Zadatak 081 (Davor, gimnazija)

Košarkaška momčad ima 12 članova. Na koliko načina možemo izabrati petorku koja će igrati, ali tako da dva najviša igrača budu uvijek u petorci?

Rješenje 081

Budući da dva najviša igrača moraju uvijek biti u petorci, preostaje da se između 10 igrača izaberu još trojica:

$$C_{10}^{3}=\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

Vježba 081

Košarkaška momčad ima 12 članova. Na koliko načina možemo izabrati petorku koja će igrati, ali tako da tri najviša igrača budu uvijek u petorci?

Rezultat: $C_{9}^{2}=\binom{9}{2}=36.$

Zadatak 082 (Davor, gimnazija)

Koliko ima četveroznamenkastih parnih brojeva koji ne sadrže znamenku 8?

Rješenje 082

Uporabom teorema o uzastopnom prebrojavanju dobije se:

1. mjesto $-\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ − 8 načina

2. mjesto $-\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ − 9 načina

3. mjesto $-\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ − 9 načina

4. mjesto $-\ \{0, 2, 4, 6\}$ − 4 načina

Ukupno je: $N = 8\cdot 9\cdot 9\cdot 4 = 2592$.

Vježba 082

Koliko ima četveroznamenkastih parnih brojeva koji ne sadrže znamenku 6?

Rezultat: 2592.

Zadatak 081 (Davor, gimnazija)

U kutiji se nalazi 40 žarulja od 100 W među kojima su 3 neispravne. Kupimo li dvije žarulje, kolika je vjerojatnost da su obje neispravne?

Rješenje 081

Odredimo broj svih mogućih događaja. Dvije žarulje iz skupa od 40 žarulja možemo odabrati na $n=\binom{40}{2}$ načina.

Budući da su 3 žarulje neispravne, a mi kupujemo 2 žarulje, tada se dvije neispravne mogu izabrati na (broj povoljnih ishoda) $m=\binom{3}{2}$ načina.

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Zato je

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}}{\frac{40\cdot 39}{1\cdot 2}}=\frac{3\cdot 2}{40\cdot 39}=\frac{1}{260}.$$

Vježba 081

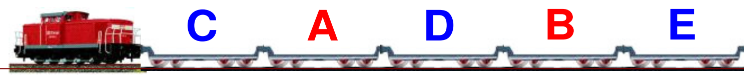
U kutiji se nalazi 30 žarulja od 100 W među kojima su 3 neispravne. Kupimo li dvije žarulje, kolika je vjerojatnost da su obje neispravne?

Rezultat: $$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{30}{2}}=\frac{\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}}{\frac{30\cdot 29}{1\cdot 2}}=\frac{3\cdot 2}{30\cdot 29}=\frac{1}{145}.$$

Zadatak 082 (Ines, gimnazija)

Vlak se sastoji od pet vagona: A, B, C, D i E. Na koliko se načina može postaviti vlak tako da je vagon A uvijek bliži lokomotivi od vagona B?

Rješenje 082



Vagon A je na 1. mjestu, a vagon B na 2. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.
Vagon A je na 1. mjestu, a vagon B na 3. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.
Vagon A je na 1. mjestu, a vagon B na 4. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.
Vagon A je na 1. mjestu, a vagon B na 5. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.

Vagon A je na 2. mjestu, a vagon B na 3. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.
Vagon A je na 2. mjestu, a vagon B na 4. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.
Vagon A je na 2. mjestu, a vagon B na 5. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.

Vagon A je na 3. mjestu, a vagon B na 4. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.
Vagon A je na 3. mjestu, a vagon B na 5. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.

Vagon A je na 4. mjestu, a vagon B na 5. mjestu. Ostala tri vagona mogu se rasporediti na 3! = 6 načina.

Može se rasporediti na 10 · 6 = 60 načina.

Tablični prikaz:

Raspored vagona A i B	Raspored ostala tri vagona
A B ▶ ▶ ▶	3! = 6 načina.
A ▶ B ▶ ▶	3! = 6 načina.
A ▶ ▶ B ▶	3! = 6 načina.
A ▶ ▶ ▶ B	3! = 6 načina.
▶ A B ▶ ▶	3! = 6 načina.
▶ A ▶ B ▶	3! = 6 načina.
▶ A ▶ ▶ B	3! = 6 načina.
▶ ▶ A B ▶	3! = 6 načina.
▶ ▶ A ▶ B	3! = 6 načina.
▶ ▶ ▶ A B	3! = 6 načina.
Ukupno	60 načina.

Vježba 082

Vlak se sastoji od četiri vagona: A, B, C i D. Na koliko se načina može postaviti vlak tako da je vagon A uvijek bliži lokomotivi od vagona B?

Rezultat: 12 načina.

Zadatak 083 (Anamarija, hotelijerska škola)

Na kotaču za rulet postoji 37 brojeva: 0 i prirodni brojevi od 1 do 36. Koja je vjerojatnost da kuglica stane na prostom broju?

Rješenje 083

Prost broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv s jedan i samim sobom.
U igri ruleta broj svih mogućih događaja je n = 37.
Broj povoljnih događaja je m = 11:
A = {na kotaču za rulet kuglica je stala na prostom broju} = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}.

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

Zato je

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{11}{37}.$$

Vježba 083

Na kotaču za rulet postoji 37 brojeva: 0 i prirodni brojevi od 1 do 36. Koja je vjerojatnost da kuglica stane na broj koji nije prost?

Rezultat: $P(A)=\frac{26}{37}.$

Zadatak 084 (4A, hotelijerska škola)

Bacamo jednu kocku. Kolika je vjerojatnost da se pojavio broj 5 ako je poznato da je pao neparan broj?

Rješenje 084

Ponovimo uvjetnu vjerojatnost.

Uvjetna vjerojatnost događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je P(B) > 0, je broj P(A | B) [čitamo: vjerojatnost od A uz uvjet B] definiran s:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Budući da bacamo jednu kocku prostor elementarnih događaja je skup: $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Postoji 6 elementarnih događaja. Događaji i njihove vjerojatnosti prikazani su tablično:

Događaj	Vjerojatnost događaja
A = {pao je broj 5} = {5}	$P(A)=\frac{1}{6}$
B = {pao je neparan broj} = {1, 3, 5}	$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$A\cap B=\{\text{pao je neparan broj 5}\}=\{5\}$	$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

Konačno je:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Vježba 084

Bacamo jednu kocku. Kolika je vjerojatnost da se pojavio broj 4 ako je poznato da je pao paran broj?

Rezultat: $\frac{1}{3}.$

Zadatak 085 (4A, hotelijerska škola)

Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da je na prvoj kocki pao broj 5 ako je poznato da je zbroj znamenaka na obje kocke 6?

Rješenje 085

Ponovimo uvjetnu vjerojatnost.

Uvjetna vjerojatnost događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je P(B) > 0, je broj P(A | B) [čitamo: vjerojatnost od A uz uvjet B] definiran s:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Budući da bacamo dvije kocke prostor elementarnih događaja je skup:

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),...,(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Postoji 36 elementarnih događaja. Događaji i njihove vjerojatnosti prikazani su tablično:

Događaj	Vjerojatnost događaja
A = {na prvoj kocki pao je broj 5} $A=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$	$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
B = {zbroj brojeva na obje kocke je 6} $B=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$	$P(B)=\frac{5}{36}$
$A\cap B=\{\text{prvi broj je 5 i zbroj na obje kocke je 6}\}$ $A\cap B=\{(5,1)\}$	$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

Konačno je:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}.$$

Vježba 085

Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da je na prvoj kocki pao broj 3 ako je poznato da je zbroj znamenaka na obje kocke 6?

Rezultat: $\frac{1}{5}.$

Zadatak 086 (Anamarija, hotelijerska škola)

Nađi vjerojatnost da troznamenkasti broj čije su znamenke iz skupa {1, 6, 9, 9} bude djeljiv s tri.

Rješenje 086

Najprije odredimo koliko troznamenkastih brojeva možemo napraviti od znamenaka iz skupa {1, 6, 9, 9}. Prostor elementarnih događaja je skup:

$$\Omega=\{169, 196, 199, 619, 691, 699, 916, 961, 919, 991, 969, 996\}.$$

Dakle, broj svih mogućih događaja je:

$$n=k(\Omega)=12.$$

Mogli smo do svih mogućih događaja doći i na ovaj način:

$$n=P_4^2=\frac{4!}{2!}=12.$$

Sada tražimo brojeve koji su djeljivi s tri. Broj je djeljiv s tri ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s tri. Jedini brojevi djeljivi s tri sastavljeni su od znamenaka 6, 9, 9.

$$A=\{\text{troznamenkasti brojevi djeljivi s tri}\}=\{699, 969, 996\}.$$

Broj povoljnih događaja je:

$$m=k(A)=3.$$

Vjerojatnost iznosi:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=25\%.$$

Vježba 086

Nađi vjerojatnost da troznamenkasti broj čije su znamenke iz skupa {5, 6, 9, 9} bude djeljiv s pet.

Rezultat: $\frac{1}{4}.$

Zadatak 087 (Anamarija, hotelijerska škola)

Nađi vjerojatnost da u dva bacanja kocke padnu isti brojevi ili brojevi čiji je zbroj 5 ili umnožak 6.

Rješenje 087

Kada kocku bacamo dva puta broj svih mogućih događaja je: $n=6^2=36.$

Povoljni događaji su:

- $A = \{\text{pali su isti brojevi}\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_A = 6 \text{ mogućnosti} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- $B = \{\text{zbroj je } 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_B = 4 \text{ mogućnosti} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{m_B}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

- $C = \{\text{umnožak je } 6\} = \{(1,6),(6,1)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_C = 2 \text{ mogućnosti} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \frac{m_C}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad \left(\begin{array}{l}\text{uočite da su parovi brojeva } (2,3) \text{ i} \\ (3,2) \text{ već iskorišteni u događaju B}\end{array}\right).$$

Vjerojatnost iznosi:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3+2+1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Vježba 087

Nađi vjerojatnost da u dva bacanja kocke padnu isti brojevi ili brojevi čiji je zbroj 5 ili umnožak 8.

Rezultat: $\frac{1}{3}$.

Zadatak 088 (Linux, gimnazija)

Koliko četveroznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka broja 112233?

Rješenje 088

U našem broju mogu se ponavljati dvije znamenke ili samo jedna.

Ako se ponavljaju dvije znamenke, onda te dvije možemo izabrati na tri načina (11, 22 ili 33). Unutar broja imamo poretke:

xxyy, xyxy, xyyx

pa je takvih brojeva 18 jer možemo zamijeniti x i y:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Ako se ponavlja jedna znamenka, nju biramo na tri načina (1, 2 ili 3). Moguće konfiguracije broja su:

xyzz, xzzy, zzxy, xzyz, zxzy, zxyz

pa je takvih brojeva 36 jer možemo zamijeniti x i y:

$$3 \cdot 6 \cdot 2 = 36.$$

Ukupno ima:

$$18 + 36 = 54.$$

Vježba 088

Koliko troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka broja 1122?

Rezultat: 6.

Zadatak 089 (Ivana, hotelijerska škola)

Kolika je vjerojatnost da ćemo iz skupine od 3 muškarca i 4 žene izabrati tročlanu skupinu u kojoj su 1 muškarac i 2 žene?

Rješenje 089

- Odredimo broj svih mogućih ishoda. Tri osobe iz skupa od 7 ljudi možemo odabrati na $n = \binom{7}{3}$ načina.

- Odredimo broj povoljnih ishoda. Jednog muškarca možemo odabrati na $\binom{3}{1}$ načina, a dvije žene na $\binom{4}{2}$ načina pa je broj povoljnih ishoda: $m = \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}$.

Vjerojatnost iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}} = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{3}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1}}{\frac{7 \cdot 5}{1 \cdot 3}} = \frac{18}{35}.$$

Vježba 089

Kolika je vjerojatnost da ćemo iz skupine od 3 muškarca i 4 žene izabrati tročlanu skupinu u kojoj su 2 muškarca i 1 žena?

Rezultat: $\frac{12}{35}$.

Zadatak 090 (Ivana, hotelijerska škola)

Na koliko se načina može dvanaest različitih predmeta razdijeliti na tri osobe, svakoj po četiri predmeta?

Rješenje 090

1.inačica

Četiri predmeta koja će pripasti prvoj osobi biramo na $\binom{12}{4}$ načina. Nakon toga četiri predmeta za drugu osobu možemo odabrati na $\binom{12-4}{4} = \binom{8}{4}$ načina itd. Ukupan broj različitih podjela je:

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 495 \cdot 70 \cdot 1 = 34650.$$

2.inačica

Primijetimo da je jedna podjela određena permutacijom niza

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3.

Tako na primjer nizu

2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 3, 2, 2, 1

odgovara podjela u kojoj prva osoba dobiva treći, četvrti, osmi i dvanaesti, druga osoba prvi, peti, deseti i jedanaesti a treća osoba drugi, šesti, sedmi i deveti predmet. Ovakvih permutacija ima:

$$P_{12}^{4,4,4} = \frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!} = 34650.$$

Generalizacija

Promatramo općeniti problem: n različitih predmeta trebamo podijeliti na k osoba, ali tako da prva dobije n_1 predmeta, druga n_2 predmeta, treća n_3 predmeta, …, posljednja n_k predmeta,

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k.$$

Broj različitih načina na koji se to može učiniti je:

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n_{k-1} + n_k}{n_{k-1}} \cdot \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Vježba 090

Na koliko se načina može osam različitih predmeta razdijeliti na četiri osobe, svakoj po dva predmeta?

Rezultat: 2520.

Zadatak 091 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko ima različitih prirodnih brojeva čije su znamenke tri jedinice, tri dvojke i tri trojke?

Rješenje 091

To su permutacije s ponavljanjem.

$$S = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{matrix} n = 9 \\ r = 3 \\ s = 3 \\ t = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_n^{r,\,s,\,t} = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t!} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680.$$

Vježba 091

Koliko ima različitih prirodnih brojeva čije su znamenke tri jedinice, tri dvojke i dvije trojke?

Rezultat: 560.

Zadatak 092 (Ivana, ekonomska škola)

Kolika je vjerojatnost da u 5 uzastopnih bacanja kocke padne 5 različitih brojeva?

Rješenje 092

Rezultat pokusa je niz od 5 brojeva uzetih is skupa S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Kako se na svakoj kocki može pojaviti bilo koji od tih brojeva, broj svih mogućih ishoda je:

$$n = 6^5 \ (\text{varijacije s ponavljanjem}).$$

Odredimo broj povoljnih ishoda.

Prvu znamenku možemo birati na 6 načina.
Drugu znamenku možemo birati na 5 načina jer smo jednu znamenku već uporabili.
Treću znamenku možemo birati na 4 načina jer smo dvije znamenke već uporabili.
Četvrtu znamenku možemo birati na 3 načina jer smo tri znamenke već uporabili.
Petu znamenku možemo birati na 2 načina jer smo četiri znamenke već uporabili.

Dakle, pet različitih brojeva past će na

$$m = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ načina } (\text{varijacije bez ponavljanja}).$$

Vjerojatnost događaja iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = \frac{5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}.$$

Vježba 092

Kolika je vjerojatnost da u 4 uzastopna bacanja kocke padnu 4 različita broja?

Rezultat: $\frac{5}{18}.$

Zadatak 093 (Anamarija, gimnazija)

Hrvatska abeceda ima 30 slova. Koliko se riječi duljine 5 slova može složiti od tih 30 slova (npr. ccccc, marbb, mačka, limes itd.)?

Rješenje 093

Ponovimo!

Princip produkta (teorem o uzastopnom prebrojavanju):

Neka je $n \in N$, a $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ konačni skupovi. Tada je i Kartezijev produkt $S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n$ konačan skup i vrijedi: $\left| S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n \right| = \left| S_1 \right| \cdot \left| S_2 \right| \cdot \left| S_3 \right| \cdot \ \ldots \ \cdot \left| S_n \right|.$

Na svako od 5 mjesta — — — — — slobodno možemo staviti bilo koje od 30 slova abecede (a, b, c, … , ž). Prema principu produkta, svih takvih riječi ima:

$$30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^5 = 24300000.$$

Vježba 093

Hrvatska abeceda ima 30 slova. Koliko se riječi duljine 4 slova može složiti od tih 30 slova (npr. bbbb, mabt, lane, more itd.)?

Rezultat: 810 000.

Zadatak 094 (Riba, TUPŠ)

Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu: $\overline{V_n^3} = 512.$

Rješenje 094

Budući da se varijacije s ponavljanjem r – tog razreda od n elemenata računaju po formuli $\overline{V_n^3} = n^r$, slijedi:

$$\overline{V_n^3} = 512 \Rightarrow n^3 = 512 \,/\sqrt[3]{\ } \Rightarrow n = \sqrt[3]{512} \Rightarrow n = \sqrt[3]{8^3} \Rightarrow n = 8.$$

Vježba 094

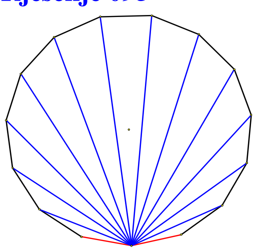
Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu: $\overline{V_n^3} = 8.$

Rezultat: n = 2.

Zadatak 095 (Riba, TUPŠ)

Koliko dijagonala ima petnaesterokut?

Rješenje 095



Dijagonala je spojnica dva nesusjedna vrha mnogokuta. Kod petnaesterokuta prvi vrh možemo odabrati na 15 načina. Za drugi vrh nakon toga na raspolaganju imamo 15 – 3 = 12 nesusjednih vrhova. Ukupan broj (uređenih) parova vrhova je 15 · 12 = 180. Međutim, broj dijagonala je dva puta manji jer svaka dijagonala povezuje dva vrha: dva uređena para (A, B) i (B, A) vrhova određuju istu dijagonalu. Dakle, broj dijagonala je:

$$D = \frac{15 \cdot 12}{2} = 90.$$

Vježba 095

Koliko dijagonala ima deseterokut?

Rezultat: 35.

Zadatak 096 (Riba, TUPŠ)

Na 3 prazne police treba posložiti 15 različitih knjiga. Na koliko je to načina moguće učiniti ako želimo da se na svakoj polici nalazi po 5 knjiga?

Rješenje 096

Pet knjiga koje ćemo posložiti na prvu policu biramo na $\binom{15}{5}$ načina. Sljedećih pet knjiga za drugu policu možemo izabrati na $\binom{10}{5}$ načina. Nakon toga, pet knjiga za treću policu možemo odabrati na $\binom{5}{5}$ načina. Ukupan broj različitih podjela je:

$$\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot 1 = \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 756756.$$

Vježba 096

Na 4 prazne police treba posložiti 8 različitih knjiga. Na koliko je to načina moguće učiniti ako želimo da se na svakoj polici nalaze po 2 knjige?

Rezultat: $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520.$

Zadatak 097 (Riba, TUPŠ)

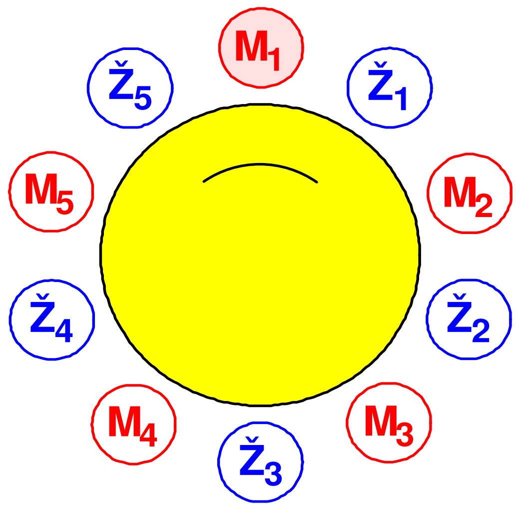
Na koliko načina možemo za okrugli stol smjestiti 5 muškaraca i 5 žena tako da osobe istog spola ne sjede jedna do druge?

Rješenje 097

Jedan se muškarac može postaviti na bilo koje mjesto za stolom. Preostala četiri muškarca treba rasporediti na četiri mjesta (permutacije bez ponavljanja): 4!.
Pet žena može se rasporediti na pet mjesta između muškaraca (permutacije bez ponavljanja): 5!.

Ukupan broj razmještaja je:

$$4!\cdot 5! = 24\cdot 120 = 2880.$$



Vježba 097

Na koliko načina možemo za okrugli stol smjestiti 6 muškaraca i 6 žena tako da osobe istog spola ne sjede jedna do druge?

Rezultat: $5!\cdot 6! = 120\cdot 720 = 86400.$

Zadatak 098 (Riba, TUPŠ)

U igri bez neriješena ishoda prvi igrač dobiva u prosjeku tri od pet partija. Kolika je vjerojatnost da će u narednih pet partija on dobiti barem tri?

Rješenje 098

Ponovimo!

Ako je p vjerojatnost da se događaj A pojavi u svakom pokusu, onda je vjerojatnost da će se on ostvariti k puta pri ponavljanju n nezavisnih pokusa jednaka

$$p_k = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot (1-p)^{n-k}.$$

Budući da igrač u prosjeku dobiva tri od pet partija, njegova vjerojatnost dobitka u svakoj partiji iznosi:

$$p = \frac{3}{5}.$$

Vjerojatnost da će u pet partija dobiti barem tri iznosi:

$$P(\text{dobiva barem tri}) = P(\text{dobiva tri ili četiri ili pet partija}) = p(\textit{dobiva tri partije}) + p(\textit{dobiva četiri partije}) + p(\textit{dobiva pet partija}).$$

$$P = p_3 + p_4 + p_5 \Rightarrow P = \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^2 + \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^1 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3^3}{5^3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{3^4}{5^4}\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{3^5}{5^5}\cdot 1 \Rightarrow P = 10\cdot\frac{3^3}{5^3}\cdot\frac{2^2}{5^2} + 5\cdot\frac{3^4}{5^4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3^5}{5^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{8\cdot 27}{625} + \frac{162}{625} + \frac{243}{3125} \Rightarrow P = \frac{40\cdot 27 + 162\cdot 5 + 243}{3125} \Rightarrow P = 0.68256 \approx 0.68.$$

Vježba 098

Bacamo četiri kocke. Kolika je vjerojatnost da će se paran broj pojaviti barem tri puta?

Rezultat: $P = p_3 + p_4 \Rightarrow P = \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow P = 0.313.$

Zadatak 099 (Malecka, TUPŠ)

U skupini od 10 strijelaca nalaze se 4 izvrsna i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za izvrsne strijelce je 0.9, za dobre 0.7. Iz skupine na sreću biramo jednog strijelca. Kolika je vjerojatnost da će on pogoditi metu?

Rješenje 099

Ponovimo!

Neka je $\left\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\right\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)+P(H_3)\cdot P(A\mid H_3)+\ ...\ +P(H_n)\cdot P(A\mid H_n).$$

Označimo slovom A događaj čiju vjerojatnost tražimo: na sreću odabrani strijelac pogađa metu. Postavimo sljedeće hipoteze:

$$H_1=\{\text{prvi strijelac je izvrstan}\} \Rightarrow P(H_1)=\frac{4}{10}.$$

$$H_2=\{\text{prvi strijelac je dobar}\} \Rightarrow P(H_2)=\frac{6}{10}.$$

Ako se ostvari prva hipoteza, vjerojatnost pogotka za izvrsnog strijelca je

$$P(A\mid H_1)=0.9.$$

Ako se ostvari druga hipoteza, vjerojatnost pogotka za dobrog strijelca je

$$P(A\mid H_2)=0.7.$$

Po formuli potpune vjerojatnosti vrijedi:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2) \Rightarrow P(A)=\frac{4}{10}\cdot 0.9+\frac{6}{10}\cdot 0.7 \Rightarrow P(A)=0.79.$$

P(A) = ?

Vježba 099

U skupini od 10 strijelaca nalaze se 4 izvrsna i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za izvrsne strijelce je 0.8, za dobre 0.6. Iz skupine na sreću biramo jednog strijelca. Kolika je vjerojatnost da će on pogoditi metu?

Rezultat: 0.68.

Zadatak 100 (Malecka, TUPŠ)

U prvoj se žari nalaze 4 žute i 2 plave kuglice, u drugoj 3 žute i 2 plave. Iz prve žare prebacimo u drugu jednu na sreću odabranu kuglicu. Izračunaj vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge žare bude žuta.

Rješenje 100

Ponovimo!

Neka je $\left\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\right\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)+P(H_3)\cdot P(A\mid H_3)+\ ...\ +P(H_n)\cdot P(A\mid H_n).$$

Označimo slovom A događaj čiju vjerojatnost tražimo: kuglica izvučena iz druge žare je žuta. Vjerojatnost izbora žute kuglice ovisi o tome koje je boje kuglica koja je prebačena iz prve žare u drugu. Postavimo sljedeće hipoteze:

$$H_1=\{\text{prva kuglica je žuta}\} \Rightarrow P(H_1)=\frac{4}{6}.$$

$$H_2=\{\text{prva kuglica je plava}\} \Rightarrow P(H_2)=\frac{2}{6}.$$

Ako se ostvari prva hipoteza, tad se u drugoj žari nalaze 4 žute i 2 plave kuglice. Zato je

$$P(A\mid H_1)=\frac{4}{6}.$$

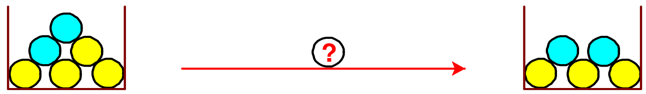
Ako se ostvari druga hipoteza, tad se u drugoj žari nalaze 3 žute i 3 plave kuglice. Zato je

$$P(A \mid H_2) = \frac{3}{6}.$$

Po formuli potpune vjerojatnosti vrijedi:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) \Rightarrow P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{16}{36} + \frac{6}{36} \Rightarrow P(A) = \frac{22}{36} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{18}.$$



Vježba 100

U prvoj se žari nalaze 3 žute i 2 plave kuglice, u drugoj 4 žute i 2 plave. Iz prve žare prebacimo u drugu jednu na sreću odabranu kuglicu. Izračunaj vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge žare bude plava.

Rezultat: $P(A) = \frac{12}{35}.$