**Zadatak 141 (4A, TUPŠ)**

Ako su događaji A i B nezavisni, dokažite da su nezavisni i njihovi komplementi $\overline{A}$ i $\overline{B}$.

**Rješenje 141**

$$P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)=\left[\begin{array}{c}\text{vjerojatnost komplementa}\\ P\left(\overline{X}\right)=1-P(X)\end{array}\right]=(1-P(A))\cdot(1-P(B))=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{nezavisnost događaja } X \text{ i } Y\\ P(X\cap Y)=P(X)\cdot P(Y)\end{array}\right]=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{vjerojatnost unije događaja } X \text{ i } Y\\ P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)\end{array}\right]=1-P(A\cup B)=\left[\begin{array}{c}\text{vjerojatnost komplementa}\\ P\left(\overline{X}\right)=1-P(X)\end{array}\right]=P\left(\overline{A\cup B}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{de Morganov zakon}\\ \overline{X\cup Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}\end{array}\right]=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right).$$

Dobili smo da je

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)$$

pa su komplementi $\overline{A}$ i $\overline{B}$ nezavisni.

**Vježba 141**

Za svaki događaj A vrijedi $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$. Dokaži.

**Rezultat:** Budući da je $\overline{A}$ suprotni događaj događaju A, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}A\cup\overline{A}=\Omega\\ A\cap\overline{A}=\varnothing\end{array}\right\}\Rightarrow P(\Omega)=1\Rightarrow P\left(A\cup\overline{A}\right)=1\Rightarrow P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=1-P(A).$$



**Zadatak 142 (Roko, gimnazija)**

Vjerojatnost da strijelac pogodi cilj iznosi 0.85. Kolika je vjerojatnost da ne pogodi cilj, ako gađa tri puta?

**Rješenje 142**

Ponovimo!

Suprotni događaj

Događaj koji se ostvaruje samo onda kad se slučajan događaj A nije ostvario nazivamo suprotan događaj događaja A. Označavamo ga sa $\overline{A}$.

Vjerojatnost suprotnog događaja

Za svaki događaj A vrijedi:

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A).$$

Nezavisni događaji

Događaji A i B iz istog prostora elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Zadani su događaji:

$$A_1=\{\text{strijelac iz prvog pogotka pogađa cilj}\}\Rightarrow P(A_1)=0.85,$$

$$A_2=\{\text{strijelac iz drugog pogotka pogađa cilj}\}\Rightarrow P(A_2)=0.85,$$

$$A_3=\{\text{strijelac iz trećeg pogotka pogađa cilj}\}\Rightarrow P(A_3)=0.85.$$

Budući da su događaji $A_1$, $A_2$, i $A_3$ nezavisni, vjerojatnost događaja

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}=\{\text{strijelac ne pogađa cilj ni iz prvog, ni iz drugog, ni iz trećeg pogotka}\}$$

iznosi:

$$P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) \Rightarrow P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) = \left(1 - P\left(A_1\right)\right) \cdot \left(1 - P\left(A_2\right)\right) \cdot \left(1 - P\left(A_3\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) = (1 - 0.85) \cdot (1 - 0.85) \cdot (1 - 0.85) \Rightarrow P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) = 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) = 0.15^3.$$

**Vježba 142**

Vjerojatnost da strijelac pogodi cilj iznosi 0.85. Kolika je vjerojatnost da ne pogodi cilj, ako gađa dva puta?

**Rezultat:** $0.15^2$.

**Zadatak 143 (Vidra, gimnazija)**

Metalni novčić bacamo 6 puta. Kolika je vjerojatnost da će više puta pasti pismo nego grb?

**Rješenje 143**

Permutacije elemenata među kojima ima jednakih – koje ne razlikujemo jesu permutacije s ponavljanjem. Ako u nizu od n elemenata ima više skupina jednakih, recimo $k_1$ jedne vrste, $k_2$ druge vrste, $k_3$ treće vrste, …, $k_r$ r – te vrste tako da je

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n,$$

onda je broj permutacija s ponavljanjem jednak

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r} = \frac{n\,!}{k_1\,! \cdot k_2\,! \cdot k_3\,! \cdot \ldots \cdot k_r\,!}.$$

Neka je $A = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\right\} \subseteq \Omega$ proizvoljan događaj, onda vjerojatnost od A definiramo sa

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za događaj A}}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$


pismo
grb




- Novčić bacamo 6 puta. Prva mogućnost da više puta padne pismo nego grb je:

pala su 4 pisma i 2 grba.

U svakoj permutaciji permutiranjem 4 pisma odnosno 2 grba ne dobivamo novu permutaciju. Prema tome ukupan broj iznosi:

$$P_6^{4,2} = \frac{6\,!}{4\,! \cdot 2\,!} = \frac{4\,! \cdot 5 \cdot 6}{4\,! \cdot 2\,!} = \frac{30}{1 \cdot 2} = 15.$$

- Novčić bacamo 6 puta. Druga mogućnost da više puta padne pismo nego grb je:

palo je 5 pisama i 1 grb.

U svakoj permutaciji permutiranjem 5 pisama odnosno 1 grba ne dobivamo novu permutaciju. Prema tome ukupan broj iznosi:

$$P_6^5 = \frac{6\,!}{5\,!} = \frac{5\,! \cdot 6}{5\,!} = 6.$$

- Novčić bacamo 6 puta. Treća mogućnost da više puta padne pismo nego grb je:

palo je svih 6 pisama.

Prema tome ukupan broj iznosi:

$$P_6^6 = \frac{6\,!}{6\,!} = 1.$$

Budući da novčić bacamo 6 puta, broj svih mogućih ishoda (rezultata) iznosi:

$$n = 2^6 = 64.$$

Broj svih povoljnih ishoda (da više puta padne pismo nego grb) je:

$$m = 15 + 6 + 1 = 22.$$

Vjerojatnost događaja iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} = 0.34375.$$

**Vježba 143**

Metalni novčić bacamo 6 puta. Kolika je vjerojatnost da će više puta pasti grb nego pismo?

**Rezultat:** 0.34375.

**Zadatak 144 (Iris, gimnazija)**

U vazi imamo 4 različita crvena, 3 različita žuta i 2 različita bijela cvijeta. Na koliko načina iz ovog cvijeća možemo napraviti buketić od 3 cvijeta tako da on sadrži bar jedan crveni cvijet?

**Rješenje 144**

Ponovimo!

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \le n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}.$$

Princip uzastopnog prebrojavanja

Ako element $s_1$ možemo izabrati is skupa $S_1$ na $n_1$ različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element $s_2$ iz skupa $S_2$ na $n_2$ načina, nakon toga element $s_3$ iz skupa $S_3$ na $n_3$ načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

1.inačica

- Slažemo buketić od 1 cvijeta crvene boje i 2 cvijeta ostalih boja.

Jedan crveni cvijet može se odabrati na $\binom{4}{1}$, a dva cvijeta ostalih boja na $\binom{5}{2}$ načina. Tada je moguć broj izbora cvijeća

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2}.$$

- Slažemo buketić od 2 cvijeta crvene boje i 1 cvijeta ostalih boja.

Dva crvena cvijeta mogu se odabrati na $\binom{4}{2}$, a jedan cvijet ostalih boja na $\binom{5}{1}$ načina. Tada je moguć broj izbora cvijeća

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}.$$

- Slažemo buketić od 3 cvijeta crvene boje i 0 cvjetova ostalih boja.

Tri crvena cvijeta mogu se odabrati na $\binom{4}{3}$, a nula cvjetova ostalih boja na $\binom{5}{0}$ načina. Tada je moguć broj izbora cvijeća

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0}.$$

Ukupan broj načina izbora cvijeća je:

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}+\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{0}=4\cdot 10+6\cdot 5+4\cdot 1=40+30+4=74.$$

2.inačica

U vazi je ukupno 9 cvjetova pa se tri cvijeta mogu odabrati na $\binom{9}{3}$ načina. Od 5 cvjetova koji nisu crvene boje tri se mogu odabrati na $\binom{5}{3}$ načina. Broj načina na koji možemo iz ovog cvijeća napraviti buketić od 3 cvijeta tako da on sadrži bar jedan crveni cvijet iznosi:

$$\binom{9}{3}-\binom{5}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=84-10=74.$$

**Vježba 144**

U vazi imamo 5 različita crvena, 3 različita žuta i 2 različita bijela cvijeta. Na koliko načina iz ovog cvijeća možemo napraviti buketić od 3 cvijeta tako da on sadrži bar jedan crveni cvijet?

**Rezultat:** 110.

**Zadatak 145 (Anita, gimnazija)**

Iz kutije s kuglicama označenim brojevima od 11 do 20 izvlačimo odjednom četiri kuglice. Kolika je vjerojatnost da je zbroj izvučenih brojeva manji od 74?



**Rješenje 145**

Klasična definicija vjerojatnosti

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Kombinacije bez ponavljanja

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je r ≤ n. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}.$$

Četiri kuglice između njih deset možemo odabrati na $\binom{10}{4}$ načina. Zato je broj svih mogućih ishoda (rezultata):

$$n=\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Samo jedan zbroj od četiri izvučene kuglice ima vrijednost 74 (20 + 19 + 18 + 17), a svi ostali su manji. Broj svih povoljnih ishoda (rezultata) je:

$$m=\binom{10}{4}-1=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-1=210-1=209.$$

Vjerojatnost da je zbroj izvučenih brojeva manji od 74 iznosi:

$$P(A)=\frac{m}{n} \Rightarrow P(A)=\frac{209}{210} \Rightarrow P(A)=0.99524.$$

**Vježba 145**

Iz kutije s kuglicama označenim brojevima od 11 do 20 izvlačimo odjednom tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da je zbroj izvučenih brojeva manji od 57?

**Rezultat:** 0.99167.

**Zadatak 146 (Vedrana, srednja škola)**

Koliko je različitih mogućnosti raspodjele 32 karte na 4 igrača tako da se svakom dijeli odjednom po 8 karata?

**Rješenje 146**

Ponovimo!

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \le n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}.$$

Poučak o uzastopnom prebrojavanju

Ako element $s_1$ možemo izabrati is skupa $S_1$ na $n_1$ različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element $s_2$ iz skupa $S_2$ na $n_2$ načina, nakon toga element $s_3$ iz skupa $S_3$ na $n_3$ načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Za prvog igrača postoji $C_{32}^8$ načina da mu se odjednom podijeli 8 karata iz snopa od 32 karte.

Ostale su 24 karte (32 – 8 = 24).

Za drugog igrača postoji $C_{24}^8$ načina da mu se odjednom podijeli 8 karata iz snopa od 24 karte.

Sada je ostalo 16 karata (24 – 8 = 16).

Za trećeg igrača postoji $C_{16}^8$ načina da mu se odjednom podijeli 8 karata iz snopa od 16 karata.

Preostalo je 8 karata (16 – 8 = 8).

Za četvrtog igrača postoji $C_8^8$ načina da mu se odjednom podijeli 8 karata iz snopa od 8 karata.

Prema poučku o uzastopnom prebrojavanju ukupan broj različitih mogućnosti raspodjele 32 karte na 4 igrača tako da se svakom dijeli odjednom po 8 karata iznosi:

$$C_{32}^8\cdot C_{24}^8\cdot C_{16}^8\cdot C_8^8=\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}=$$

$$=\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot 1=$$

$$=99561092450391000.$$

**Vježba 146**

Koliko je različitih mogućnosti raspodjele 32 karte na 2 igrača tako da se svakom dijeli odjednom po 16 karata?

**Rezultat:** 601 080 390.

**Zadatak 147 (Vedrana, srednja škola)**

Dokaži da je broj $C_{n+k}^{2}+C_{n+k+1}^{2}$ potpun kvadrat.

**Rješenje 147**

Ponovimo!

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ (čitamo "n iznad k" ili "n povrh k") i definiramo:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Ili

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

$$\binom{n}{n}=1.$$

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je r ≤ n. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}.$$

$$C_{n+k}^{2}+C_{n+k+1}^{2}=\binom{n+k}{2}+\binom{n+k+1}{2}=\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)}{1\cdot 2}+\frac{(n+k+1)\cdot(n+k)}{1\cdot 2}=$$

$$=\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)}{2}+\frac{(n+k+1)\cdot(n+k)}{2}=\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)+(n+k+1)\cdot(n+k)}{2}=\begin{bmatrix}\text{izlučimo}\\ n+k\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{(n+k)\cdot(n+k-1+n+k+1)}{2}=\frac{(n+k)\cdot(2\cdot n+2\cdot k)}{2}=\frac{(n+k)\cdot 2\cdot(n+k)}{2}=(n+k)^2-\text{potpun kvadrat}.$$

**Vježba 147**

Dokaži da je broj $C_8^2+C_9^2$ potpun kvadrat.

**Rezultat:** $8^2$.

**Zadatak 148 (Bajo, gimnazijalac)**

Na šahovskom turniru sudjeluje 12 šahista. Svaki treba odigrati partiju sa svakim od preostalih igrača. Svake večeri igra se 6 partija. Koliko će se partija odigrati ako jedan šahist zbog bolesti napusti turnir nakon treće večeri?

**Rješenje 148**

Ponovimo!

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je r ≤ n. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}.$$

1.inačica

Budući da svaki šahist (od njih 12 koji sudjeluju na turniru) treba odigrati partiju sa svakim od preostalih igrača, ukupan broj partija iznosi:

$$C_{12}^{2}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66.$$

Svake večeri igra se 6 partija pa turnir traje 11 dana (66 : 6). Budući da je jedan šahist zbog bolesti napustio turnir nakon treće večeri, idućih 8 večeri (11 – 3) igrat će se bez njega pa je to 8 partija manje:

$$66-8=58.$$

Ako jedan šahist zbog bolesti napusti turnir nakon treće večeri ukupno će se odigrati 58 partija.

2.inačica

Budući da svaki šahist (od njih 12 koji sudjeluju na turniru) treba odigrati partiju sa svakim od preostalih igrača, ukupan broj partija iznosi:

$$C_{12}^{2}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66.$$

Svake večeri igra se 6 partija pa turnir traje 11 dana (66 : 6). Budući da je jedan šahist zbog bolesti napustio turnir nakon treće večeri, idućih 8 večeri (11 – 3) igrat će se bez njega, dakle, pet partija svako veče pa je to:

$$3\cdot 6+8\cdot 5=18+40=58.$$

Ako jedan šahist zbog bolesti napusti turnir nakon treće večeri ukupno će se odigrati 58 partija.

**Vježba 148**

Na šahovskom turniru sudjeluje 12 šahista. Svaki treba odigrati partiju sa svakim od preostalih igrača. Svake večeri igra se 6 partija. Koliko će se partija odigrati ako jedan šahist zbog bolesti napusti turnir nakon pete večeri?

**Rezultat:** 60.



**Zadatak 149 (Ilona, gimnazija)**

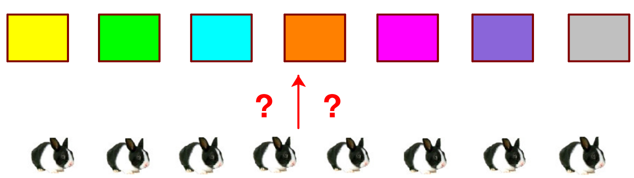
U vreći se nalaze čarape 7 različitih boja. Koliko najmanje čarapa treba izvući iz vreće da bi među njima sigurno bile dvije čarape iste boje?

**Rješenje 149**

Ponovimo!

Dirichletov princip (načelo)

Ako n + 1 zečeva treba raspodijeliti u n kaveza, onda će postojati barem jedan kavez s barem dva zeca u njemu.




Dirichletov princip može se izreći i općenitije: Ako k · n + r zečeva, r ≥ 1, treba raspodijeliti u n kaveza, onda će postojati barem jedan kavez s barem k + 1 zečeva u njemu. Ocjena će biti najbolja ako je broj zečeva tako prikazan pomoću k i r, da je k maksimalan, tj. 1 ≤ r ≤ n.

Dok iz vreće izvlačimo čarape, odmah ih slažemo prema boji. Budući da je sedam mogućnosti za boju izvučene čarape, pa ako želimo da sigurno budu izvučene dvije istobojne čarape, moramo izvući najmanje

$$7\cdot 1+1=8 \text{ čarapa.}$$

**Vježba 149**

U vreći se nalaze čarape 10 različitih boja. Koliko najmanje čarapa treba izvući iz vreće da bi među njima sigurno bile dvije čarape iste boje?

**Rezultat:** 11.

**Zadatak 150 (Ana, maturantica)**

Svaka strana kocke obojana je drugom bojom. Na koliko se načina mogu na strane kocke upisati brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6 tako da je zbroj brojeva na nasuprotnim stranama jednak 7?

**Rješenje 150**

Načelo uzastopnog prebrojavanja:
Ako element $s_1$ možemo izabrati iz skupa $S_1$ na $n_1$ različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element $s_2$ iz skupa $S_2$ na $n_2$ načina, nakon toga element $s_3$ iz skupa $S_3$ na $n_3$ načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na $n_1$ načina, drugi dio posla na $n_2$ načina, …, posljednji na $n_k$ načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

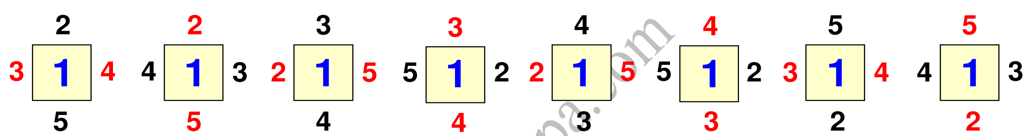
načina.
Budući da je zbroj brojeva na nasuprotnim stranama kocke jednak 7, postoji sljedećih šest mogućnosti:

$$1 + 6 = 7 \quad , \quad 2 + 5 = 7 \quad , \quad 3 + 4 = 7 \quad , \quad 4 + 3 = 7 \quad , \quad 5 + 2 = 7 \quad , \quad 6 + 1 = 7.$$

Zato je

$$n_1 = 6.$$

Pretpostavimo sada da je broj 1 na prednjoj strani kocke (na zadnjoj je broj 6). Tada na gornjoj, donjoj, lijevoj i desnoj strani kocke mogu biti sljedeći brojevi:




Dakle, postoji 8 mogućnosti:

$$n_2 = 8.$$

Ukupan broj načina na koji se mogu upisati brojevi iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 8 = 48.$$



**Vježba 150**

Svaka strana kocke obojana je drugom bojom. Na koliko se načina mogu na strane kocke upisati brojevi 4, 5, 6, 7, 8, 9 tako da je zbroj brojeva na nasuprotnim stranama jednak 13?

**Rezultat:** 48.

**Zadatak 151 (Neno, maturant)**

U Republici Hrvatskoj postoje novčanice od 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 i 1000 kuna. Ako raspolažemo sa jednim primjerkom od svake novčanice, koliko se različitih svota može pomoću njih načiniti? Napomena: Svaku od dobivenih svota moguće je postići s točno jednim izborom različitih novčanica.

**Rješenje 151**

Ponovimo!
Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom k – tog razreda u skupu S. Broj različitih kombinacija je:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k}.$$

$$\binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Računamo broj svota koje se mogu načiniti sa:

- jednom novčanicom: $C_8^1$
- dvije novčanice: $C_8^2$
- tri novčanice: $C_8^3$
- četiri novčanice: $C_8^4$
- pet novčanica: $C_8^5$
- šest novčanica: $C_8^6$
- sedam novčanica: $C_8^7$
- osam novčanica: $C_8^8$.

Ukupan broj svota koje se mogu načiniti iznosi:

$$C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8=\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=$$

$$=\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{3}+\binom{8}{2}+\binom{8}{1}+\binom{8}{8}=2\cdot\binom{8}{1}+2\cdot\binom{8}{2}+2\cdot\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{8}=$$

$$=2\cdot 8+2\cdot\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}+2\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+1=16+56+112+70+1=255.$$



**Vježba 151**

U Republici Hrvatskoj postoje novčanice od 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 i 1000 kuna. Ako raspolažemo sa jednim primjerkom novčanica od 10, 20, 50 kuna, koliko se različitih svota može pomoću njih načiniti? Napomena: Svaku od dobivenih svota moguće je postići s točno jednim izborom različitih novčanica..

**Rezultat:** 7.

**Zadatak 152 (Mislav, gimnazija)**

Može li funkcija $P(x)=\frac{1}{2^4}\cdot\binom{4}{x},\ x=0, 1, 2, 3, 4$ biti funkcija vjerojatnosti?

**Rješenje 152**

Ponovimo!

Ako jedan događaj ima vjerojatnost p da će nastupiti, onda je suprotna vjerojatnost 1 – p.

Vjerojatnost događaja koji se ponavljaju

Ako obavimo n nezavisnih pokusa tada vjerojatnost da se događaj A ostvari k puta ako je njegova vjerojatnost pojavljivanja u pokusu jednaka p iznosi

$$P(A)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k \le n$. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ (čitamo "en iznad ka" ili "en povrh ka") i definiramo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ili

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Zadana funkcija može biti funkcija vjerojatnosti.
Ako obavimo k nezavisnih pokusa tada vjerojatnost da se promatrani događaj ostvari x puta ako je njegova vjerojatnost pojavljivanja u pokusu jednaka $\frac{1}{2}$, iznosi:

$$P(x) = \binom{k}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-x}.$$

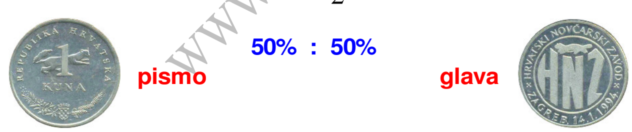
Sređivanjem dobije se:

$$P(x) = \binom{k}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-x} \Rightarrow P(x) = \binom{k}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-x} \Rightarrow P(x) = \binom{k}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = \binom{k}{x} \cdot \frac{1}{2^k} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2^k} \cdot \binom{k}{x}.$$

Primjer
Bacamo novčić 4 puta i računamo vjerojatnost da će pismo pasti x puta (x = 0, 1 , 2, 3, 4).
U svakom bacanju novčića vjerojatnost pojavljivanja pisma je

$$p = \frac{1}{2}.$$




Vjerojatnost da se pismo pojavi x (x = 0, 1, 2, 3,4) puta u četiri bacanja iznosi:

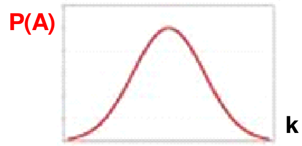
$$P(x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-x} \Rightarrow P(x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \Rightarrow P(x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{x}, \; x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Uvrštavajući x = 0, 1, 2, 3, 4 dobit ćemo sljedeće vjerojatnosti:

| | |
|---|---|
| $x = 0 \Rightarrow P(0) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{0} = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$ | $x = 3 \Rightarrow P(3) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{3} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{16}$ |
| $x = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{1} = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{4}{16}$ | $x = 4 \Rightarrow P(4) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$ |
| $x = 2 \Rightarrow P(2) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{6}{16}$ | |

Skica ovih vrijednosti u Kartezijevu sustavu:




Dakle, načinimo 4 pokusa i pitamo se: kolika je vjerojatnost da će događaj koji ima vjerojatnost $\frac{1}{2}$ nastupiti točno x puta, tj. da neće nastupiti 4 – x puta. (Takvi se pokusi zovu Bernoullijevi nezavisni pokusi). Vjerojatnost za to je:

$$P(x)=\frac{1}{2^4}\cdot\binom{4}{x},\ x=0,1,2,3,4.$$

**Vježba 152**

Može li funkcija $p(x)=\frac{1}{2^6}\cdot\binom{6}{x},\ x=0,1,2,3,4,5,6$ biti funkcija vjerojatnosti?

**Rezultat:** Da.

**Zadatak 153 (Anamarija, gimnazija)**

Dvije su kutije pune kuglica. U prvoj ima 10 crvenih i 30 zelenih kuglica, a u drugoj je 20 crvenih i 20 zelenih kuglica. Nasumce uzmemo jednu kuglicu iz proizvoljne kutije, a to je baš crvena kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo crvenu kuglicu uzeli iz prve kutije?

**Rješenje 153**

Ponovimo!

Neka je $\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A\subset\Omega$ vrijedi

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)+P(H_3)\cdot P(A\mid H_3)+\ ...\ +P(H_n)\cdot P(A\mid H_n).$$

Bayesova formula

Neka je $\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\}$ potpun sustav događaja i neka je $A\subseteq\Omega$ događaj takav da je P(A) > 0. Tada za svako i = 1, 2, 3, …, n vrijedi

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)+\ ...\ +P(H_n)\cdot P(A\mid H_n)}=\frac{P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(H_j)\cdot P(A\mid H_j)}.$$

Stanoviti događaj A dogodio se, znamo da je uslijedio kao posljedica jednog od n događaja $H_1$, $H_2$, $H_3$, …, $H_n$, od kojih se uzajamno po dva isključuju. Događaji $H_1$, $H_2$, $H_3$, …, $H_n$ zovu se uzroci ili hipoteze od A, a gornja formula daje vjerojatnost događaja $H_i$, nakon što je uslijedio A.
Označimo slovom D događaj čiju vjerojatnost tražimo: crvena kuglica uzeta je iz prve kutije.
Postavimo sljedeće hipoteze ovisno o izabranoj kutiji:

$$H_1=\{\text{kuglica je uzeta iz prve kutije}\}\ \Rightarrow\ P(H_1)=\frac{1}{2}=0.5.$$

$$H_2=\{\text{kuglica je uzeta iz druge kutije}\}\ \Rightarrow\ P(H_2)=\frac{1}{2}=0.5.$$

Ako se ostvari prva hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja D uz ovu hipotezu jednaka je

$$P(D\mid H_1)=\frac{\text{broj crvenih kuglica u prvoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u prvoj kutiji}}=\frac{10}{10+30}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0.25.$$

Ako se ostvari druga hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja D uz ovu hipotezu jednaka je

$$P\left(D \mid H_2\right)=\frac{\text{broj crvenih kuglica u drugoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u drugoj kutiji}}=\frac{20}{20+20}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}=0.5.$$

Vjerojatnost da smo crvenu kuglicu uzeli iz prve kutije pomoću Bayesove formule iznosi:

$$P\left(H_1 \mid D\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(D \mid H_1\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P\left(D \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(D \mid H_2\right)}=\frac{0.5\cdot 0.25}{0.5\cdot 0.25+0.5\cdot 0.5}=0.33.$$

Komentar:
Bayesovu formulu rabimo pri računanju aposteriornih vjerojatnosti pojedinih hipoteza. Pomoću nje vršimo preprocjenu vjerojatnosti hipoteza.

**Vježba 153**

Dvije su kutije pune kuglica. U prvoj ima 10 crvenih i 30 zelenih kuglica, a u drugoj je 20 crvenih i 20 zelenih kuglica. Nasumce uzmemo jednu kuglicu iz proizvoljne kutije, a to je baš zelena kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo zelenu kuglicu uzeli iz prve kutije?

**Rezultat:**

$$H_1=\{\text{kuglica je uzeta iz prve kutije}\}\ \Rightarrow\ P\left(H_1\right)=\frac{1}{2}=0.5.$$

$$H_2=\{\text{kuglica je uzeta iz druge kutije}\}\ \Rightarrow\ P\left(H_2\right)=\frac{1}{2}=0.5.$$

$$P\left(D \mid H_1\right)=\frac{\text{broj zelenih kuglica u prvoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u prvoj kutiji}}=\frac{30}{10+30}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}=0.75.$$

$$P\left(D \mid H_2\right)=\frac{\text{broj zelenih kuglica u drugoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u drugoj kutiji}}=\frac{20}{20+20}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}=0.5.$$

Vjerojatnost da smo zelenu kuglicu uzeli iz prve kutije pomoću Bayesove formule iznosi:

$$P\left(H_1 \mid D\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(D \mid H_1\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P\left(D \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(D \mid H_2\right)}=\frac{0.5\cdot 0.75}{0.5\cdot 0.75+0.5\cdot 0.5}=0.6.$$



**Zadatak 154 (Anamarija, gimnazija)**

Dvije su kutije pune kuglica. U prvoj ima 10 crvenih i 30 zelenih kuglica, a u drugoj je 20 crvenih i 20 zelenih kuglica. Nasumce uzmemo jednu kuglicu iz proizvoljne kutije, a to je baš crvena kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo crvenu kuglicu uzeli iz druge kutije?

**Rješenje 154**

Ponovimo!

Neka je $\left\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\right\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A\subset\Omega$ vrijedi

$$P(A)=P\left(H_1\right)\cdot P\left(A \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(A \mid H_2\right)+P\left(H_3\right)\cdot P\left(A \mid H_3\right)+\ ...\ +P\left(H_n\right)\cdot P\left(A \mid H_n\right).$$

Bayesova formula

Neka je $\left\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\right\}$ potpun sustav događaja i neka je $A\subseteq\Omega$ događaj takav da je P(A) > 0. Tada za svako i = 1, 2, 3, …, n vrijedi

$$P\left(H_i \mid A\right)=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A \mid H_i\right)}{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A \mid H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(A \mid H_2\right)+\ ...\ +P\left(H_n\right)\cdot P\left(A \mid H_n\right)}=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A \mid H_i\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(H_j\right)\cdot P\left(A \mid H_j\right)}.$$

Stanoviti događaj A dogodio se, znamo da je uslijedio kao posljedica jednog od n događaja $H_1$, $H_2$, $H_3$, …, $H_n$, od kojih se uzajamno po dva isključuju. Događaji $H_1$, $H_2$, $H_3$, …, $H_n$ zovu se uzroci ili hipoteze od A, a gornja formula daje vjerojatnost događaja $H_i$, nakon što je uslijedio A.
Označimo slovom D događaj čiju vjerojatnost tražimo: crvena kuglica uzeta je iz druge kutije.
Postavimo sljedeće hipoteze ovisno o izabranoj kutiji:

$$H_1 = \{\text{kuglica je uzeta iz prve kutije}\} \Rightarrow P(H_1) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

$$H_2 = \{\text{kuglica je uzeta iz druge kutije}\} \Rightarrow P(H_2) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Ako se ostvari prva hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja D uz ovu hipotezu jednaka je

$$P(D \mid H_1) = \frac{\text{broj crvenih kuglica u prvoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u prvoj kutiji}} = \frac{10}{10+30} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Ako se ostvari druga hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja D uz ovu hipotezu jednaka je

$$P(D \mid H_2) = \frac{\text{broj crvenih kuglica u drugoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u drugoj kutiji}} = \frac{20}{20+20} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Vjerojatnost da smo crvenu kuglicu uzeli iz druge kutije pomoću Bayesove formule iznosi:

$$P(H_2 \mid D) = \frac{P(H_2) \cdot P(D \mid H_2)}{P(H_1) \cdot P(D \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(D \mid H_2)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.5} = 0.67.$$

Komentar:
Bayesovu formulu rabimo pri računanju aposteriornih vjerojatnosti pojedinih hipoteza. Pomoću nje vršimo preprocjenu vjerojatnosti hipoteza.

**Vježba 154**

Dvije su kutije pune kuglica. U prvoj ima 10 crvenih i 30 zelenih kuglica, a u drugoj je 20 crvenih i 20 zelenih kuglica. Nasumce uzmemo jednu kuglicu iz proizvoljne kutije, a to je baš zelena kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo zelenu kuglicu uzeli iz druge kutije?

**Rezultat:**

$$H_1 = \{\text{kuglica je uzeta iz prve kutije}\} \Rightarrow P(H_1) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

$$H_2 = \{\text{kuglica je uzeta iz druge kutije}\} \Rightarrow P(H_2) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

$$P(D \mid H_1) = \frac{\text{broj zelenih kuglica u prvoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u prvoj kutiji}} = \frac{30}{10+30} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

$$P(D \mid H_2) = \frac{\text{broj zelenih kuglica u drugoj kutiji}}{\text{broj svih kuglica u drugoj kutiji}} = \frac{20}{20+20} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Vjerojatnost da smo zelenu kuglicu uzeli iz druge kutije pomoću Bayesove formule iznosi:

$$P(H_2 \mid D) = \frac{P(H_2) \cdot P(D \mid H_2)}{P(H_1) \cdot P(D \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(D \mid H_2)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5} = 0.4.$$

**Zadatak 155 (Dino, gimnazija)**

U tri žare nalaze se bijele i crne kuglice. U prvoj žari su 3 bijele i 1 crna, u drugoj 6 bijelih i 4 crne i u trećoj 9 bijelih i 1 crna. Iz slučajno izabrane žare nasumce (na sreću) je izabrana kuglica. Nađi vjerojatnost da je ona bijela.

**Rješenje 155**

Ponovimo!

Neka je $\{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) + \ ... \ + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n).$$

Označimo slovom A događaj čiju vjerojatnost tražimo: nasumce izabrana kuglica je bijela. Postavimo sljedeće hipoteze ovisno o izabranoj žari:

$$H_1 = \{\text{kuglica je uzeta iz prve žare}\} \Rightarrow P(H_1) = \frac{1}{3}.$$

$$H_2 = \{\text{kuglica je uzeta iz druge žare}\} \Rightarrow P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

$$H_3 = \{\text{kuglica je uzeta iz treće žare}\} \Rightarrow P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Ako se ostvari prva hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja A uz ovu hipotezu jednaka je

$$P(A \mid H_1) = \frac{\text{broj bijelih kuglica u prvoj žari}}{\text{broj svih kuglica u prvoj žari}} = \frac{3}{4}.$$

Ako se ostvari druga hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja A uz ovu hipotezu jednaka je

$$P(A \mid H_2) = \frac{\text{broj bijelih kuglica u drugoj žari}}{\text{broj svih kuglica u drugoj žari}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ako se ostvari treća hipoteza, uvjetna vjerojatnost događaja A uz ovu hipotezu jednaka je

$$P(A \mid H_3) = \frac{\text{broj bijelih kuglica u trećoj žari}}{\text{broj svih kuglica u trećoj žari}} = \frac{9}{10}.$$

Tada vjerojatnost da je izvučena bijela kuglica iznosi:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5+4+6}{20} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{20} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = 75\%.$$



**Vježba 155**

U tri žare nalaze se bijele i crne kuglice. U prvoj žari su 3 bijele i 1 crna, u drugoj 6 bijelih i 4 crne i u trećoj 9 bijelih i 1 crna. Iz slučajno izabrane žare nasumce (na sreću) je izabrana kuglica. Nađi vjerojatnost da je ona crna.

**Rezultat:** $\frac{1}{4} = 25\%.$

**Zadatak 156 (Vesna, gimnazija)**

Imamo pet bijelih i četiri crne kuglice te ih slažemo u niz, jednu do druge. Na koliko ih načina možemo složiti tako da crne kuglice ne budu jedna do druge pri čemu kuglice iste boje ne razlikujemo?

**Rješenje 156**

Ponovimo!

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0, k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo izrazom $\binom{n}{k}$ i definiramo ga ovako

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k},$$

za k ≥ 1, dok za k = 0 po definiciji stavljamo

$$\binom{n}{0} = 1.$$

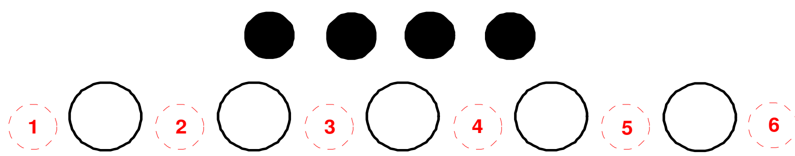
Izraz $\binom{n}{k}$ čita se: "n povrh (ili iznad) k".

Svojstvo simetrije:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodni broj ili nula takav da je r ≤ n. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r}.$$




Bijele kuglice poredamo u niz i ostavimo slobodna mjesta između njih, kao i na početku i na kraju. To je ukupno šest mjesta. Na svako od tih šest mjesta trebamo rasporediti jednu ili niti jednu crnu kuglicu. Broj mogućnosti iznosi (kombinacije 4 – tog razreda od 6 elemenata):

$$C_6^4 = \binom{6}{4} \Rightarrow [\text{svojstvo simetrije}] \Rightarrow C_6^4 = \binom{6}{2} \Rightarrow C_6^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \Rightarrow C_6^4 = 15.$$

**Vježba 156**

Imamo četiri bijele i tri crne kuglice te ih slažemo u niz, jednu do druge. Na koliko ih načina možemo složiti tako da crne kuglice ne budu jedna do druge pri čemu kuglice iste boje ne razlikujemo?

**Rezultat:** $C_5^3 = 10.$



**Zadatak 157 (Vesna, gimnazija)**

Imamo pet bijelih i četiri crne kuglice te ih slažemo u niz, jednu do druge. Na koliko ih načina možemo složiti tako da crne kuglice ne budu jedna do druge pri čemu kuglice iste boje razlikujemo?

**Rješenje 157**

Ponovimo!

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0, k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo izrazom $\binom{n}{k}$ i definiramo ga ovako

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k},$$

za k ≥ 1, dok za k = 0 po definiciji stavljamo

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Izraz $\binom{n}{k}$ čita se: "n povrh (ili iznad) k".

Svojstvo simetrije:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodni broj ili nula takav da je r ≤ n. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r}.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja

Ako element $s_1$ možemo izabrati iz skupa $S_1$ na $n_1$ različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element $s_2$ iz skupa $S_2$ na $n_2$ načina, nakon toga element $s_3$ iz skupa $S_3$ na $n_3$ načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

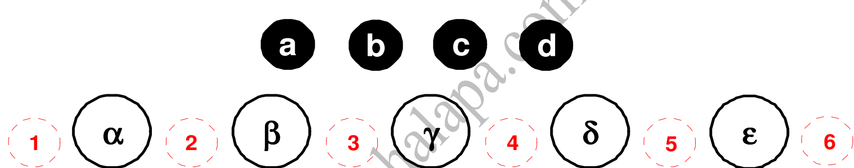
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na $n_1$ način, drugi dio posla na $n_2$ načina, …, posljednji na $n_k$ načina, onda se cijeli posao može učiniti na $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ načina.

Broj permutacija

Broj permutacija skupa od n različitih elemenata je:

$$P_n = n\,! \Rightarrow P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$






Budući da razlikujemo kuglice iste boje, onda se:

- pet bijelih kuglica može poredati u niz na (permutacije od 5 elemenata)

$$P_5 = 5\,! \Rightarrow P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \Rightarrow P_5 = 120 \text{ načina.}$$

- četiri crne kuglice može poredati u niz na (permutacije od 4 elementa)

$$P_4 = 4\,! \Rightarrow P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow P_4 = 24 \text{ načina.}$$

Bijele kuglice poredamo u niz i ostavimo slobodna mjesta između njih, kao i na početku i na kraju. To je ukupno šest mjesta. Na svako od tih šest mjesta trebamo rasporediti jednu ili niti jednu crnu kuglicu. Prema načelu uzastopnog prebrojavanja broj mogućnosti iznosi:

$$C_6^4 \cdot 5\,! \cdot 4\,! = \binom{6}{4} \cdot 5\,! \cdot 4\,! = [\text{svojstvo simetrije}] = \binom{6}{2} \cdot 5\,! \cdot 4\,! = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 120 \cdot 24 = 43200.$$

**Vježba 157**

Imamo četiri bijele i tri crne kuglice te ih slažemo u niz, jednu do druge. Na koliko ih načina možemo složiti tako da crne kuglice ne budu jedna do druge pri čemu kuglice iste boje razlikujemo?

**Rezultat:** $C_5^3 \cdot 4\,! \cdot 3\,! = 1440.$

**Zadatak 158 (Megy, gimnazija)**

Nađi vjerojatnost da slučajno izabrani dvoznamenkasti broj bude djeljiv barem ili s 3 ili sa 7.

**Rješenje 158**

Ponovimo!

Niz $(a_n)$ je aritmetički niz ako je svaki član niza počevši od drugog jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Broj članova n aritmetičkog niza dobije se iz formule

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

Neka je $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\} \subseteq \Omega$ proizvoljan događaj, onda vjerojatnost od A definiramo sa

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za događaj } A}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$

Ako sa n označimo broj svih elementarnih događaja, a sa m broj povoljnih događaja, tada je

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

klasična definicija vjerojatnosti slučajnog događaja A.
Vjerojatnost unije
Za bilo koja dva događaja A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Koliko ima dvoznamenkastih brojeva?

10, 11, 12, 13, 14, … , 97, 98, 99.

Uočimo da je to aritmetički niz za koji je: $a_1 = 10$, $d = 1$, $a_n = 99$.
Dvoznamenkastih brojeva ima:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{99 - 10}{1} + 1 = 89 + 1 = 90.$$

Koliko ima dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 3?

12, 15, 18, 21, 24, … , 93, 96, 99.

Uočimo da je to aritmetički niz za koji je: $a_1 = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.
Dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 3 ima:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{99 - 12}{3} + 1 = \frac{87}{3} + 1 = 29 + 1 = 30.$$

Koliko ima dvoznamenkastih brojeva djeljivih sa 7?

14, 21, 28, 35, 42, … , 84, 91, 98.

Uočimo da je to aritmetički niz za koji je: $a_1 = 14$, $d = 7$, $a_n = 98$.
Dvoznamenkastih brojeva djeljivih sa 7 ima:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{98 - 14}{7} + 1 = \frac{84}{7} + 1 = 12 + 1 = 13.$$

Koliko ima dvoznamenkastih brojeva djeljivih i s 3 i sa 7?

21, 42, 63, 84.

Dvoznamenkastih brojeva djeljivih i s 3 i sa 7 ima:

$$n = 4.$$

Neka su zadani sljedeći događaji i njihove vjerojatnosti:

- $A = \{\text{dvoznamenkasti broj djeljiv je s 3}\} \Rightarrow P(A) = \frac{30}{90}.$
- $B = \{\text{dvoznamenkasti broj djeljiv je sa 7}\} \Rightarrow P(A) = \frac{13}{90}.$

- $A \cap B = \{\text{dvoznamenkasti broj djeljiv je i s 3 i sa 7}\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{90}.$

Zato je:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{90} + \frac{13}{90} - \frac{4}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30} = 0.433.$$

**Vježba 158**

Nađi vjerojatnost da slučajno izabrani dvoznamenkasti broj ne bude djeljiv ni s 3, ni sa 7.

**Rezultat:** 0.567.

**Zadatak 159 (4A, TUPŠ)**

U razvoju binoma $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ odredi član sa $x^4$.

**Rješenje 159**

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$(-a)^{2 \cdot n} = a^{2 \cdot n}.$$

Binomni poučak

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

pri čemu član

$$\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

zovemo općim članom binomnog razvoja. To je (k + 1). član u razvoju. Na primjer,

$\binom{n}{3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3$ je četvrti član u razvoju,

$\binom{n}{8} \cdot a^{n-8} \cdot b^8$ je deveti član u razvoju,

$\binom{n}{19} \cdot a^{n-19} \cdot b^{19}$ je dvadeseti član u razvoju itd.

Opći član u binomnom prikazu zadanog binoma ima oblik:

$$\binom{12}{k} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{12-k} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^k = \binom{12}{k} \cdot \frac{x^{12-k}}{3^{12-k}} \cdot \frac{(-3)^k}{x^k} = \binom{12}{k} \cdot \frac{(-3)^k}{3^{12-k}} \cdot \frac{x^{12-k}}{x^k} = \binom{12}{k} \cdot \frac{(-3)^k}{3^{12-k}} \cdot x^{12-k} \cdot x^{-k} =$$

$$= \binom{12}{k} \cdot \frac{(-3)^k}{3^{12-k}} \cdot x^{12-k-k} = \binom{12}{k} \cdot \frac{(-3)^k}{3^{12-k}} \cdot x^{12-2 \cdot k}.$$

Budući da tražimo član sa $x^4$, slijedi:

$$x^{12-2 \cdot k} = x^4 \Rightarrow 12 - 2 \cdot k = 4 \Rightarrow -2 \cdot k = 4 - 12 \Rightarrow -2 \cdot k = -8 \,/ : (-2) \Rightarrow k = 4.$$

Traženi (peti) član glasi:

$$\binom{12}{4} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^8 \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^8}{3^8} \cdot \frac{3^4}{x^4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^8}{3^8} \cdot \frac{3^4}{x^4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{x^4}{3^4} = 11 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \frac{x^4}{81} = \frac{55}{9} \cdot x^4.$$

**Vježba 159**

U razvoju binoma $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ odredi član sa $x^{10}$.

**Rezultat:** $-\frac{4}{19683}\cdot x^{10}$.

**Zadatak 160 (4A, TUPŠ)**

U razvoju binoma $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ odredi član koji ne sadrži x.

**Rješenje 160**

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

$$(-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n} \quad , \quad a^0=1.$$

Binomni poučak

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n$$

pri čemu član

$$\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

zovemo općim članom binomnog razvoja. To je (k + 1). član u razvoju. Na primjer,

$\binom{n}{5}\cdot a^{n-5}\cdot b^5$ je šesti član u razvoju,

$\binom{n}{7}\cdot a^{n-7}\cdot b^7$ je osmi član u razvoju,

$\binom{n}{14}\cdot a^{n-14}\cdot b^{14}$ je petnaesti član u razvoju itd.

Opći član u binomnom prikazu zadanog binoma ima oblik:

$$\binom{12}{k}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{12-k}\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)^k=\binom{12}{k}\cdot\frac{x^{12-k}}{3^{12-k}}\cdot\frac{(-3)^k}{x^k}=\binom{12}{k}\cdot\frac{(-3)^k}{3^{12-k}}\cdot\frac{x^{12-k}}{x^k}=\binom{12}{k}\cdot\frac{(-3)^k}{3^{12-k}}\cdot x^{12-k}\cdot x^{-k}=$$

$$=\binom{12}{k}\cdot\frac{(-3)^k}{3^{12-k}}\cdot x^{12-k-k}=\binom{12}{k}\cdot\frac{(-3)^k}{3^{12-k}}\cdot x^{12-2\cdot k}.$$

Budući da tražimo član koji ne sadrži x, tj. mora biti $x^0$, slijedi:

$$x^{12-2\cdot k}=x^0 \Rightarrow 12-2\cdot k=0 \Rightarrow -2\cdot k=-12 \;/:(-2) \Rightarrow k=6.$$

Traženi (sedmi) član glasi:

$$\binom{12}{6}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^6\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)^6=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{x^6}{3^6}\cdot\frac{3^6}{x^6}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{x^6}{3^6}\cdot\frac{3^6}{x^6}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=$$

$$=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{3\cdot4\cdot5}=\frac{11\cdot10\cdot3\cdot8\cdot7}{4\cdot5}=\frac{11\cdot10\cdot3\cdot2\cdot7}{5}=11\cdot2\cdot3\cdot2\cdot7=924.$$

**Vježba 160**

U razvoju binoma $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^4$ odredi član koji ne sadrži x.

**Rezultat:** 6.