Zadatak 061 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Na koliko se načina 5 različitih odjevnih predmeta može podijeliti među 3 osobe?

Rješenje 061

Prva osoba može izabrati bilo koji od 5 odjevnih predmeta (to je 5 mogućnosti).
Druga osoba može izabrati bilo koji od 4 preostala predmeta (to su 4 mogućnosti).
Treća osoba može izabrati bilo koji od preostala 3 odjevna predmeta (to su 3 mogućnosti).
Ukupan broj načina je:

$$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Vježba 061

Na koliko se načina 5 različitih odjevnih predmeta može podijeliti među 2 osobe?

Rezultat: $N = 5 \cdot 4 = 20.$

Zadatak 062 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko ima različitih registracijskih oznaka za automobile ako svaka oznaka osim ZG sadrži 4 znamenke i 2 slova uz pretpostavku da se ni brojke ni slova ne ponavljaju (koristi se 30 slova abecede)?

Rješenje 062

Prva znamenka četveroznamenkastog broja bira se iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (to je 10 mogućnosti).

Druga znamenka bira se iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku (to je 9 mogućnosti).

Treću znamenku odabiremo iz skupa svih znamenki {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} različitih od prve dvije znamenke (to je 8 mogućnosti).

Četvrtu znamenku biramo iz skupa svih znamenki {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} različitih od prve tri znamenke (to je 7 mogućnosti).

Dva slova biramo iz skupa koji se sastoji od 30 slova abecede. Prvo slovo možemo odabrati na 3o načina, a drugo na 29 načina.

Ukupan broj registracija bit će:

$$N = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 30 \cdot 29 = 4384800.$$

www.halapa.com

Vježba 062

Koliko ima različitih registracijskih oznaka za automobile ako svaka oznaka osim BJ sadrži 4 znamenke i 2 slova uz pretpostavku da se ni brojke ni slova ne ponavljaju (koristi se 20 slova abecede)?

Rezultat: $N = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 19 = 1915200.$

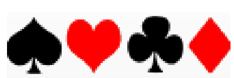
Zadatak 063 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Iz snopa od 52 karte biramo tri, ali tako da nakon izbora svake karte zapišemo njezinu vrijednost, a samu kartu vratimo u snop. Na koliko načina možemo odabrati tri karte iste boje?

Rješenje 063

Snop od 52 karte sastoji se od 13 karata različite jakosti u svakoj od četiri boje.

- Boju karte možemo odabrati na 4 načina.



- Tri karte iste boje može se odabrati na $\overline{C}_{13}^{3}$ načina (to su kombinacije s ponavljanjem od 13 elemenata trećeg razreda).

Zato je:

$$N = 4 \cdot \overline{C}_{13}^{3} = 4 \cdot \binom{13+3-1}{3} = 4 \cdot \binom{15}{3} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1820.$$

Vježba 063

Iz snopa od 52 karte biramo dvije, ali tako da nakon izbora svake karte zapišemo njezinu vrijednost, a samu kartu vratimo u snop. Na koliko načina možemo odabrati dvije karte iste boje?

Rezultat: $N = 4 \cdot \binom{14}{2}.$

Zadatak 064 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Iz snopa od 52 karte biramo tri, ali tako da nakon izbora svake karte zapišemo njezinu vrijednost, a samu kartu vratimo u snop. Na koliko načina možemo odabrati tri karte iste jakosti?

Rješenje 064

Snop od 52 karte sastoji se od 13 karata različite jakosti u svakoj od četiri boje.

- Jakost karte može se odabrati na 13 načina.
- Tri karte iste jakosti može se odabrati na $\overline{C}_4^3$ načina (to su kombinacije s ponavljanjem od 4 elemenata trećeg razreda).

Zato je:

$$N = 13 \cdot \overline{C}_4^3 = 13 \cdot \binom{4+3-1}{3} = 13 \cdot \binom{6}{3} = 13 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 260.$$

Vježba 064

Iz snopa od 52 karte biramo dvije, ali tako da nakon izbora svake karte zapišemo njezinu vrijednost, a samu kartu vratimo u snop. Na koliko načina možemo odabrati dvije karte iste jakosti?

Rezultat: $N = 13 \cdot \binom{5}{2}.$

www.halapa.com

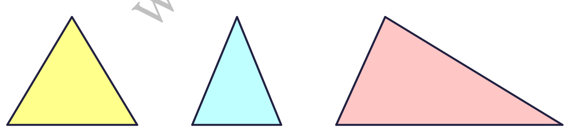
Zadatak 065 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko ima različitih trokuta kojima su duljine stranica neki od brojeva 4 cm, 5 cm, 6 cm ili 7 cm?

Rješenje 065

Najprije uvjerimo se da pomoću bilo koje tri stranice možemo konstruirati trokut, tj. mora vrijediti nejednakost trokuta: $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$.

S obzirom na stranice trokute dijelimo na jednakostranične, jednakokračne i raznostranične.



U zadatku riječ je o kombinacijama s ponavljanjem od 4 elementa trećeg razreda:

$$\overline{C}_4^3 = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Vježba 065

Koliko ima različitih trokuta kojima su duljine stranica neki od brojeva 8 cm, 10 cm, 12 cm ili 14 cm?

Rezultat: 20.

Zadatak 066 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko elemenata sadrži skup A ako je ukupan broj njegovih kombinacija drugog razreda s ponavljanjem jednak 276?

Rješenje 066

Broj svih kombinacija s ponavljanjem r – tog razreda u n – članom skupu jednak je

$$\overline{C}_n^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Budući da je

$$\overline{C}_n^{\,2} = \binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2}, \text{ slijedi } \binom{n+1}{2} = 276.$$

Pišemo:

$$\binom{n+1}{2} = 276 \Rightarrow \frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2} = 276 \ / \cdot 2 \Rightarrow (n+1)\cdot n = 552 \Rightarrow n^2 + n - 552 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2208}}{2} = \frac{-1 \pm 47}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{-1+47}{2} = \frac{46}{2} = 23.$$

Vježba 066

Koliko elemenata sadrži skup A ako je ukupan broj njegovih kombinacija drugog razreda s ponavljanjem jednak 15?

Rezultat: n = 5.

Zadatak 067 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko različitih binarnih brojeva možemo zapisati dužine 8 znamenaka?

Rješenje 067

Znakovi mogu biti 0 i 1. Budući da za svaki znak imamo dvije mogućnosti, to znači da za riječ od 8 znakova postoje $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$ mogućnosti, tj. radi se o varijacijama s ponavljanjem od dva elementa osmog razreda:

$$\overline{V}_2^{\,8} = 2^8 = 256.$$

Vježba 067

Koliko različitih binarnih brojeva možemo zapisati dužine 5 znamenaka?

Rezultat: 32.

www.halapa.com

Zadatak 068 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko ima troznamenkastih brojeva čije su znamenke iz skupa {1, 3, 5, 7, 9}?

Rješenje 068

Prvu znamenku možemo izabrati iz skupa {1, 3, 5, 7, 9} na pet načina. Druga i treća znamenka također se mogu iz skupa {1, 3, 5, 7, 9} izabrati svaka na pet načina. Dakle, radi se o varijacijama s ponavljanjem od pet elemenata trećeg razreda:

$$\overline{V}_5^{\,3} = 5^3 = 125.$$

Vježba 068

Koliko ima troznamenkastih brojeva čije su znamenke iz skupa {1, 3, 5, 7}?

Rezultat: 64.

Zadatak 069 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 3, 5 i 8?

Rješenje 069

Za svaku znamenku imamo tri mogućnosti. Za peteroznamenkasti broj postoje $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$ mogućnosti, tj. radi se o varijacijama s ponavljanjem od tri elementa petog razreda:

$$\overline{V}_3^{\,5} = 3^5 = 243.$$

Vježba 069

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 3, 5 i 8?

Rezultat: 81.

Zadatak 070 (Zavodljiva milijunašica, gimnazija)

Od osnovnih Morseovih znakova • i **—** mogu se nizanjem sastavljati složeni znakovi. Koliko postoji složenih znakova od najviše 5 osnovnih?

Rješenje 070

Znakovi su Morseovih znakovi • i **—**. Uočimo da se riječ može sastojati od 1 znaka ili od 2 znaka ili od 3 znaka ili od 4 znaka ili od 5 znakova. Budući da za svaki znak imamo dvije mogućnosti, znači da za riječ od:

- 1 znaka imamo $2 = 2^1$ mogućnosti
- 2 znaka imamo $2 \cdot 2 = 2^2$ mogućnosti
- 3 znaka imamo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ mogućnosti
- 4 znaka imamo $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ mogućnosti
- 5 znakova imamo $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ mogućnosti, tj.radi se o varijacijama s ponavljanjem od dva elementa što znači da je ukupan broj složenih znakova jednak

$$N = \overline{V}\,^1_2 + \overline{V}\,^2_2 + \overline{V}\,^3_2 + \overline{V}\,^4_2 + \overline{V}\,^5_2 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62.$$

Vježba 070

Od osnovnih Morseovih znakova • i **—** mogu se nizanjem sastavljati složeni znakovi. Koliko postoji složenih znakova od najviše 4 osnovnih?

Rezultat: 30.

Zadatak 071 (4A, hotelijerska škola)

Koliki je broj troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 0?

Rješenje 071

Umnožak znamenaka troznamenkastog prirodnog broja bit će jednak nuli, ako je barem jedna znamenka u njegovom zapisu nula.

1.inačica

Troznamenkastih brojeva kojima je nula samo na drugom mjestu ima $9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$.
Troznamenkastih brojeva kojima je nula samo na trećem mjestu ima $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$.
Troznamenkastih brojeva kojima su nule na zadnja dva mjesta ima $9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$.

Ukupan je broj: $81 + 81 + 9 = 171$.

2.inačica

Troznamenkastih brojeva kojima je nula na drugom mjestu, ali može biti i na trećem, ima $9 \cdot 1 \cdot 10 = 90$.
Troznamenkastih brojeva kojima je nula na trećem mjestu, ali može biti i na drugom, ima $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$.
Troznamenkastih brojeva kojima su nule na zadnja dva mjesta, ima $9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$.
Budući da smo dva puta prebrojavali troznamenkaste brojeve kojima su nule na zadnja dva mjesta, ukupan broj je: $90 + 90 - 9 = 171$.

3.inačica

Ukupan broj troznamenkastih prirodnih brojeva je $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ jer nula ne može biti na prvom mjestu.
Ukupan broj troznamenkastih prirodnih brojeva koji u svom zapisu nemaju znamenku nula je $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.
Broj troznamenkastih prirodnih brojeva koji imaju barem jednu znamenku nula je: $900 - 72\,9 = 171$.

Vježba 071

Koliki je broj troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 4?

Rezultat: 6.

Zadatak 072 (Irma, gimnazija)

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva sa svim različitim znamenkama?

Rješenje 072

1.inačica

- na prvom mjestu može stajati jedna od devet raspoloživih znamenaka {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, nula ne može biti na prvom mjestu jer tada ne bi bio četveroznamenkasti broj .... to je 9 načina

www.halapa.com

- na drugom mjestu može biti jedna od preostalih devet znamenaka (sada može biti i nula, ali ne i znamenka koju smo napisali na prvom mjestu) .... to je 9 načina
- na treće mjesto možemo staviti jednu od preostalih osam znamenaka (dvije znamenke smo iskoristili za prva dva mjesta) .... to je 8 načina
- na četvrto mjesto možemo staviti jednu od preostalih sedam znamenaka (tri znamenke smo već iskoristili za prva tri mjesta) .... to je 7 načina

Ukupan broj je: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

2.inačica

Budući da iz skupa od 10 znamenaka {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} uzimamo po četiri znamenke da bismo složili četveroznamenkaste brojeve sa svim različitim znamenkama, riječ je o varijaciji četvrtog razreda od deset elemenata:

$$\left.\begin{array}{l} V_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-r+1) \\ n = 10 \ , \ r = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Na prvom mjestu ne može biti znamenka nula jer bi to bio troznamenkasti broj. Brojeva kojima je znamenka nula na prvom mjestu ukupno ima:

$$\left.\begin{array}{l} V_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-r+1) \\ n = 9 \ , \ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Broj traženih četveroznamenkastih brojeva je:

$$n = V_{10}^4 - V_9^3 = 5040 - 504 = 4536.$$

www.halapa.com

Vježba 072

Koliko ima troznamenkastih brojeva sa svim različitim znamenkama?

Rezultat: $n = V_{10}^3 - V_9^2 = 648.$

Zadatak 073 (Irma, gimnazija)

Koliko se različitih peteroznamenkastih brojeva može napisati pomoću znamenaka 0, 5, 5, 7, 7?

Rješenje 073

Budući da rabimo sve elemente 0, 5, 5, 7 i 7 među kojima ima r = 2 (znamenke 5 i 5) i s = 2 (znamenke 7 i 7) jednakih, radi se o permutacijama sa ponavljanjem. Ponovimo!

Broj permutacija skupa od n elemenata među kojima ima r jednakih i s jednakih je: $P_n^{r,\,s} = \dfrac{n!}{r! \cdot s!}$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \ , \ r = 2 \ , \ s = 2 \\ P_n^{r,\,s} = \dfrac{n!}{r! \cdot s!} \end{array}\right\} \Rightarrow P_5^{2,\,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30.$$

Ako je znamenka nula na prvom mjestu, riječ je o četveroznamenkastim brojevima pa ih moramo odbiti od ukupnog broja svih peteroznamenkastih brojeva. Sada rabimo elemente: 5, 5, 7 i 7 među kojima ima r = 2 i s = 2 jednakih. Radi se o permutaciji sa ponavljanjem skupa od 4 elementa među kojima ima r = 2 jednakih i s = 2 jednakih:

$$P_4^{2,\,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

Različitih peteroznamenkastih brojeva je:

$$n = P_5^{2,\,2} - P_4^{2,\,2} = 30 - 6 = 24.$$

Vježba 073

Koliko se različitih šesteroznamenkastih brojeva može napisati pomoću znamenaka 0, 1, 1, 2, 3, 3?

Rezultat: 150.

Zadatak 074 (Irma, gimnazija)

Test se sastoji od 5 pitanja na koje se odgovara zaokruživanjem odgovora A, B ili C. Na koliko načina možemo riješiti test ako odgovorimo na sva pitanja?

Rješenje 074

1.inačica

- na prvo pitanje možemo zaokružiti odgovor A ili B ili C ... to su 3 načina
- na drugo pitanje možemo zaokružiti odgovor A ili B ili C ... to su 3 načina
- na treće pitanje možemo zaokružiti odgovor A ili B ili C ... to su 3 načina
- na četvrto pitanje možemo zaokružiti odgovor A ili B ili C ... to su 3 načina
- na peto pitanje možemo zaokružiti odgovor A ili B ili C ... to su 3 načina

Ukupan je broj načina: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

2.inačica

U zadatku je riječ o varijaciji sa ponavljanjem elemenata jer za svaki zadatak rabimo tri odgovora, a zadano je pet zadataka:

$$\left.\begin{array}{l} n=3\ ,\ r=5 \\ \overline{V}_n^r = n^r \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{V}_3^5 = 3^5 = 243.$$

Vježba 074

Test se sastoji od 5 pitanja na koje se odgovara zaokruživanjem odgovora A ili B. Na koliko načina možemo riješiti test ako odgovorimo na sva pitanja?

Rezultat: 32.

Zadatak 075 (Irma, gimnazija)

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinice i desetice jednak 4?

Rješenje 075

- na prvo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, nula ne može biti na prvom mjestu jer tada ne bi bio peteroznamenkasti broj... ... to je 9 načina
- na drugo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}... ... to je 10 načina
- na treće mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}... ... to je 10 načina
- $\left.\begin{array}{c} \text{na četvrto mjesto} \\ \text{i} \\ \text{na peto mjesto} \end{array}\right\}$ moramo staviti brojeve iz skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kojima je zbroj jednak 4:

$$\left.\begin{array}{l} 0+4=4 \\ 4+0=4 \\ 1+3=4 \\ 3+1=4 \\ 2+2=4 \end{array}\right\} \text{... to je 5 načina.}$$

Ukupan broj iznosi: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

Vježba 075

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinice i desetice jednak 3?

Rezultat: 3600.

Zadatak 076 (4A, hotelijerska škola)

Vjerojatnost da će se zbiti dva događaja A i B, međusobno nezavisna, je p_1 odnosno p_2. Kolika je vjerojatnost:

- da će se zbiti oba događaja
- da se neće zbiti ni jedan od tih događaja

www.halapa.com

- da će se zbiti događaj A, a B ne
- da će se zbiti događaj B, a A ne
- da će se zbiti barem jedan od tih događaja
- da se barem jedan od njih neće zbiti?

Rješenje 076

Vjerojatnost iznosi:

- da će se zbiti oba događaja: $P = p_1 \cdot p_2$
- da se neće zbiti ni jedan od tih događaja: $P = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$
- da će se zbiti događaj A, a B ne: $P = p_1 \cdot (1 - p_2)$
- da će se zbiti događaj B, a A ne: $P = (1 - p_1) \cdot p_2$
- da će se zbiti barem jedan od tih događaja: $P = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$
- da se barem jedan od njih neće zbiti: $P = 1 - p_1 \cdot p_2$

Vježba 076

Vjerojatnost da će se zbiti dva događaja A i B, međusobno nezavisna, je $p_1 = 0.2$ odnosno $p_2 = 0.3$. Kolika je vjerojatnost:

- da će se zbiti oba događaja
- da se neće zbiti ni jedan od tih događaja
- da će se zbiti događaj A, a B ne
- da će se zbiti događaj B, a A ne
- da će se zbiti barem jedan od tih događaja
- da se barem jedan od njih neće zbiti?

Rezultat: Vjerojatnost iznosi:

- da će se zbiti oba događaja: $P = 0.06$
- da se neće zbiti ni jedan od tih događaja: $P = 0.56$
- da će se zbiti događaj A, a B ne: $P = 0.14$
- da će se zbiti događaj B, a A ne: $P = 0.24$
- da će se zbiti barem jedan od tih događaja: $P = 0.44$
- da se barem jedan od njih neće zbiti: $P = 0.94$

www.halapa.com

Zadatak 077 (Mira, gimnazija)

Na koliko se načina deset jednakih darova može podijeliti na četiri osobe? (Moguće je da neka osoba ne dobije niti jedan dar.)

Rješenje 077

Budući da su darovi jednaki, možemo ih označiti istim simbolom. Na primjer, tri moguće razdiobe možemo opisati na sljedeće načine:

1. 

Ovdje smo zajedno s darovima rasporedili i tri crtice. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva tri dara, druga dva, treća jedan, četvrta četiri dara.

2. 

Ovdje smo zajedno s darovima rasporedili i tri crtice. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva dva dara, druga četiri, treća nijedan, četvrta četiri dara.

3. 

Ovdje smo zajedno s darovima rasporedili i tri crtice. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva jedan dar, druga dva, treća šest, četvrta jedan dar.

Svih različitih rasporeda ima koliko i permutacija od 13 elemenata među kojima su dvije skupine od po deset i tri jednaka predmeta:

$$P_{13}^{10,3} = \frac{13\,!}{10\,!\cdot 3\,!} = \frac{10\,!\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{10\,!\cdot 6} = 286.$$

Općenito:

- ako dijelimo n jednakih darova na k osoba (moguće je da neka osoba ne dobije niti jedan dar) radimo ovako: različitih rasporeda ima onoliko koliko i permutacija od n + k – 1 elemenata, među kojima ima n darova i k – 1 crtica:

$$P_{n+k-1}^{n,k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!}.$$

- ako dijelimo n jednakih darova na k osoba (moguće je da neka osoba ne dobije niti jedan dar) možemo raditi i ovako: zapitamo se na koliko različitih načina možemo postaviti k – 1 crticu na raspoloživih n + k – 1 mjesta:

$$C_{n+k-1}^{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Vježba 077

Na koliko se načina deset jednakih darova može podijeliti na tri osobe? (Moguće je da neka osoba ne dobije niti jedan dar.)

Rezultat: 66.

Zadatak 078 (4A, hotelijerska škola)

Na koliko se načina deset jednakih darova može podijeliti na četiri osobe tako da svaka osoba dobije barem jedan dar?

Rješenje 078

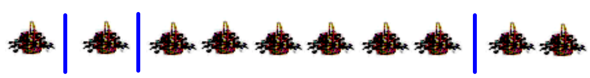
Budući da su darovi jednaki, možemo ih označiti istim simbolom. Na primjer, tri moguće razdiobe možemo opisati na sljedeće načine:

1. 

Ovdje smo zajedno s darovima rasporedili i tri crtice, ali tako da dvije crtice ne smiju doći zajedno. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva dva dara, druga tri, treća četiri, četvrta jedan dar.

2. 

Ovdje smo zajedno s darovima rasporedili i tri crtice, ali tako da dvije crtice ne smiju doći zajedno. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva jedan dar, druga četiri, treća dva, četvrta tri dara.

3. 

Ovdje smo zajedno s darovima rasporedili i tri crtice, ali tako da dvije crtice ne smiju doći zajedno. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva jedan dar, druga jedan, treća šest, četvrta dva dara.

Crtice se moraju ubaciti na tri od devet mogućih mjesta između darova. Broj mogućih načina je:

$$C_{10-1}^{4-1} = C_9^3 = \binom{9}{3} = 84.$$

Općenito:

- ako dijelimo n jednakih darova na k osoba, ali tako da svaka osoba mora dobiti barem jedan dar postupamo ovako: k – 1 crticu postavimo na neka od n – 1 mjesta između darova:

$$C_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Vježba 078

Na koliko se načina deset jednakih darova može podijeliti na tri osobe tako da svaka osoba dobije barem jedan dar?

Rezultat: 36.

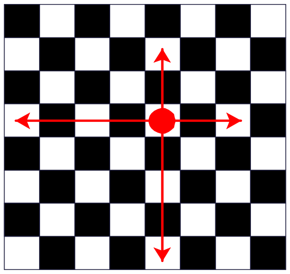
Zadatak 079 (4A, hotelijerska škola)

Koliko postoji načina da se izabere bijeli i crni kvadrat s 8 x 8 šahovske ploče tako da ti kvadrati ne leže u istom redu i stupcu?

www.halapa.com

Rješenje 079

Na 8 x 8 šahovskoj ploči su 32 bijela i 32 crna kvadrata.
Koliko postoji načina da se izabere bijeli i crni kvadrat?



Bijeli kvadrat može se izabrati na 32 načina. Crni kvadrat može se izabrati na 32 načina. Bijeli i crni kvadrat mogu se izabrati na ukupno $32 \cdot 32 = 1024$ načina.

Kada računamo broj načina da se izabere bijeli i crni kvadrat tako da ti kvadrati ne leže u istom redu i stupcu radimo ovako:

Bijeli kvadrat može se izabrati na 32 načina. U retku i stupcu u kojem se nalazi izabrani bijeli kvadrat ima 8 crnih kvadrata. Njih moramo izuzeti. Znači da su ostala 24 ($32 - 8 = 24$) crna kvadrata koje možemo kombinirati s bijelim kvadratom. Zato se bijeli i crni kvadrat mogu izabrati ukupno na $32 \cdot 24 = 768$ načina.

Vježba 079

Koliko postoji načina da se izabere bijeli i crni kvadrat s 8 x 8 šahovske ploče tako da ti kvadrati ne leže u istom redu ili stupcu?

Rezultat: $32 \cdot 28 = 896$.

Zadatak 080 (4A, hotelijerska škola)

1. Četiri matematičke knjige, tri knjige iz fizike, tri iz kemije i dvije iz biologije treba složiti na jednu policu. Koliko je različitih mogućnosti slaganja?

2. Četiri matematičke knjige, tri knjige iz fizike, tri iz kemije i dvije iz biologije treba složiti na jednu policu tako da su knjige iz iste struke zajedno. Koliko je različitih mogućnosti slaganja?

Rješenje 080

1. Ukupan broj knjiga iznosi: $n = 4 + 3 + 3 + 2 = 12$ pa je broj različitih mogućnosti slaganja jednak:

$$P_{12} = 12! = 479001600.$$

2. Budući da postoje četiri vrste knjiga mogu se po vrstama rasporediti na 4! načina: $P_4 = 4!$.
Četiri knjige iz matematike mogu se međusobno rasporediti na 4! načina: $P_4 = 4!$
Tri knjige iz fizike mogu se međusobno rasporediti na 3! načina: $P_3 = 3!$
Tri knjige iz kemije mogu se međusobno rasporediti na 3! načina: $P_3 = 3!$
Dvije knjige iz biologije mogu se međusobno rasporediti na 2! načina: $P_2 = 2!$.

Ukupan broj različitih mogućnosti slaganja knjiga jednak je:

$$P = P_4 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_3 \cdot P_2 = 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! = 41472.$$

Vježba 080

Tri matematičke knjige, tri knjige iz fizike, tri iz kemije i dvije iz biologije treba složiti na jednu policu tako da su knjige iz iste struke zajedno. Koliko je različitih mogućnosti slaganja?

Rezultat: $4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! = 10368$.

www.halapa.com