^n$, $n \varepsilon N_0$, koeficijent uz treći član za 9 je veći od koeficijenta uz drugi član. Odredi broj n.

Rezultat: n = 6.

Zadatak 017 (Lux, gimnazija)

U razvoju binomnog izraza $(a^m + a^n)^6$ nakon sređivanja četvrti član sadrži a^{18}. Odredite m + n.

Rješenje 017

Iz binomne formule

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

zaključujemo da r-ti član glasi:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}.$$

$$\text{[Počinje se brojiti od 0: } \overset{1}{\binom{n}{0}}, \overset{2}{\binom{n}{1}}, \overset{3}{\binom{n}{2}}, \overset{4}{\binom{n}{3}}, \ldots \binom{n}{n}.\text{]}$$

U zadatku četvrti član iznosi:

$$\binom{6}{3}\left(a^m\right)^3\left(a^n\right)^3.$$

Nakon potenciranja potencija [$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$] i množenja potencija istih baza [$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$] četvrti član ima oblik:

$$\binom{6}{3}a^{3m}\cdot a^{3n}=\binom{6}{3}a^{3m+3n}.$$

Budući da prema uvjetu zadatka četvrti član sadrži potenciju a^{18}, pišemo:

$$a^{3m+3n} = a^{18}.$$

Dalje slijedi:

$$3m + 3n = 18 \ /:3 \ \Rightarrow \ m + n = 6.$$

Vježba 017

U razvoju binomnog izraza $(a^m + a^n)^8$ nakon sređivanja peti član sadrži a^{20}. Odredite m + n.

Rezultat: m + n = 5.

Zadatak 018 (Ruža, hotelijerska škola)

U razvoju binomnog izraza $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{7}$ odredite koeficijent koji nakon sređivanja sadrži a^2.

Rješenje 018

Iz binomne formule

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

zaključujemo da r-ti član glasi:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}.$$

$$\text{[Počinje se brojiti od 0: } \overset{1}{\binom{n}{0}},\ \overset{2}{\binom{n}{1}},\ \overset{3}{\binom{n}{2}},\ \overset{4}{\binom{n}{3}},\ \ldots\ \binom{n}{n}.\text{]}$$

U zadatku tražimo koeficijent člana koji nakon sređivanja sadrži potenciju a^2. Pretpostavimo da je to član:

$$\binom{7}{k}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{7-k}\cdot\left(\sqrt[4]{a}\right)^{k}.$$

Nakon sređivanja dobije se:

$$\binom{7}{k}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{7-k}\cdot\left(\sqrt[4]{a}\right)^{k}=\binom{7}{k}a^{\frac{7-k}{3}}\cdot a^{\frac{k}{4}}=\left[a^m\cdot a^n=a^{m+n}\right]=\binom{7}{k}a^{\frac{7-k}{3}+\frac{k}{4}}=\binom{7}{k}a^{\frac{28-4k+3k}{12}}=\binom{7}{k}a^{\frac{28-k}{12}}.$$

Budući da potencija mora biti a^2, pišemo:

$$a^{\frac{28-k}{12}}=a^2\ \Rightarrow\ \left[a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x)\right]\Rightarrow\frac{28-k}{12}=2\ /\cdot 12\ \Rightarrow\ 28-k=24\ \Rightarrow\ -k=-4\ \Rightarrow\ k=4.$$

Kada znamo da je k = 4, koeficijent se lako izračuna:

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 6}=35\quad\text{ili ovako}\quad\binom{7}{4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=35.$$

Vježba 018

U razvoju binomnog izraza $\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{7}$ odredite koeficijent koji nakon sređivanja sadrži a^2.

Rezultat: 7.

Zadatak 019 (Ines, gimnazija)

U razvoju binomnog izraza $\left(2^m+2^n\right)^5$ treći član nakon sređivanja jednak je 2 0480, a četvrti član 5 120. Odredi m – n.

Rješenje 019

Iz binomne formule

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

zaključujemo da r-ti član glasi:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}.$$

[Počinje se brojiti od 0: $\overset{1}{\binom{n}{0}}, \overset{2}{\binom{n}{1}}, \overset{3}{\binom{n}{2}}, \overset{4}{\binom{n}{3}}, \ldots \binom{n}{n}$.]

U zadatku treći član glasi:

$$\binom{5}{2}\left(2^m\right)^3 \cdot \left(2^n\right)^2 = 10 \cdot 2^{3m} \cdot 2^{2n} = 10 \cdot 2^{3m+2n},$$

a četvrti član je:

$$\binom{5}{3}\left(2^m\right)^2 \cdot \left(2^n\right)^3 = 10 \cdot 2^{2m} \cdot 2^{3n} = 10 \cdot 2^{2m+3n}.$$

Zbog uvjeta u zadatku vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 2^{3m+2n} = 20480 \ /:10 \\ 10 \cdot 2^{2m+3n} = 5120 \ /:10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{3m+2n} = 2048 \\ 2^{2m+3n} = 512 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{3m+2n} = 2^{11} \\ 2^{2m+3n} = 2^{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a^{f(x)} = a^{g(x} \Rightarrow f(x) = g(x)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3m+2n=11 \\ 2m+3n=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3m+2n=11 \\ 2m+3n=9 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3m+2n=11 \\ -2m-3n=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow m-n=2.$$

Vježba 019

U razvoju binomnog izraza $\left(2^m + 2^n\right)^5$ treći član nakon sređivanja jednak je 2 560, a četvrti član 320. Odredi m – n.

Rezultat: m – n = 3.

Zadatak 020 (Nina, hotelijerska škola)

Od znamenaka {1, 3, 5, 7, 9} načinjeni su svi peteroznamenkasti brojevi s različitim znamenkama. Koliko ih ukupno ima?

Rješenje 020

Budući da je zadano pet znamenaka {1, 3, 5, 7, 9}, računamo permutacije bez ponavljanja od pet elemenata:

$$n = 5, \ P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Ukupno ima 120 peteroznamenkastih brojeva.

Vježba 020

Od znamenaka {1, 2, 3, 5} načinjeni su svi četveroznamenkasti brojevi s različitim znamenkama. Koliko ih ukupno ima?

Rezultat: $P_4 = 4! = 24$.