**Zadatak 221 (Tom, gimnazija)**

Dužina duljine a podijeljena je na tri dijela na slučajan način. Treba izračunati vjerojatnost da se od tih dijelova može konstruirati trokut.

**Rješenje 221**

Ponovimo!

$$a<b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\quad,\quad a>b\ \Rightarrow\ b<a\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog jednakokračnog trokuta duljine katete a iznosi:

$$P=\frac{a^2}{2}.$$

Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica.

$$a<b+c\quad,\quad b<a+c\quad,\quad c<a+b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Pokus je djelatnost (definiran proces, postupak mjerenja, opažanja, ...) iz koje izvire neki rezultat. Rezultat pokusa naziva se ishodom. Pokus je slučajan ako se u definiranim uvjetima može ponavljati, ako postoje barem dva različita ishoda te ako se ishodi ne mogu predvidjeti sa sigurnošću. Prostor elementarnih događaja Ω je skup svih mogućih različitih ishoda slučajnog pokusa. Događaj je elementaran ako se ne može rastaviti u jednostavnije događaje.
Stohastičkim pokusom nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Ishod takva pokusa zovemo elementarni događaj. Skup svih mogućih ishoda, svih elementarnih događaja, označavamo slovom Ω.
U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Vjerojatnost da na sreću odabrana točka unutar nekog skupa padne u neki njegov podskup jednaka je omjeru površina podskupa prema površini cijeloga skupa.
Neka je Ω ograničen podskup ravnine i m(Ω) njegova površina, a A podskup od Ω. Njegova je površina m(A). Kažemo da biramo točku na sreću unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo geometrijska vjerojatnost.
Ako dužinu duljine a podijelimo na tri dijela na slučajan način dobije se:

- x duljina prvog dijela
- y duljina drugog dijela
- z duljina trećeg dijela.

Budući da je

$$x+y+z=a,$$

slijedi

$$z=a-x-y$$

pa možemo zapisati:

- x duljina prvog dijela
- y duljina drugog dijela
- a – x – y duljina trećeg dijela.

Također vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ a-x-y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ a>x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ x+y<a \end{array}\right\}.$$

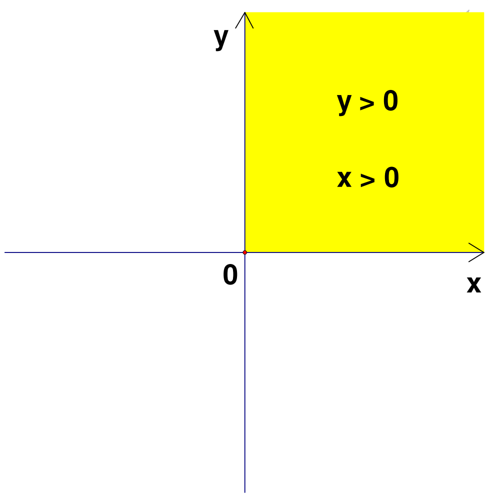
Trebamo odrediti prostor elementarnih događaja Ω našeg slučajnog pokusa. Njegovi ishodi bit će uređeni parovi (x, y) za koje vrijedi:

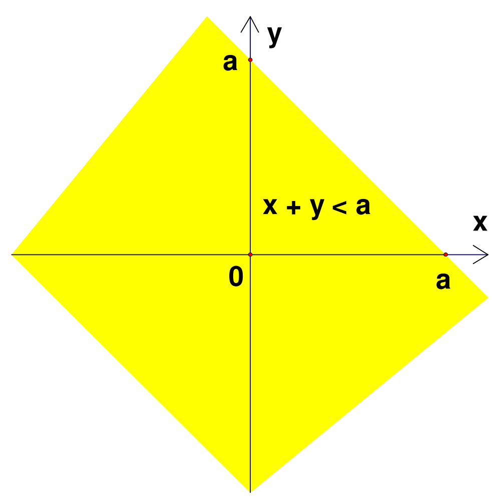
$$x>0 \quad , \quad y>0 \quad , \quad x+y<a.$$

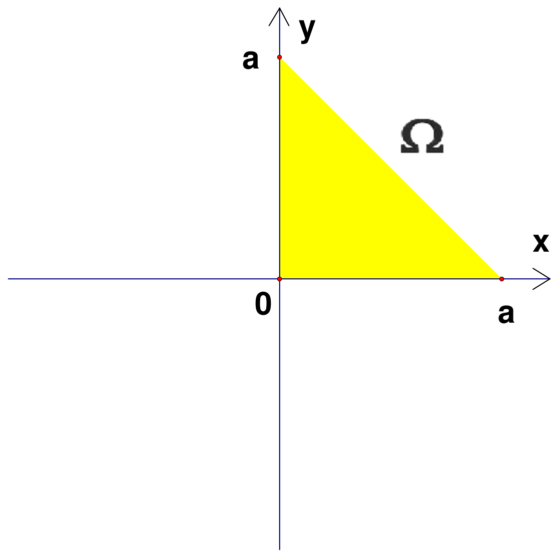
Zato ćemo skup Ω definirati sa

$$\Omega=\left\{(x,\ y)\in R^2 \mid x>0\ ,\ y>0\ ,\ x+y<a\right\}.$$








Skup Ω je nutrina jednakokračnog pravokutnog trokuta duljine kateta a. Kardinalni broj prostora elementarnih događaja Ω jednak je površini jednakokračnog pravokutnog trokuta duljine kateta a.

$$n = m(\Omega) = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Budući da je zbroj duljina dviju stranica u trokutu veći od duljine treće stranice, od duljina x, y i a – x – y možemo konstruirati trokut ako i samo ako vrijede sljedeće tri nejednakosti:



$$\left.\begin{array}{l} x+y>a-x-y \\ x+(a-x-y)>y \\ y+(a-x-y)>x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+x+y>a \\ x+a-x-y>y \\ y+a-x-y>x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x+2\cdot y>a \\ x+a-x-y>y \\ y+a-x-y>x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot(x+y)>a \\ a-y>y \\ a-x>x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

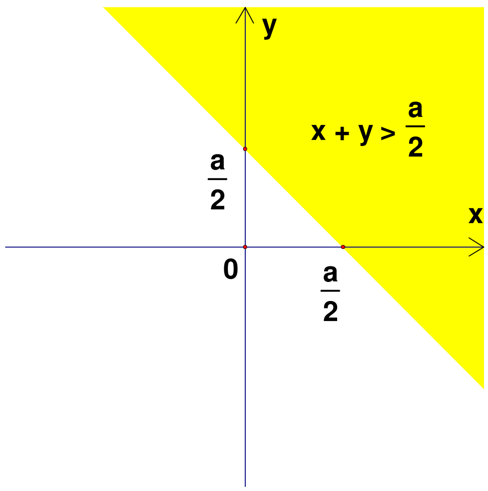
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot(x+y)>a \;/:2 \\ a>y+y \\ a>x+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y>\frac{a}{2} \\ a>2\cdot y \\ a>2\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y>\frac{a}{2} \\ 2\cdot y<a \\ 2\cdot x<a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y>\frac{a}{2} \\ 2\cdot y<a \;/:2 \\ 2\cdot x<a \;/:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y>\frac{a}{2} \\ y<\frac{a}{2} \\ x<\frac{a}{2} \end{array}\right\}.$$

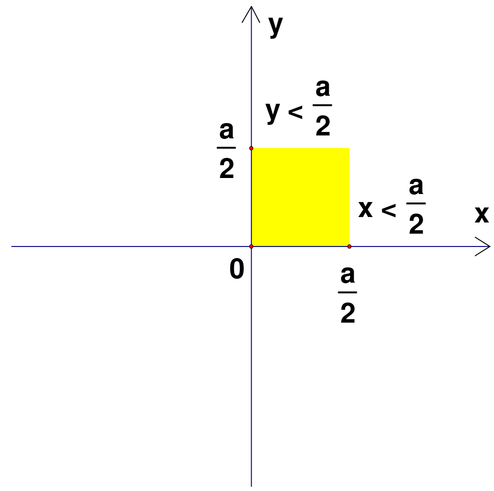
Trokut ćemo moći konstruirati ako i samo ako za uređene parove (x, y) vrijede uvjeti:

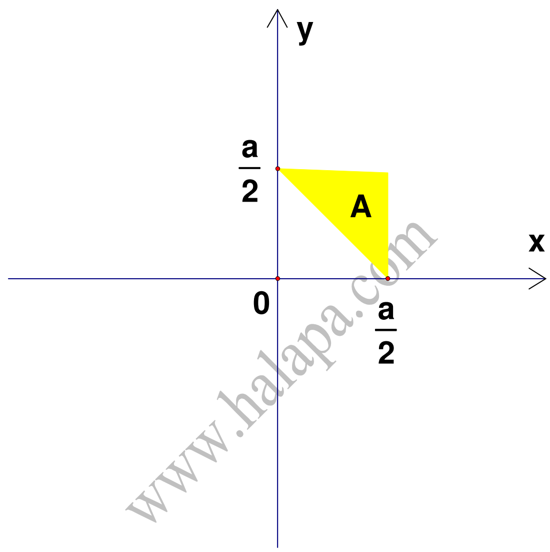
$$x+y>\frac{a}{2} \quad , \quad y<\frac{a}{2} \quad , \quad x<\frac{a}{2}.$$

Zato ćemo događaj A (skup A) definirati sa

$$A=\left\{ (x,\ y)\in R^2 \mid x+y>\frac{a}{2}\ ,\ y<\frac{a}{2}\ ,\ x<\frac{a}{2} \right\}.$$



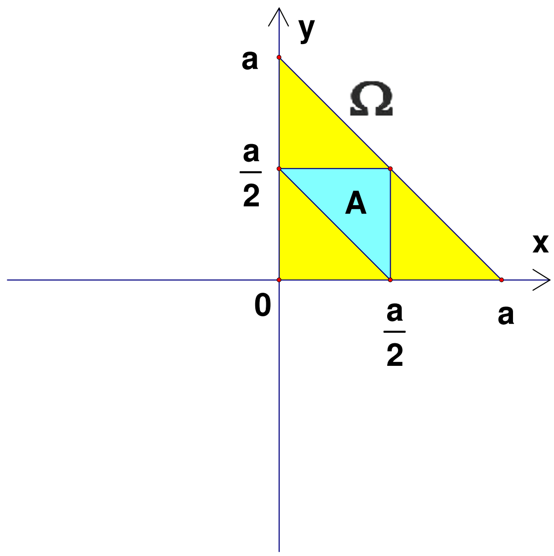



Događaj A (skup A) je nutrina jednakokračnog pravokutnog trokuta duljine kateta $\frac{a}{2}$. Kardinalni broj događaja A jednak je površini jednakokračnog pravokutnog trokuta duljine kateta $\frac{a}{2}$.

$$m = m(A) = \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{a^2}{8}.$$

Ako dužinu duljine a podijelimo na tri dijela na slučajan način vjerojatnost da se od tih dijelova može konstruirati trokut iznosi:

$$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}.$$




**Vježba 221**

Dužina duljine 7 podijeljena je na tri dijela na slučajan način. Treba izračunati vjerojatnost da se od tih dijelova može konstruirati trokut.

**Rezultat:** $\frac{1}{4}$.

**Zadatak 222 (Lorena, gimnazija)**

Koliko se signala može napraviti sa 5 različitih zastava, uzimajući ih jednu, dvije, tri, četiri ili pet zajedno?

**Rješenje 222**

Ponovimo!

Varijacije bez ponavljanja

Ako iz skupa od n elemenata biramo njih r (pri čemu je važan poredak) dobit ćemo varijacije bez ponavljanja od n elemenata r – tog razreda. Dakle, varijacija bez ponavljanja r – tog razreda u n – članom skupu je svaka uređena r – torka različitih elemenata.
Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata bez ponavljanja jednak je

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

Broj signala koji se može napraviti sa:

- jednom zastavom

$$V_1^5 = 5$$

- dvije zastave

$$V_2^5 = 5 \cdot 4 = 20$$

- tri zastave

$$V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

- četiri zastave

$$V_4^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

- pet zastava

$$V_5^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Ukupan broj signala iznosi:

$$V_1^5 + V_2^5 + V_3^5 + V_4^5 + V_5^5 = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325.$$

**Vježba 222**

Koliko se signala može napraviti sa 4 različite zastave, uzimajući ih jednu, dvije, tri ili četiri zajedno?

**Rezultat:** 64.

**Zadatak 223 (BMX, gimnazija)**

Kolika je vjerojatnost da potencija $2^n$, gdje je n slučajno izabran prirodan broj, završava znamenkom 2?

**Rješenje 223**

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Pokus je djelatnost (definiran proces, postupak mjerenja, opažanja, ...) iz koje izvire neki rezultat. Rezultat pokusa naziva se ishodom. Pokus je slučajan ako se u definiranim uvjetima može ponavljati, ako postoje barem dva različita ishoda te ako se ishodi ne mogu predvidjeti sa sigurnošću. Prostor elementarnih događaja Ω je skup svih mogućih različitih ishoda slučajnog pokusa. Događaj je elementaran ako se ne može rastaviti u jednostavnije događaje.
Stohastičkim pokusom nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Ishod takva pokusa zovemo elementarni događaj. Skup svih mogućih ishoda, svih elementarnih događaja, označavamo slovom Ω.
U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$



Napišemo li nekoliko prvih potencija broja 2 vidimo da se znamenka 2 pojavljuje s periodom 4.

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ 8192,\ 16384,\ \ldots$$

Prostor elementarnih događaja Ω je

$$\Omega = \{\text{perioda } 4\} \Rightarrow n = 4.$$

Neka je događaj

$$A = \{\text{znamenka 2 na kraju broja}\} \Rightarrow m = 1.$$

Tada je:

$$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = 0.25.$$

**Vježba 223**

Kolika je vjerojatnost da potencija $2^n$, gdje je n slučajno izabran prirodan broj, završava znamenkom 4?

**Rezultat:** 0.25.

**Zadatak 224 (Tina, gimnazija)**

Od a proizvoda njih k je neispravno. Nađite vjerojatnost da od b slučajno izabranih proizvoda točno c bude neispravno.

**Rješenje 224**

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element $s_1$ možemo izabrati iz skupa $S_1$ na $n_1$ različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element $s_2$ iz skupa $S_2$ na $n_2$ načina, nakon toga element $s_3$ iz skupa $S_3$ na $n_3$ načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na $n_1$ načina, drugi dio posla na $n_2$ načina, …, posljednji na $n_k$ načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \le n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Pokus je djelatnost (definiran proces, postupak mjerenja, opažanja, ...) iz koje izvire neki rezultat. Rezultat pokusa naziva se ishodom. Pokus je slučajan ako se u definiranim uvjetima može ponavljati, ako postoje barem dva različita ishoda te ako se ishodi ne mogu predvidjeti sa sigurnošću. Prostor elementarnih događaja Ω je skup svih mogućih različitih ishoda slučajnog pokusa. Događaj je elementaran ako se ne može rastaviti u jednostavnije događaje.

Stohastičkim pokusom nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Ishod takva pokusa zovemo elementarni događaj. Skup svih mogućih ishoda, svih elementarnih događaja, označavamo slovom Ω.



U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Od a proizvoda njih b možemo odabrati na

$$\binom{a}{b}$$

različitih načina. Dakle, prostor elementarnih događaja Ω ima ukupno

$$n = \binom{a}{b}$$

mogućih ishoda (rezultata).događaja.

Povoljni ishod (rezultat) je kada od:

- k neispravnih proizvoda uzmemo c
- a – k ispravnih proizvoda uzmemo b – c.

To je moguće učiniti, po načelu uzastopnog prebrojavanja, na

$$\binom{k}{c} \cdot \binom{a-k}{b-c}$$

različitih načina. Zato je broj povoljnih ishoda (rezultata) jednak

$$m = \binom{k}{c} \cdot \binom{a-k}{b-c}.$$

Tražena vjerojatnost iznosi:

$$P(A)=\frac{m}{n}\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{\binom{k}{c}\cdot\binom{a-k}{b-c}}{\binom{a}{b}}.$$

**Vježba 224**

Od 11 proizvoda njih 3 su neispravna. Nađite vjerojatnost da od 4 slučajno izabrana proizvoda točno 1 bude neispravan.

**Rezultat:** $P(A)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{3}}{\binom{11}{4}}.$

**Zadatak 225 (Nikša, gimnazija)**

Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 5, 7 i 8 kuglica?

**Rješenje 225**

Ponovimo!

$$\binom{n}{n}=1.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:
Ako element $s_1$ možemo izabrati iz skupa $S_1$ na $n_1$ različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element $s_2$ iz skupa $S_2$ na $n_2$ načina, nakon toga element $s_3$ iz skupa $S_3$ na $n_3$ načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ \ldots\ \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na $n_1$ načina, drugi dio posla na $n_2$ načina, …, posljednji na $n_k$ načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ \ldots\ \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja
Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r\le n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r}.$$

Permutacije sa ponavljanjem
Ako je zadano n elemenata, jedan element se ponavlja r puta ($r < n$), a drugi element se ponavlja s puta ($s < n$) tada se permutacije sa ponavljanjem računaju po formuli:

$$P_n^{r,\,s}=\frac{n!}{r!\cdot s!}.$$

Broj načina na koji se može n različitih predmeta podijeliti na k osoba (skupina), ali tako da prva dobije $n_1$ predmeta, druga $n_2$ predmeta, … , posljednja $n_k$ predmeta, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, računa se po formuli:

$$N=\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}}\cdot\binom{n_k}{n_k}$$

ili

$$N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

1.inačica

Dvadeset kuglica je zadano. Pet kuglica koje će pripasti prvoj skupini biramo na $\binom{20}{5}$ načina. Nakon toga ostalo je 15 kuglica, (20 – 5). Sedam kuglica koje će pripasti drugoj skupini biramo na $\binom{15}{7}$ načina. Nakon toga ostalo je 8 kuglica, (15 – 7). Osam kuglica koje će pripasti trećoj skupini biramo na $\binom{8}{8}$ načina. Ukupan broj različitih podjela je

$$N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{8} \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot 1 \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \Rightarrow N = 99768240.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} n = 20 \\ n_1 = 5 \\ n_2 = 7 \\ n_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[ N = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \right] \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{20-5}{7} \cdot \binom{20-5-7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{8} \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot 1 \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \Rightarrow N = 99768240.$$

3.inačica

$$\left.\begin{array}{l} n = 20 \\ n_1 = 5 \\ n_2 = 7 \\ n_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[ N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \right] \Rightarrow N = \frac{20!}{5! \cdot 7! \cdot 8!} \Rightarrow N = 99768240.$$



**Vježba 225**

Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 8, 7 i 5 kuglica?

**Rezultat:** 99768240.