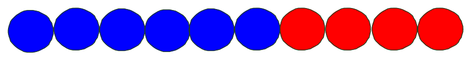
Zadatak 041 (Ivana, hotelijerska škola)

U kutiji se nalazi deset kuglica: šest plavih i četiri crvene. Biramo na sreću tri kuglice. Odredite vjerojatnost događaja A = {sve su tri kuglice plave}.

Rješenje 041

Odredimo broj svih mogućih događaja. Tri kuglice iz skupa od deset kuglica možemo odabrati na $n = \binom{10}{3}$ načina.

Budući da iz skupa od šest plavih kuglica trebamo izabrati tri kuglice, broj povoljnih ishoda je $m = \binom{6}{3}$.



U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Zato je

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}}{\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}} = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$$

Vježba 041

U kutiji se nalazi deset kuglica: šest plavih i četiri crvene. Biramo na sreću tri kuglice. Odredite vjerojatnost događaja A = {sve su tri kuglice crvene}.

Rezultat: $\frac{1}{30}$.

Zadatak 042 (Girl, hotelijerska škola)

Kocku bacamo osam puta. Kolika je vjerojatnost da se petica pojavi tri puta?

Rješenje 042

Ako obavimo n nezavisnih pokusa tada vjerojatnost da se događaj A ostvari k puta, ako je njegova vjerojatnost pojavljivanja u pokusu jednaka p, iznosi

$$p(A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Kocku smo bacili osam puta pa je n = 8. Vjerojatnost da se u jednom bacanju kocke pojavi broj pet iznosi $p = \frac{1}{6}$. Budući da se petica mora pojaviti tri puta pišemo k = 3.

Tada je

$$p(A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^5 = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^5}{6^5} = 0.104.$$

Vježba 042

Bacamo četiri kocke. Kolika je vjerojatnost događaja: A = {četvorka se pojavila točno tri puta}?

Rezultat: $p(A) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 0.015.$

Zadatak 043 (Girl, hotelijerska škola)

Dokaži da je broj $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ potpun kvadrat.

Rješenje 043

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je:

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \text{ili} \quad C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}.$$

Slijedi:

$$C_{n+k}^2+C_{n+k+1}^2=\binom{n+k}{2}+\binom{n+k+1}{2}=\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)}{1\cdot 2}+\frac{(n+k+1)\cdot(n+k+1-1)}{1\cdot 2}=$$

$$=\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)}{2}+\frac{(n+k+1)\cdot(n+k)}{2}=\frac{n+k}{2}\cdot[n+k-1+n+k+1]=\frac{n+k}{2}\cdot[2n+2k]=$$

$$=\frac{n+k}{2}\cdot 2\cdot[n+k]=(n+k)^2.$$

Vježba 043

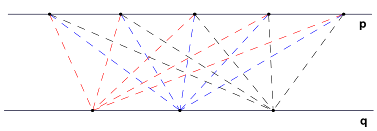
Dokaži da je broj $C_8^2+C_9^2$ potpun kvadrat.

Rezultat: 8^2.

Zadatak 044 (Iva, gimnazija)

Na pravcu p istaknuto je 5 točaka, a na pravcu q koji je s njime usporedan (paralelan) istaknute su 3 točke. Koliko ima trokuta kojima su te točke vrhovi?

Rješenje 044



Na pravcu p odaberemo bilo koje dvije točke (to su kombinacije bez ponavljanja C_5^2) i spojimo ih s bilo kojom točkom na q pravcu. Broj trokuta je 3 · C_5^2. Sada na pravcu q odaberemo bilo koje dvije točke (to su kombinacije bez ponavljanja C_3^2) i spojimo ih s bilo kojom točkom na p pravcu. Broj trokuta je 5 · C_3^2. Trokute smo, dakle, dobili da smo odabrali bilo koje dvije točke na jednom pravcu i spojili ih s bilo kojom točkom na drugom pravcu. Ukupno je trokuta:

$$3\cdot C_5^2+5\cdot C_3^2=3\cdot\binom{5}{2}+5\cdot\binom{3}{2}=3\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}+5\cdot\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=30+15=45.$$

Vježba 044

Na pravcu p istaknuto je 9 točaka, a na pravcu q koji je s njime usporedan (paralelan) istaknuto je 7 točaka. Koliko ima trokuta kojima su te točke vrhovi?

Rezultat: 441.

Zadatak 045 (Ivana, hotelijerska škola)

Zadan je kvadrat kome je upisana kružnica. Kolika je vjerojatnost da pri slučajnom biranju točke iz tog složenog geometrijskog lika bude odabrana točka kvadrata koja ne pripada krugu upisane kružnice?

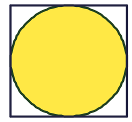
Rješenje 045

Vjerojatnost da na sreću odabrana točka unutar nekog skupa padne u neki njegov podskup jednaka je omjeru površina podskupa prema površini cijeloga skupa.

Neka je Ω ograničen podskup ravnine i m(Ω) njegova površina, a A podskup od Ω. Kažemo da biramo točku na sreću unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo geometrijska vjerojatnost.



Neka je A događaj:

A = {točka je pala unutar kruga}.

Površina kruga je:

$$m(A)=\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi.$$

Površina kvadrata je:

$$m(\Omega)=a^2.$$

Sada tražimo vjerojatnost da je odabrana točka kvadrata koja ne pripada krugu upisane kružnice. To je suprotan događaj od A:

$$\overline{A}=\{\text{točka nije pala unutar kruga}\}$$

Vjerojatnost suprotnog događaja je:

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A).$$

Zato je

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\frac{m(A)}{m(\Omega)}=1-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi}{a^2}=1-\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\pi}{a^2}=1-\frac{\pi}{4}=\frac{4-\pi}{4}.$$

Vježba 045

Zadan je kvadrat kome je upisana kružnica. Kolika je vjerojatnost da pri slučajnom biranju točke iz tog složenog geometrijskog lika bude odabrana točka kvadrata koja pripada krugu upisane kružnice?

Rezultat: $\frac{\pi}{4}.$

Zadatak 046 (Ivana, hotelijerska škola)

Kolika je vjerojatnost da točka na sreću odabrana unutar jednakostraničnog trokuta stranice a padne unutar kruga upisanog u taj trokut?

Rješenje 046

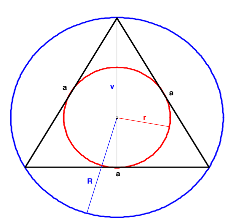
Vjerojatnost da na sreću odabrana točka unutar nekog skupa padne u neki njegov podskup jednaka je omjeru površina podskupa prema površini cijeloga skupa.

Neka je Ω ograničen podskup ravnine i m(Ω) njegova površina, a A podskup od Ω. Kažemo da biramo točku na sreću unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka:

$$\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{m(A)}}{\mathrm{m(\Omega)}}.$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo geometrijska vjerojatnost.

Za jednakostraničan trokut vrijede formule:



$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4},\ r=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}.$$

Neka je A traženi događaj:

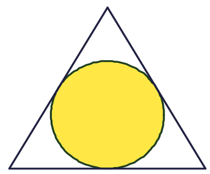
A = {točka je pala unutar kruga upisanog u jednakostraničan trokut}.

Površina upisanog kruga je:

$$m(A)=r^2\cdot\pi=\left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot\pi=\frac{a^2\cdot\pi}{12}.$$

Površina jednakostraničnog trokuta je:

$$m(\Omega)=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$



Odgovarajuća vjerojatnost iznosi:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{a^2\cdot\pi}{12}}{\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}}=\frac{\pi}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{9}.$$

Vježba 046

U jednakostraničnom trokutu stranice a upisan je krug. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana točka u trokutu ne padne unutar tog kruga?

Rezultat: $\frac{9-\pi\cdot\sqrt{3}}{9}.$

Zadatak 047 (Ivana, hotelijerska škola)

U vazi su 4 različita crvena, 3 različita žuta i 2 različita plava cvijeta. Na koliko načina iz ovog cvijeća možemo napraviti buketić od 3 cvijeta tako da sadrži barem jedan crveni cvijet?

Rješenje 047

1.inačica

Između četiri crvena cvijeta jedan crveni cvijet možemo izabrati na $\binom{4}{1}$ načina. Cvjetova ostalih boja je pet.

Zato se buketić od 3 cvijeta pri čemu je točno jedan crveni cvijet može sastaviti na $\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}$ načina.

Između četiri crvena cvijeta dva se crvena cvijeta mogu izabrati na $\binom{4}{2}$ načina. Cvjetova ostalih boja je pet.

Zato se buketić od 3 cvijeta pri čemu su točno dva crvena cvijeta može sastaviti na $\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$ načina.

Između četiri crvena cvijeta tri se crvena cvijeta mogu izabrati na $\binom{4}{3}$ načina. Cvjetova ostalih boja je pet.

Zato se buketić od 3 cvijeta pri čemu su sva tri crvena cvijeta može sastaviti na $\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{0}$ načina.

Tada se buketić od tri cvijeta tako da sadrži barem jedan crveni cvijet može načiniti na

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}+\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{0}=4\cdot10+6\cdot5+4\cdot1=74 \text{ načina.}$$

2.inačica

U vazi se ukupno nalazi 9 cvjetova. Buketić od 3 cvijeta možemo načiniti na $\binom{9}{3}$ načina.

Pet cvjetova nisu crvene boje. Buketić od 3 cvijeta koji nisu crvene boje možemo načiniti na $\binom{5}{3}$ načina.

Tada se buketić od tri cvijeta tako da sadrži barem jedan crveni cvijet može načiniti na

$$\binom{9}{3}-\binom{5}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=84-10=74 \text{ načina.}$$

Vježba 047

U vazi su 3 različita crvena, 3 različita žuta i 2 različita plava cvijeta. Na koliko načina iz ovog cvijeća možemo napraviti buketić od 3 cvijeta tako da sadrži barem jedan crveni cvijet?

Rezultat: 46

Zadatak 048 (Zoki, gimnazija)

Vjerojatnost da strijelac pogodi metu je 0.6. Kolika je vjerojatnost da od 5 gađanja ima barem 2 pogotka?

Rješenje 048

1.inačica

Ponovimo pojam **ponavljanje pokusa**. Pretpostavimo da neki pokus možemo ponavljati n puta, pod istim uvjetima. Neka je p vjerojatnost da se u jednom pokusu pojavi događaj A:

P(A) = p.

Neka nam ♥ označava da se događaj A pojavio u nekom pokusu, a ♥ označava da se A nije pojavio. Tad rezultate pojavljivanja događaja A u svih n pokusa možemo predočiti nizom od n znakova ♥ i ♥.

Primjer Kocku bacamo pet puta. Kolika je vjerojatnost da se jedinica pojavi dva puta?

Neka ♥ označava da se pojavila jedinica, neka ♥ označava da se nije pojavila jedinica. Zadani događaj ostvarit će se ako se ostvari niz poput sljedećeg:

♥ ♥ ♥ ♥ ♥,

kad se jedinica pojavila u prvom i trećem pokusu. Vjerojatnost da se pojavi broj jedan u jednom bacanju je $P(1)=\frac{1}{6}$, a da se ne pojavi je $P(\bar{1})=\frac{5}{6}$. Budući da su rezultati u svakom bacanju kocke **nezavisni događaji**, zato je vjerojatnost da se točno ovaj niz ostvari jednaka:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Koliko ima povoljnih nizova za promatrani događaj? Onoliko na koliko načina možemo izabrati dva znaka ♥ od pet mogućih mjesta. Ili, onoliko na koliko različitih načina možemo permutirati niz od dva znaka ♥ i tri znaka ♥. Broj tih načina je:

$$C_5^2=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!} \qquad \text{ili} \qquad P_5^{2,3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}.$$

Zato je vjerojatnost da će se jedinica pojaviti dva puta jednaka

$$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Prikažimo rezultat i tablično!

♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
♥ ♥ ♥ ♥ ♥	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$

Definicija
Ako je p vjerojatnost da se događaj A pojavi u svakom pokusu, onda je vjerojatnost da će se on ostvariti k puta pri ponavljanju n nezavisnih pokusa jednaka

$$P(A)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Sada riješimo zadatak:
Vjerojatnost da strijelac pogodi metu je 0.6. Kolika je vjerojatnost da od 5 gađanja ima barem 2 pogotka?

Vjerojatnost da strijelac pogodi metu je p = 0.6. Broj nezavisnih pokusa (gađanja) je n = 5.

Što znači da od 5 gađanja strijelac ima <u>barem</u> 2 pogotka?

Znači da ima ili 2 točna pogotka, ili 3, ili 4 ili svih 5.

Neka je događaj A = {ima točno dva pogotka},

$$P(A)=\binom{5}{2}\cdot 0.6^2\cdot(1-0.6)^3=\binom{5}{2}\cdot 0.6^2\cdot 0.4^3.$$

Neka je događaj B = {ima točno tri pogotka},

$$P(A)=\binom{5}{3}\cdot 0.6^3\cdot(1-0.6)^2=\binom{5}{3}\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2.$$

Neka je događaj C = {ima točno četiri pogotka},

$$P(A)=\binom{5}{4}\cdot 0.6^4\cdot(1-0.6)^1=\binom{5}{4}\cdot 0.6^4\cdot 0.4.$$

Neka je događaj D = {ima točno pet pogodaka},

$$P(A)=\binom{5}{5}\cdot 0.6^5\cdot(1-0.6)^0=\binom{5}{5}\cdot 0.6^5.$$

Vjerojatnost da se u pet gađanja taj događaj ostvari ili dva, ili tri, ili četiri, ili pet puta iznosi:

$$P(E)=\binom{5}{2}\cdot 0.6^2\cdot 0.4^3+\binom{5}{3}\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2+\binom{5}{4}\cdot 0.6^4\cdot 0.4+\binom{5}{5}\cdot 0.6^5=$$
$$=10\cdot 0.6^2\cdot 0.4^3+10\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2+5\cdot 0.6^4\cdot 0.4+1\cdot 0.6^5=$$
$$=0.6^2\cdot\left(10\cdot 0.4^3+10\cdot 0.6\cdot 0.4^2+5\cdot 0.6^2\cdot 0.4+0.6^3\right)=0.91296.$$

2.inačica

Opišimo suprotne događaje:

Neka je događaj $\overline{A}$ = {ima točno jedan pogodak},

$$P(\overline{A})=\binom{5}{1}\cdot 0.6^1\cdot(1-0.6)^4=\binom{5}{1}\cdot 0.6^1\cdot 0.4^4.$$

Neka je događaj $\overline{B}$ = {nema nijedan pogodak},

$$P(\overline{B})=\binom{5}{0}\cdot 0.6^0\cdot(1-0.6)^5=\binom{5}{0}\cdot 0.4^5=0.4^5.$$

Tada je

$$P(E)=1-\binom{5}{1}\cdot 0.6^1\cdot 0.4^4-\binom{5}{0}\cdot 0.4^5=1-5\cdot 0.6\cdot 0.4^4-0.4^5=0.91296.$$

Vježba 048

Vjerojatnost da strijelac pogodi metu je 0.5. Kolika je vjerojatnost da od 4 gađanja ima barem 3 pogotka?

Rezultat: 0.313

Zadatak 049 (Ines, gimnazija)

Koliko najmanje puta treba uzastopno baciti igraću kocku pa da vjerojatnost da se bar jednom pojavi broj 6 bude veća od 50%?

Rješenje 049

Ako izvodimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$$P(A)=1-(1-p)^{n}.$$

Primijeti: događaj A = {nastupi bar jednom} suprotan je događaju {ne nastupi ni jednom}.

Kad bacamo kocku vjerojatnost da će pasti broj 6 iznosi:

$$p=\frac{1}{6}.$$

Vjerojatnost da se bar jednom pojavi broj 6 je:

$$P(A)=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n}.$$

Budući da vjerojatnost mora biti veća od 50%, slijedi:

$$1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n}>\frac{50}{100}\Rightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}>\frac{1}{2}\Rightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^{n}>\frac{1}{2}-1\Rightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^{n}>-\frac{1}{2}\ /\cdot(-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^{n}<\frac{1}{2}\ /\log\Rightarrow n\cdot\log\frac{5}{6}<\log\frac{1}{2}\Rightarrow n<\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}}\Rightarrow n<3.8\Rightarrow \text{tri puta.}$$

Vježba 049

Koliko najmanje puta treba uzastopno baciti igraću kocku pa da vjerojatnost da se bar jednom pojavi broj 5 bude veća od 50%?

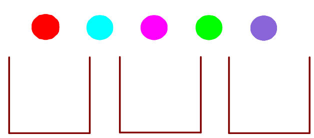
Rezultat: tri puta.

Zadatak 050 (Ines, gimnazija)

Na koliko se načina pet raznobojnih kuglica može rasporediti u tri kutije?

Rješenje 050

Prvu kuglicu možemo staviti u bilo koju kutiju, drugu kuglicu isto tako. Prve dvije kuglice možemo razmjestiti na $3\cdot 3$ načina. Nakon toga treću kuglicu ponovno možemo staviti na 3 načina. Prve tri kuglice možemo razmjestiti na $3\cdot 3\cdot 3$ načina itd. Broj različitih načina je $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^{5}=243$.



Zadatak možemo riješiti i pomoću varijacija.

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata s ponavljanjem je

$$V_{r}^{'}(n)=n^{r}.$$

Budući da su to varijacije s ponavljanjem petog razreda od tri elementa dobit ćemo

$$V_{5}^{'}(3)=3^{5}=243.$$

Vježba 050

Na koliko se načina pet raznobojnih kuglica može rasporediti u dvije kutije?

Rezultat: $2^{5}=32$.

Zadatak 051 (Ines, gimnazija)

Koliko se različitih željezničkih kompozicija može sastaviti od lokomotive, 3 jednaka putnička i 3 jednaka teretna vagona?

Rješenje 051

Pretpostavimo da je lokomotiva uvijek na prvom mjestu. Tri teretna i tri putnička vagona možemo rasporediti u kompoziciju na (to su permutacije s ponavljanjem)

$$P_6^{3,\,3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 6} = 20 \text{ načina.}$$

Vježba 051

Koliko se različitih željezničkih kompozicija može sastaviti od lokomotive , 2 jednaka putnička i 2 jednaka teretna vagona?

Rezultat: 6.

Zadatak 052 (Ines, gimnazija)

Test se sastoji od 5 pitanja na koje se odgovara zaokruživanjem odgovora A, B ili C. Na koliko načina možemo riješiti test ako odgovorimo na sva pitanja?

Rješenje 052

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata s ponavljanjem je

$$V_r{}'(n) = n^r.$$

Uporabit ćemo varijacije s ponavljanjem petog razreda od tri elementa:

$$V_5{}'(3) = 3^5 = 243.$$

Vježba 052

Test se sastoji od 4 pitanja na koje se odgovara zaokruživanjem odgovora A, B ili C. Na koliko načina možemo riješiti test ako odgovorimo na sva pitanja?

Rezultat: 81.

Zadatak 053 (Ines, gimnazija)

Sportska se prognoza sastoji iz određenog broja parova. Za svaki par treba upisati 0, 1 ili 2. Ako se sportska prognoza može ispuniti na 59049 načina, koliko ima parova?

Rješenje 053

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata s ponavljanjem je

$$V_r{}'(n) = n^r.$$

Uporabit ćemo varijacije s ponavljanjem n – tog razreda od tri elementa:

$$V_n{}'(3) = 3^n = 54049 \;\Rightarrow\; 3^n = 3^{10} \;\Rightarrow\; n = 10.$$

Vježba 053

Sportska se prognoza sastoji iz određenog broja parova. Za svaki par treba upisati 0, 1 ili 2. Ako se sportska prognoza može ispuniti na 2187 načina, koliko ima parova?

Rezultat: 7.

Zadatak 054 (Ines, gimnazija)

Koliko brojeva iz skupa {1, 2, 3, 4, ... , 999, 1000} u svom zapisu ne sadrže znamenku 0?

Rješenje 054

1.inačica

Odredimo brojeve koji u svom zapisu sadrže znamenku 0 i izbacimo ih iz skupa {1, 2, 3, 4, ... , 999, 1000}.

- Jednoznamenkasti brojevi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 ne sadrže znamenku 0.
- Dvoznamenkasti brojevi: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90 sadrže znamenku 0. Ima ih 9.

- Za troznamenkaste brojeve zaključujemo ovako: Svi troznamenkasti brojevi kojima je znamenka 1 na prvom mjestu, a sadrže znamenku 0 su: 100, 110, 101, 120, 102, 130, 103, 140, 104, 150, 105, 160, 106, 170, 107, 180, 108, 190 i 109. Ima ih 19. Slično će biti ako su na prvom mjestu znamenke: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9. Ukupno ima $19 \cdot 9 = 171$ takvih brojeva.
- Samo je jedan četveroznamenkasti broj koji sadrži znamenku 0 : 1000.

Dakle, brojeva koji u svom zapisu ne sadrže znamenku 0 ima: $1000 - (9 + 171 + 1) = 819$.

2.inačica

U skupu {1, 2, 3, 4, ... , 999, 1000} nalaze se svi jednoznamenkasti, dvoznamenkasti i troznamenkasti brojevi.

- Jednoznamenkasti brojevi ne sadrže znamenku 0. Ima ih 9.
- Dvoznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 0 ima (to su varijacije s ponavljanjem od devet elemenata drugog razreda) $9^2 = 81$.
- Troznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 0 ima (to su varijacije s ponavljanjem od devet elemenata trećeg razreda) $9^3 = 729$.

Ukupno ima $9 + 9^2 + 9^3 = 9 + 81 + 729 = 819$ brojeva koji ne sadrže znamenku 0 u svom zapisu.

Vježba 054

Koliko brojeva iz skupa {1, 2, 3, 4, ... , 99, 100} u svom zapisu ne sadrže znamenku 0?

Rezultat: 90.

Zadatak 055 (Ines, gimnazija)

Koliko je željezničkih postaja na pruzi, ako za sva jednosmjerna putovanja prugom postoji 380 različitih putničkih karata?

Rješenje 055

Pretpostavimo da ima n željezničkih postaja.
Iz postaje 1 može su u jednom smjeru kupiti $n - 1$ različita putnička karta.
Iz postaje 2 može su u jednom smjeru kupiti $n - 2$ različite putničke karte.
Iz postaje 3 može su u jednom smjeru kupiti $n - 3$ različite putničke karte.
Iz postaje 4 može su u jednom smjeru kupiti $n - 4$ različite putničke karte.
....

Iz postaje $n - 3$ može su u jednom smjeru kupiti 3 različite putničke karte.
Iz postaje $n - 2$ može su u jednom smjeru kupiti 2 različite putničke karte.
Iz postaje $n - 1$ može su u jednom smjeru kupiti samo 1 karta.

Dakle, ukupno se može kupiti

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1)$$

različitih putničkih karata.

Podsjetimo se formule za zbroj prvih n prirodnih brojeva:

$$1+2+3+ \ldots +(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

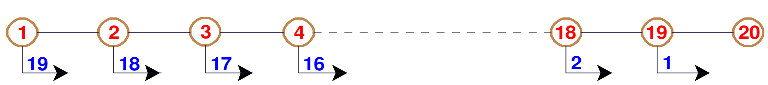
Zato je

$$1+2+3+4+ \ldots +(n-3)+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

Budući da se isto tako putničke karte mogu kupovati i za suprotan smjer, vrijedi:

$$2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=380 \Rightarrow n^2-n-380=0 \Rightarrow n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+1520}}{2}=\frac{1\pm 39}{2} \Rightarrow n=20.$$

Postoji 20 željezničkih postaja.



Vježba 055

Koliko je željezničkih postaja na pruzi, ako za sva jednosmjerna putovanja prugom postoji 20 različitih putničkih karata?

Rezultat: 5.

Zadatak 056 (Ines, gimnazija)

Kolika je vjerojatnost da se u tri uzastopna bacanja igraće kocke svaki put pojavi isti broj?

Rješenje 056

Naputak – baciti tri igraće kocke odjednom jednako je bacanju jedne kocke tri puta.
Ako bacamo tri igraće kocke, tada prostor Ω sadrži n = 6 · 6 · 6 = 216 elementarnih događaja.
Događaj A = {pojavi se isti broj} možemo zapisati u obliku:
A = {(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)}, tj. m = 6.
Tada je

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}=2.78\%.$$

Vježba 056

Kolika je vjerojatnost da se u četiri uzastopna bacanja igraće kocke svaki put pojavi isti broj?

Rezultat: 0.46%.

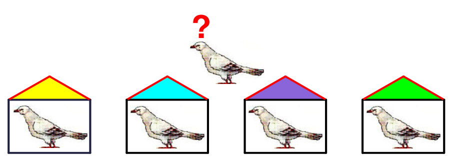
Zadatak 057 (Anabela, gimnazija)

Dokažite:

a) da među 13 učenika uvijek postoje dva učenika koji su rođeni u istome mjesecu
b) da se među 15 zadanih prirodnih brojeva mogu odabrati dva broja čija je razlika djeljiva s 14
c) da u školi koja ima 30 razrednih odjela i 1000 učenika postoji odjel koji ima barem 34 učenika
d) da ako Hrvatska ima 4.6 milijuna stanovnika i ako svaki čovjek ima najviše 300 000 vlasi na glavi, tada u Hrvatskoj postoji barem 16 ljudi s "na dlaku" jednakim brojem vlasi na glavi.

Rješenje 057

Zadatke ovog tipa najelegantnije rješavamo pomoću Dirichletovog pravila. Dirichletov princip ili pravilo jedno je od najjednostavnijih kombinatornih pravila. U literaturi je poznat i pod raznim drugim imenima: pravilo pretinaca, pravilo kutija ili pravilo golubinjaka (od engl. pigenhole principle). Najčešće se zove Dirichletovo pravilo prema njemačkom matematičaru francuskog podrijetla **G. L. Dirichletu** (1805. – 1859.). Slikovito rečeno, to pravilo tvrdi sljedeće: ako puno golubova doleti u nekoliko golubinjaka, onda će bar u jednome golubinjaku biti bar dva goluba.



Malo preciznije, Dirichletovo pravilo možemo formulirati ovako:

Ako n + 1 predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija (pretinaca), onda bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.

Dokaz je gotovo nepotreban, a provodi se kontradikcijom. Pretpostavimo li da svaka kutija sadrži najviše jedan predmet, predmeta bi bilo najviše n. Budući da imamo n + 1, to je kontradikcija.

a)
Lako se uočava da treba povezati učenike i mjesece. To znači da su učenici – "predmeti", a mjeseci – "kutije".
Imamo 13 "predmeta" i 12 "kutija". Izravna primjena Dirichletova pravila osigurava valjanost tvrdnje.

b)
Ovdje treba povezati zadane brojeve i njihove ostatke pri dijeljenju s 14.

Pri dijeljenju prirodnog broja s 14 dobiva se jedan od ostataka 0, 1, 2, 3, 4, ... , 13. Dakle, ima 14 različitih ostataka.
To znači da su zadani brojevi – "predmeti", a ostaci – "kutije". Imamo 15 "predmeta" i 14 "kutija".
Izravna primjena Dirichletova pravila osigurava valjanost tvrdnje: među odabranim brojevima postoje dva prirodna broja,
recimo x i y, koji pri dijeljenju s 14 daju isti ostatak r. Dakle, $x = 14a + r$ i $y = 14b + r$.
Promotrimo njihovu razliku i uočimo da je djeljiva s 14:

$$x - y = 14a + r - (14b + r) = 14a + r - 14b - r = 14 \cdot (a - b).$$

c)
Pretpostavimo suprotno, tj. da svaki razredni odjel ima najviše 33 učenika.
Tada bi škola imala najviše $30 \cdot 33 = 990$ učenika, što je kontradikcija.
Naime, već u školi s 30 odjela i 991 učenikom možemo naći odjel koji ima barem 34 učenika.

d)
Podijelimo sve stanovnike Hrvatske u "pretince" s obzirom na broj vlasi na glavi, tj. na one koji imaju 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... , 300 000 vlasi. Prema tome, stanovnike Hrvatske podijelili smo u 300 001 "pretinaca". Kad bi u svakom "pretincu" bilo najviše 15 ljudi, u Hrvatskoj bi bilo najviše $15 \cdot 300\,001 = 4\,500\,015$ stanovnika, što je u suprotnosti s podatcima iz teksta zadatka.

Vježba 057

Dokažite da među 8 učenika uvijek postoje dva učenika koji su rođeni u istome danu.

Rezultat: Dirichletovo pravilo osigurava valjanost tvrdnje.

Zadatak 058 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva kojima su znamenke različite?

Rješenje 058

Prvu znamenku četveroznamenkastog broja biramo iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} jer nula ne može biti na prvom mjestu (to je 9 mogućnosti).

Drugu znamenku biramo iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku (to je ponovno 9 mogućnosti).

Treću znamenku biramo iz skupa svih znamenki {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} različitih od prve dvije znamenke (to je 8 mogućnosti).

Četvrtu znamenku biramo iz skupa svih znamenki {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} različitih od prve tri znamenke (to je 7 mogućnosti).

Četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima:

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Vježba 058

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke različite?

Rezultat: $N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$

Zadatak 059 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko se parnih troznamenkastih brojeva može načiniti pomoću znamenaka 3, 5, 6, 8?

Rješenje 059

Na prvom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa {3, 5, 6, 8} (to su 4 mogućnosti).

Na drugom mjestu, također, može biti bilo koja znamenka iz skupa {3, 5, 6, 8} (to su 4 mogućnosti).

Budući da troznamenkasti broj mora biti paran, na trećem mjestu mogu biti samo znamenke 6 ili 8 (to su 2 mogućnosti). Troznamenkastih brojeva ima:

$$N = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32.$$

Vježba 059

Koliko se parnih dvoznamenkastih brojeva može načiniti pomoću znamenaka 3, 5, 6, 8?

Rezultat: $N = 4 \cdot 2 = 8.$

Zadatak 060 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Odredi broj elemenata n ako je broj varijacija četvrtog razreda bez ponavljanja 1680.

Rješenje 060

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata bez ponavljanja jednak je

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Postavimo jednadžbu:

$$V_n^4 = 1680 \Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 1680.$$

Budući da na lijevoj strani imamo četiri uzastopna prirodna broja, pokušat ćemo broj 1680 također rastaviti na četiri uzastopna faktora i tako dobiti rezultat za n.

$$1680 = 2 \cdot 840 = 2 \cdot 2 \cdot 420 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 210 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 105 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5.$$

Iz jednakosti:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

slijedi

$$\left.\begin{aligned} n &= 8 \\ n-1 &= 7 \\ n-2 &= 6 \\ n-3 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 8.$$

Vježba 060

Odredi broj elemenata n ako je broj varijacija četvrtog razreda bez ponavljanja 120.

Rezultat: n = 5.