Zadatak 121 (Sany, gimnazija)

Među 50 videorekordera 8 je u kvaru. Slučajno biramo 5 komada. Kolika je vjerojatnost da među njima ni jedan nije u kvaru?

Rješenje 121

Ponovimo!

Ako element s_1 možemo izabrati is skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Budući da od 50 videorekordera biramo 5 komada, broj svih mogućih događaja (ishoda, rezultata) iznosi:

$$n = C_{50}^{5} = \binom{50}{5}.$$

(kombinacije bez ponavljanja 5 – tog razreda od 50 elemenata)

Ispravnih videorekordera je

$$50 - 8 = 42.$$

Broj svih povoljnih događaja (ni jedan videorekorder nije u kvaru) je:

$$m = C_{42}^{5} = \binom{42}{5}.$$

(kombinacije bez ponavljanja 5 – tog razreda od 42 elementa)

Vjerojatnost događaja ima vrijednost:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{42}{5}}{\binom{50}{5}} = \frac{\frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{5\,!}}{\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5\,!}} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} = 0.4015.$$

Vježba 121

Među 50 videorekordera 8 je u kvaru. Slučajno biramo 4 komada. Kolika je vjerojatnost da među njima ni jedan nije u kvaru?

Rezultat: 0.4860.

Zadatak 122 (Sany, gimnazija)

Među 50 videorekordera 8 je u kvaru. Slučajno biramo 5 komada. Kolika je vjerojatnost da su točno 3 u kvaru?

Rješenje 122

Ponovimo!

Ako element s_1 možemo izabrati is skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Budući da od 50 videorekordera biramo 5 komada, broj svih mogućih događaja (ishoda, rezultata) iznosi:

$$n = C_{50}^{5} = \binom{50}{5}.$$

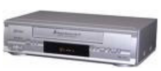
(kombinacije bez ponavljanja 5 – tog razreda od 50 elemenata)
Ispravnih videorekordera je

$$50 - 8 = 42.$$

Između 8 neispravnih videorekordera treba izabrati 3 komada. To je moguće na $\binom{8}{3}$ načina. Između 42 ispravna videorekordera biramo još dva komada. To je moguće na $\binom{42}{2}$ načina. Broj svih povoljnih događaja (točno tri videorekordera su u kvaru) je:

$$m = \binom{8}{3} \cdot \binom{42}{2}.$$

Vjerojatnost događaja iznosi:



$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{42}{2}}{\binom{50}{5}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3\,!} \cdot \frac{42 \cdot 41}{2\,!}}{\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5\,!}} = 0.0228.$$

Vježba 122

Među 50 videorekordera 8 je u kvaru. Slučajno biramo 5 komada. Kolika je vjerojatnost da su točno 2 u kvaru?

Rezultat: $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{42}{3}}{\binom{50}{5}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2\,!} \cdot \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{3\,!}}{\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5\,!}} = 0.1517.$$

Zadatak 123 (Marc, tehnička škola)

U kutiji je a bijelih i b crnih kuglica. Slučajno se izvlače dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da su iste boje?

Rješenje 123

Ponovimo!

Ako element s_1 možemo izabrati is skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \frac{n\,!}{k\,! \cdot (n-k)\,!} = \binom{n}{k}.$$

Ako su A i B disjunktni događaji (kažemo još da se A i B međusobno isključuju), onda je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \;(\text{aditivnost})$$

U kutiji je a bijelih i b crnih kuglica. Ukupno je a + b kuglica. Slučajno se izvlače 2 kuglice. Broj svih mogućih događaja (ishoda, rezultata) je

$$n = \binom{a+b}{2}.$$

(kombinacije bez ponavljanja)

Između a bijelih kuglica dvije se mogu izabrati na $\binom{a}{2}$ načina. Broj svih povoljnih događaja (izvučene su 2 bijele kuglice) iznosi:

$$m = \binom{a}{2}.$$

Vjerojatnost da se izvuku dvije bijele kuglice iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{a}{2}}{\binom{a+b}{2}}.$$

Između b crnih kuglica dvije se mogu izabrati na $\binom{b}{2}$ načina. Broj svih povoljnih događaja (izvučene su 2 crne kuglice) iznosi:

$$m = \binom{b}{2}.$$

Vjerojatnost da se izvuku dvije crne kuglice iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}}.$$

Vjerojatnost da se iz kutije izvuku dvije kuglice iste boje (ili obje bijele ili crne) je:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{\binom{a}{2}}{\binom{a+b}{2}} + \frac{\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{\binom{a}{2} + \binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{\frac{a \cdot (a-1)}{2\,!} + \frac{b \cdot (b-1)}{2\,!}}{\frac{(a+b) \cdot (a+b-1)}{2\,!}} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{\frac{a \cdot (a-1) + b \cdot (b-1)}{2\,!}}{\frac{(a+b) \cdot (a+b-1)}{2\,!}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{a \cdot (a-1) + b \cdot (b-1)}{(a+b) \cdot (a+b-1)} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{a^2 + b^2 - a - b}{(a+b) \cdot (a+b-1)}.$$

Vježba 123

U kutiji su 3 bijele i 2 crne kuglice. Slučajno se izvlače dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da su iste boje?

Rezultat: $\frac{2}{5}$.

Zadatak 124 (Marc, tehnička škola)

U kutiji je 10 kuglica. Slučajno se izvlače 2 kuglice odjednom. Vjerojatnost da su obje izvučene kuglice bijele boje iznosi $\frac{2}{15}$. Koliko je bijelih kuglica u kutiji?

Rješenje 124

Ponovimo!

Ako element s_1 možemo izabrati is skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

U kutiji je 10 kuglica. Slučajno se izvlače 2 kuglice. Broj svih mogućih događaja (ishoda, rezultata) je

$$n = \binom{10}{2}.$$

(kombinacije bez ponavljanja)

Pretpostavimo da je u kutiji x bijelih kuglica. Između njih x dvije se mogu izabrati na $\binom{x}{2}$ načina. Broj svih povoljnih događaja (izvučene su 2 bijele kuglice) iznosi:

$$m = \binom{x}{2}.$$

Vjerojatnost da se izvuku dvije bijele kuglice je:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{10}{2}}.$$

Sada računamo x broj bijelih kuglica:

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{2}{15} \ , \ P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{10}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\binom{x}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{\frac{x \cdot (x-1)}{2!}}{\frac{10 \cdot 9}{2!}} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{x^2 - x}{90} = \frac{2}{15} \ / \cdot 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -12 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1+7}{2} \\ x_2 = \frac{1-7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{2} \\ x_2 = -\frac{6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \text{ nema smisla} \end{array}\right\}.$$

Vježba 124

U kutiji je 10 kuglica. Slučajno se izvlače 2 kuglice odjednom. Vjerojatnost da su obje izvučene kuglice bijele boje iznosi $\frac{2}{15}$. Koliko ima u kutiji kuglica koje nisu bijele boje?

Rezultat: 6.

Zadatak 125 (Mario, srednja škola)

Na pet jednakih listića upisana su slova A, D, I, R, Z. Listići se izmiješaju i zatim slučajno stave u niz. Kolika je vjerojatnost da se dobije riječ ZIDAR?

Rješenje 125

Ponovimo!

Permutacija skupa $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ od n različitih elemenata uređena je n – torka svih njegovih članova. Broj različitih permutacija od n elemenata je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ ... \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Svaki raspored zadanih slova određuje jednu permutaciju pa broj svih mogućih događaja (ukupan broj rasporeda pet slova) iznosi:

$$n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Broj svih povoljnih događaja (dobije se riječ ZIDAR) je:

m = 1.

Vjerojatnost događaja iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120} = 0.0083.$$

Vježba 125

Na četiri jednaka listića upisana su slova A, D, O, V. Listići se izmiješaju i zatim slučajno stave u niz. Kolika je vjerojatnost da se dobije riječ VODA?

Rezultat: 0.0417.

Zadatak 126 (Mario, srednja škola)

Kolika je vjerojatnost da kvadrat slučajno izabranoga cijeloga broja ima zadnju znamenku 1?

Rješenje 126

Ponovimo!

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Budući da zadnja znamenka bilo kojeg cijelog broja može biti jedan od elemenata skupa $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, broj svih mogućih događaja (ishoda, rezultata) iznosi:

n = 10.

Pogledajmo kako zadnja znamenka kvadrata cijelog broja ovisi o zadnjoj znamenci cijelog broja:

$$\ldots 0 \Rightarrow \ldots 0^2 \Rightarrow \ldots 0 \quad , \quad \ldots 1 \Rightarrow \ldots 1^2 \Rightarrow \ldots 1$$
$$\ldots 2 \Rightarrow \ldots 2^2 \Rightarrow \ldots 4 \quad , \quad \ldots 3 \Rightarrow \ldots 3^2 \Rightarrow \ldots 9$$
$$\ldots 4 \Rightarrow \ldots 4^2 \Rightarrow \ldots 6 \quad , \quad \ldots 5 \Rightarrow \ldots 5^2 \Rightarrow \ldots 5$$
$$\ldots 6 \Rightarrow \ldots 6^2 \Rightarrow \ldots 6 \quad , \quad \ldots 7 \Rightarrow \ldots 7^2 \Rightarrow \ldots 9$$
$$\ldots 8 \Rightarrow \ldots 8^2 \Rightarrow \ldots 4 \quad , \quad \ldots 9 \Rightarrow \ldots 9^2 \Rightarrow \ldots 1.$$

Povoljni su ishodi brojevi kojima je zadnja znamenka 1 ili 9 pa je broj svih povoljnih događaja jednak

$$m = 2.$$

Vjerojatnost događaja iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{10} = 0.2.$$

Vježba 126

Kolika je vjerojatnost da kvadrat slučajno izabranoga cijeloga broja ima zadnju znamenku 6?

Rezultat: 0.2.

Zadatak 127 (Felix, maturant gimnazije)

Osam ljudi slučajno sjeda na osam stolica. Kolika je vjerojatnost da dvije određene osobe sjede jedna do druge?

Rješenje 127

Ponovimo!

Permutacija skupa $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ od n različitih elemenata uređena je n – torka svih njegovih članova. Broj različitih permutacija od n elemenata je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Ako element s_1 možemo izabrati is skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Osam osoba može slučajno sjesti na 8! načina pa je broj svih mogućih događaja (ishoda, rezultata):

$$n = 8!.$$

(permutacije bez ponavljanja)

Budući da dvije određene osobe sjede jedna do druge, tretiramo ih kao jednu osobu (s dva moguća položaja sjedenja, tj. 2 ! načina). Ostalih sedam osoba može sjesti na 7 ! načina pa je broj svih povoljnih događaja (ishoda, rezultata) jednak

$$m = 2! \cdot 7!.$$

Vjerojatnost da dvije određene osobe sjede jedna do druge iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 7!}{8!} = \frac{2 \cdot 7!}{7! \cdot 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Vježba 127

Deset ljudi slučajno sjeda na deset stolica. Kolika je vjerojatnost da dvije određene osobe sjede jedna do druge?

Rezultat: 0.2.

Zadatak 128 (Ivana, hotelijerska škola)

Na raspolaganju imamo 5 olovaka, 7 kemijskih olovaka, 4 nalivpera i 8 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati jednu pisaljku?

Rješenje 128

Ponovimo!

Načelo zbroja:

Neka je $n \in N$, a $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ konačni skupovi, od kojih su svaka dva međusobno disjunktna (tj. $S_i \cap S_j = \emptyset$ za $i \neq j$).

Tada je i njihova unija $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_n$ konačan skup i vrijedi

$$\left| S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_n \right| = \left| S_1 \right| + \left| S_2 \right| + \left| S_3 \right| + \ldots + \left| S_n \right|.$$

Prema načelu zbroja, jednu pisaljku možemo izabrati na

$$5 + 7 + 4 + 8 = 24 \text{ načina.}$$

Vježba 128

Na raspolaganju imamo 4 olovke, 6 kemijskih olovaka, 3 nalivpera i 7 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati jednu pisaljku?

Rezultat: 20.

Zadatak 129 (Ivana, hotelijerska škola)

Na raspolaganju imamo 5 olovaka, 7 kemijskih olovaka, 4 nalivpera i 8 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati jednu pisaljku svake vrste?

Rješenje 129

Ponovimo!

Načelo umnoška:

Neka je $n \in N$, a $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ konačni skupovi.

Tada je njihov Kartezijev umnožak $S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n$ konačan skup i vrijedi

$$\left| S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n \right| = \left| S_1 \right| \cdot \left| S_2 \right| \cdot \left| S_3 \right| \cdot \ldots \cdot \left| S_n \right|.$$

Prema načelu umnoška, broj izbora jedne pisaljke svake vrste jednak je

$$5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8 = 1120.$$

Vježba 129

Na raspolaganju imamo 4 olovke, 6 kemijskih olovaka, 3 nalivpera i 7 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati po jednu pisaljku svake vrste?

Rezultat: 504.

Zadatak 130 (Ivana, hotelijerska škola)

Na raspolaganju imamo 5 olovaka, 7 kemijskih olovaka, 4 nalivpera i 8 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati dvije pisaljke?

Rješenje 130

Ponovimo!

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ ili } C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Prema tome, dvije pisaljke možemo izabrati na

$$\left. \begin{array}{l} n = 5 + 7 + 4 + 8 = 24 \;,\; k = 2 \\ C_n^k = \binom{n}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow C_{24}^2 = \binom{24}{2} \Rightarrow C_{24}^2 = \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2} \Rightarrow C_{24}^2 = 276.$$

Vježba 130

Na raspolaganju imamo 4 olovke, 6 kemijskih olovaka, 3 nalivpera i 7 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati dvije pisaljke?

Rezultat: 190.

Zadatak 131 (Ivana, hotelijerska škola)

Na raspolaganju imamo 5 olovaka, 7 kemijskih olovaka, 4 nalivpera i 8 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati dvije pisaljke svake vrste?

Rješenje 131

Ponovimo!

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ ili } C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Načelo umnoška:

Neka je $n \in N$, a $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ konačni skupovi.

Tada je njihov Kartezijev umnožak $S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n$ konačan skup i vrijedi

$$\left| S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n \right| = \left| S_1 \right| \cdot \left| S_2 \right| \cdot \left| S_3 \right| \cdot \ldots \cdot \left| S_n \right|.$$

Od mogućih 5 olovaka dvije olovke možemo izabrati na $C_5^2 = \binom{5}{2}$ načina.

Od mogućih 7 kemijskih olovaka dvije kemijske olovke možemo izabrati na $C_7^2 = \binom{7}{2}$ načina.

Od moguća 4 nalivpera dva nalivpera možemo izabrati na $C_4^2 = \binom{4}{2}$ načina.

Od mogućih 8 tehničkih olovaka dvije tehničke olovke možemo izabrati na $C_8^2 = \binom{8}{2}$ načina.

Prema načelu umnoška, broj izbora dvije pisaljke svake vrste jednak je

$$C_5^2 \cdot C_7^2 \cdot C_4^2 \cdot C_8^2 = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 35\,280.$$

Vježba 131

Na raspolaganju imamo 4 olovke, 6 kemijskih olovaka, 3 nalivpera i 7 tehničkih olovaka. Na koliko načina možemo izabrati dvije pisaljke svake vrste?

Rezultat: 5670.

Zadatak 132 (Ivan, Ivica, Mile, pomorska škola)

Od 100 pitanja koja se postavljaju na ispitu statistike student zna odgovoriti na 85 pitanja. Student na slučajan način izvlači 4 pitanja. Da bi postigao pozitivnu ocjenu na ispitu, student mora odgovoriti na sva 4 pitanja. Koliko iznosi vjerojatnost da će student položiti ispit?

Rješenje 132

Ponovimo!

Uvjetna vjerojatnost događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je P(B) > 0, je broj P(A I B) definiran s:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definicijsku formulu za račun uvjetne vjerojatnosti možemo i ovako napisati:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Na sličan ćemo način računati vjerojatnost umnoška više događaja. Na primjer,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Neka je događaj A_i, $A_i = \{\text{student zna } i - \text{to izvučeno pitanje}\}$, $i = 1, 2, 3, 4.$ Tada je

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{\text{student zna sva četiri izvučena pitanja}\}$ događaj čiju vjerojatnost tražimo.
Očito je:

$$P(A_1) = \frac{85}{100}.$$

Nakon što izvuče prvo pitanje, studentu je ostalo 99 pitanja, od kojih 84 zna. Stoga je:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{84}{99}.$$

Nakon što izvuče drugo pitanje, studentu je ostalo 98 pitanja, od kojih 83 zna. Stoga je:

$$P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{83}{98}.$$

Nakon što izvuče treće pitanje, studentu je ostalo 97 pitanja, od kojih 82 zna. Stoga je:

$$P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{82}{97}.$$

Po formuli za uvjetnu vjerojatnost slijedi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{83}{98} \cdot \frac{82}{97} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0.51637.$$

Vježba 132

Student je izašao na ispit znajući samo 20 od 25 pitanja. Profesor je postavio 3 pitanja jedno za drugim. Kolika je vjerojatnost da student zna sva 3 pitanja?

Rezultat: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} = 0.49565.$

Zadatak 133 (Ivan, Ivica, Mile, pomorska škola)

Iz skupa od 3 dobra i 2 loša proizvoda izvlačimo dva, jedan za drugim. Odredite vjerojatnost događaja "u drugom izvlačenju izvučen je loš proizvod uz pretpostavku da je u prvom izvučen dobar".

Rješenje 133

Ponovimo!

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Uvjetna vjerojatnost

Vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B zovemo uvjetna vjerojatnost i označavamo P(A | B) (čitamo: vjerojatnost od A uz uvjet B).

Neka su A i B događaji: $A = \{\text{u prvom izvlačenju izvučen je dobar proizvod}\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5},$

$B = \{\text{u drugom izvlačenju izvučen je loš proizvod}\}.$

Tada je događaj

$B \mid A = \{\text{u drugom izvlačenju izvučen je loš proizvod, ako je u prvom izvučen dobar}\}.$

Nakon izvlačenja prvog proizvoda ostao je jedan proizvod manje pa je vjerojatnost da je u drugom izvlačenju izvučen loš proizvod, ako je u prvom izvučen dobar, jednaka

$$P(B \mid A)=\frac{2}{5-1} \Rightarrow P(B \mid A)=\frac{2}{4} \Rightarrow P(B \mid A)=\frac{1}{2} \Rightarrow P(B \mid A)=0.5.$$

Vježba 133

U posudi se nalazi 6 bijelih i 4 crne kuglice. Izvlačimo jednu po jednu dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da će druga kuglica biti bijela, ako je prva kuglica bila crna?

Rezultat: $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Zadatak 134 (Ivan, Ivica, Mile, pomorska škola)

Pribavljamo proizvode iz 3 tvornice. Vjerojatnost da je proizvod iz prve tvornice ispravan je 0.9, da je ispravan iz druge tvornice je 0.8, a da je ispravan iz treće tvornice je 0.75. Kolika je vjerojatnost da ćemo iz prve i druge tvornice dobiti ispravne proizvode, a iz treće neispravan?

Rješenje 134

Ponovimo!

Suprotni događaj

Događaj koji se ostvaruje samo onda kad se slučajan događaj A nije ostvario nazivamo suprotan događaj događaja A. Označavamo ga sa $\overline{A}$.

Vjerojatnost suprotnog događaja

Za svaki događaj A vrijedi:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Nezavisni događaji

Događaji A i B iz istog prostora elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B).$$

Zadani su događaji:

$$A_1=\{\text{ proizvod iz prve tvornice je ispravan }\} \Rightarrow P(A_1)=0.9,$$

$$A_2=\{\text{ proizvod iz druge tvornice je ispravan }\} \Rightarrow P(A_2)=0.8,$$

$$A_3=\{\text{ proizvod iz treće tvornice je ispravan }\} \Rightarrow P(A_3)=0.75.$$

Budući da su događaji A_1, A_2, i A_3 nezavisni, vjerojatnost događaja

$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}=\{$ proizvodi iz prve i druge tvornice su ispravni, a proizvod iz treće tvornice je neispravan $\}$

iznosi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot (1-P(A_3)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})=0.9 \cdot 0.8 \cdot (1-0.75) \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})=0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.25 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})=0.18.$$

Vježba 134

Vjerojatnost da strijelac pogodi cilj iznosi 0.85. Kolika je vjerojatnost da ne pogodi cilj, ako gađa tri puta?

Rezultat: 0.15^3.

Zadatak 135 (Bero, gimnazija)

Dva strijelca neovisno jedan o drugome gađaju po jedan hitac u istu metu. Vjerojatnost pogotka u metu za prvog je strijelca 0.9, a za drugog 0.8. Kolika je vjerojatnost pogotka mete?

Rješenje 135

Ponovimo!

Sylvesterova formula

Neka je $(\Omega, P(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in P(\Omega)$. Tada vrijedi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Nezavisni događaji

Događaji A i B iz istog prostora elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zadani su događaji:

$$A = \{\text{ prvi strijelac je pogodio metu }\} \Rightarrow P(A) = 0.9,$$
$$B = \{\text{ drugi strijelac je pogodio metu }\} \Rightarrow P(B) = 0.8.$$

Vjerojatnost događaja $A \cup B$ iznosi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{događaji } A \text{ i } B \text{ su nezavisni} \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.9 + 0.8 - 0.9 \cdot 0.8 \Rightarrow P(A \cup B) = 0.98.$$

Vježba 135

Dva strijelca neovisno jedan o drugome gađaju po jedan hitac u istu metu. Vjerojatnost pogotka u metu za prvog je strijelca 0.8, a za drugog 0.5. Kolika je vjerojatnost pogotka mete?

Rezultat: 0.9.

Zadatak 136 (Bajo, gimnazijalac)

Jedan trgovački lanac je uočio da 80% čekova ispisuju muškarci, a da je od toga 16% nevažećih čekova dok žene ispisuju 5% nevažećih čekova. Koja je vjerojatnost da je slučajno odabrani ček potpisao muškarac i da je lažan?

Rješenje 136

Ponovimo!

Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n).$$

Ili

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Bayesova formula

Neka je $\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\}$ potpun sustav događaja i neka je $A \subseteq \Omega$ događaj takav da je $P(A) > 0$.

Tada za svako i = 1, 2, 3, …, n vrijedi:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)}.$$

Ili

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n)}.$$

Neka su događaji:

$$A = \{\text{ ispisan ček je lažan }\}$$
$$H_1 = \{\text{ ček je ispisao muškarac }\}$$

$$H_2 = \{ \text{ček je ispisala žena} \}$$

pa prema uvjetima zadatka imamo:

$$P(H_1) = 0.80 \Rightarrow P(A \mid H_1) = 0.16,$$

$$P(H_2) = 0.20 \Rightarrow P(A \mid H_2) = 0.05.$$

Vjerojatnost da je slučajno odabrani ček potpisao muškarac i da je lažan, prema Bayesovoj formuli, iznosi:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} = \frac{0.80 \cdot 0.16}{0.80 \cdot 0.16 + 0.20 \cdot 0.05} = 0.92754.$$

Vježba 136

Na montažu dolaze proizvodi izrađeni na dva stroja, pri čemu 60% svih proizvoda dolazi s prvog stroja, a 40% s drugog. Prvi stroj proizvodi 90% proizvoda prve vrste, a drugi stroj 60% proizvoda prve vrste. Na montažu je došao jedan proizvod i pokazalo se da je prve vrste. Kolika je vjerojatnost da je izrađen na prvom stroju?

Rezultat:

$$A = \{ \text{na montažu je došao proizvod prve vrste} \}$$

$$H_1 = \{ \text{proizvod je izrađen na prvom stroju} \}$$

$$H_2 = \{ \text{proizvod je izrađen na drugom stroju} \}$$

$$P(H_1) = 0.60 \Rightarrow P(A \mid H_1) = 0.90$$

$$P(H_2) = 0.40 \Rightarrow P(A \mid H_2) = 0.60$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} = \frac{0.60 \cdot 0.90}{0.60 \cdot 0.90 + 0.40 \cdot 0.60} = 0.69231.$$

Zadatak 137 (Bajo, gimnazijalac)

Jedan trgovački lanac je uočio da 80% čekova ispisuju muškarci, a da je od toga 16% nevažećih čekova dok žene ispisuju 5% nevažećih čekova. Koja je vjerojatnost da je slučajno odabrani ček potpisala žena i da je lažan?

Rješenje 137

Ponovimo!

Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $\{ H_1, H_2, H_3, ..., H_n \}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n).$$

Ili

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Bayesova formula

Neka je $\{ H_1, H_2, H_3, ..., H_n \}$ potpun sustav događaja i neka je $A \subseteq \Omega$ događaj takav da je $P(A) > 0$.

Tada za svako i = 1, 2, 3, …, n vrijedi:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)}.$$

Ili

$$P\left(H_i \mid A\right)=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A \mid H_i\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(A \mid H_2\right)+P\left(H_3\right)\cdot P\left(A \mid H_3\right)+\ \ldots\ +P\left(H_n\right)\cdot P\left(A \mid H_n\right)}.$$

Neka su događaji:

$$A=\{\text{ ispisan ček je lažan }\}$$

$$H_1=\{\text{ ček je ispisao muškarac }\}$$

$$H_2=\{\text{ ček je ispisala žena }\}$$

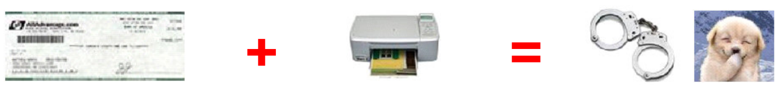
pa prema uvjetima zadatka imamo:

$$P\left(H_1\right)=0.80\ \Rightarrow\ P\left(A \mid H_1\right)=0.16,$$

$$P\left(H_2\right)=0.20\ \Rightarrow\ P\left(A \mid H_2\right)=0.05.$$

Vjerojatnost da je slučajno odabrani ček potpisala žena i da je lažan, prema Bayesovoj formuli, iznosi:

$$P\left(H_2 \mid A\right)=\frac{P\left(H_2\right)\cdot P\left(A \mid H_2\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(A \mid H_2\right)}=\frac{0.20\cdot 0.05}{0.80\cdot 0.16+0.20\cdot 0.05}=0.07246.$$



Vježba 137

Pretpostavimo da imamo skup u kojem je jednak broj muškaraca i žena i da su 5% od ukupnog broja muškaraca i 0.25% od ukupnog broja žena daltonisti. Pokazalo se da je na slučajan način izabrana osoba iz tog društva daltonist. Kolika je vjerojatnoast da je to muškarac?

Rezultat:

$$A=\{\text{ izabrana osoba je daltonist }\}$$

$$H_1=\{\text{ izabrana osoba je muškarac }\}$$

$$H_2=\{\text{ izabrana osoba je žena }\}$$

$$P\left(H_1\right)=0.50\ \Rightarrow\ P\left(A \mid H_1\right)=0.05$$

$$P\left(H_2\right)=0.50\ \Rightarrow\ P\left(A \mid H_2\right)=0.0025$$

$$P\left(H_1 \mid A\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A \mid H_1\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(A \mid H_2\right)}=\frac{0.50\cdot 0.05}{0.50\cdot 0.05+0.50\cdot 0.0025}=0.95238.$$

Zadatak 138 (Biba, gimnazija)

Koliko puta moramo baciti kocku da možemo s vjerojatnošću 0.5 očekivati da će barem jedan put pasti broj 5?

Rješenje 138

Ponovimo!

Ako obavimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$$P(A)=1-(1-p)^n.$$

$$\log a^n=n\cdot\log a\quad,\quad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b\quad,\quad \log 1=0.$$

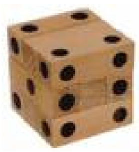
Neka je A događaj: $A=\{\text{ pao je broj } 5\}$. Vjerojatnost da će na kocki pasti broj 5 je $p=\frac{1}{6}.$

Vjerojatnost da će se takav događaj dogoditi u n igara barem jedanput jest:

$$P(A)=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n}.$$

Ako pitamo koliko puta treba baciti kocku da ta vjerojatnost bude jednaka 0.5, moramo postaviti jednadžbu. Odavde slijedi:

$$\frac{50}{100}=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n} \Rightarrow \frac{1}{2}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n}=1-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n}=\frac{1}{2} \ / \log \Rightarrow \log\left(\frac{5}{6}\right)^{n}=\log\frac{1}{2} \Rightarrow n\cdot\log\frac{5}{6}=\log\frac{1}{2} \Rightarrow n=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\frac{\log 1-\log 2}{\log 5-\log 6} \Rightarrow n=\frac{0-\log 2}{\log 5-\log 6} \Rightarrow n=\frac{-\log 2}{\log 5-\log 6} \Rightarrow n=\frac{\log 2}{\log 6-\log 5} \quad n=3.8\approx 4.$$

Vježba 138

Koliko puta moramo baciti kocku da možemo s vjerojatnošću 0.5 očekivati da će barem jedan put pasti broj 2?

Rezultat: 4.

Zadatak 139 (Edy, gimnazija)

Novčić bacamo 10 puta. Izračunaj vjerojatnosti za broj mogućih pojavljivanja pisma.

Rješenje 139

Ponovimo!

Neka je $A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}\subseteq\Omega$ proizvoljan događaj, onda vjerojatnost od A definiramo sa

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za događaj A}}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$

Vjerojatnost događaja koji se ponavlja

Ako obavimo n nezavisnih pokusa tada vjerojatnost da se događaj A ostvari k puta ako je njegova vjerojatnost pojavljivanja u pokusu jednaka p, iznosi

$$P(A)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ (čitamo "n iznad k" ili "n povrh k") i definiramo:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Ili

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}.$$

U svakom bacanju novčića vjerojatnost pojavljivanja pisma je

$$p=\frac{1}{2}.$$

pismo

50% : 50%

glava

Vjerojatnost da se pismo pojavi k puta u deset bacanja iznosi:

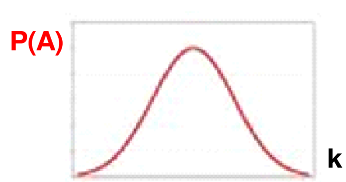
$$P(A)=\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-k}\Rightarrow P(A)=\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}\Rightarrow P(A)=\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{k}.$$

Uvrštavajući k = 0, 1, 2, 3, …, 10, dobit ćemo sljedeće vjerojatnosti:

$k=0\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{0}=\frac{1}{1024}\cdot 1=\frac{1}{1024}$
$k=1\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{1}=\frac{1}{1024}\cdot 10=\frac{10}{1024}$
$k=2\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{2}=\frac{1}{1024}\cdot\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=\frac{45}{1024}$
$k=3\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{3}=\frac{1}{1024}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{120}{1024}$
$k=4\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{4}=\frac{1}{1024}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{210}{1024}$
$k=5\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{5}=\frac{1}{1024}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{252}{1024}$
$k=6\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{6}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{4}=\frac{210}{1024}$
$k=7\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{7}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{3}=\frac{120}{1024}$
$k=8\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{8}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{2}=\frac{45}{1024}$
$k=9\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{9}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{1}=\frac{10}{1024}$
$k=10\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\binom{10}{10}=\frac{1}{1024}\cdot 1=\frac{1}{1024}.$

Skica ovih vrijednosti u Kartezijevu sustavu:



Vježba 139

Novčić bacamo 10 puta. Izračunaj vjerojatnosti za broj mogućih pojavljivanja glava.

Rezultat: Isto kao za pismo.

Zadatak 140 (Matija, hotelijerska škola)

Koliko je matematičko očekivanje pojavljivanjem glave kad bacimo novčić?

Rješenje 140

Ponovimo!

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Srednja vrijednost ili matematičko očekivanje
Varijabla x može poprimiti vrijednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ s odgovarajućim vjerojatnostima $p_1, p_2, \dots, p_n$. Matematičko očekivanje ili srednja vrijednost je

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i.$$

Pri bacanju novčića moguća su dva ishoda (rezultata):

$$x=\left\{x_1, x_2\right\}.$$

$$x_1 - \text{pala je glava i } x_1=1 \quad , \quad x_2 - \text{nije pala glava i } x_2=0.$$

Vjerojatnost oba ishoda jednaka je

$$p_1=P(1)=\frac{1}{2} \quad , \quad p_2=P(0)=\frac{1}{2}.$$

Matematičko očekivanje iznosi:

$$\bar{x}=p_1 \cdot x_1+p_2 \cdot x_2 \Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{2} \cdot 1+\frac{1}{2} \cdot 0 \Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 140

Koliko je matematičko očekivanje pojavljivanjem pisma kad bacimo novčić?

Rezultat: $\frac{1}{2}.$