Zadatak 001 (Sanja, gimnazija)

Odredi realnu funkciju f(x) ako je

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}.$$

Rješenje 001

Uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli)

$$x+\frac{1}{x}=t.$$

Kvadriramo:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2 \Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Uvrstimo novu varijablu u funkciju: $f(t) = t^2 - 2$.

Dobili smo traženu funkciju

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Vježba 001

Odredi realnu funkciju f(x) ako je f(x + 1) = x + 2.

Rezultat: f(x) = x + 1.

Zadatak 002 (Sanja, gimnazija)

Odredi inverznu funkciju $f^{-1}(x)$ ako je

$$f(x)=\frac{3^x+2}{3^x+1}.$$

Rješenje 002

Napišimo zadanu funkciju tako da umjesto f(x) pišemo y:

$$y=\frac{3^x+2}{3^x+1}.$$

Sada u funkciji zamijenimo slova x i y:

$$x \leftrightarrow y,$$

$$x=\frac{3^y+2}{3^y+1}.$$

Iz dobivene funkcije trebamo izračunati nepoznanicu y. Prvo ćemo cijelu jednadžbu pomnožiti zajedničkim nazivnikom $3^y + 1$:

$$x=\frac{3^y+2}{3^y+1} \;/\cdot\left(3^y+1\right) \Rightarrow x\cdot\left(3^y+1\right)=3^y+2 \Rightarrow$$

[x množi cijelu zagradu]

$$\Rightarrow x\cdot 3^y+x=3^y+2 \Rightarrow$$

[na lijevu stranu prebacimo nepoznanicu y]

$$\Rightarrow x\cdot 3^y-3^y=2-x \Rightarrow$$

[izlučimo 3^y]

$$\Rightarrow 3^y\cdot(x-1)=2-x \;/:(x-1) \Rightarrow 3^y=\frac{2-x}{x-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ [jednadžbu logaritmiramo logaritmom po bazi 3] $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 3^y = \frac{2-x}{x-1} \ / \log_3 \Rightarrow \log_3 3^y = \log_3 \frac{2-x}{x-1} \Rightarrow \left[\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot \log_3 3 = \log_3 \frac{2-x}{x-1} \Rightarrow y \cdot 1 = \log_3 \frac{2-x}{x-1} \Rightarrow y = \log_3 \frac{2-x}{x-1}.$$

Na kraju ponovno umjesto y napišemo $f^{-1}(x)$ pa rješenje glasi:

$$f^{-1}(x) = \log_3 \frac{2-x}{x-1}.$$

Vježba 002

Odredi inverznu funkciju $f^{-1}(x)$ ako je

$$f(x) = \frac{2^x + 3}{2^x + 5}.$$

Rezultat: $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{3-5x}{x-1}.$

Zadatak 003 (Mira, gimnazija)

Nacrtaj graf funkcije

$$f(x) = 2\sin(2x - \pi).$$

Rješenje 003

Podsjetimo se svojstava funkcije f(x) = sin x:

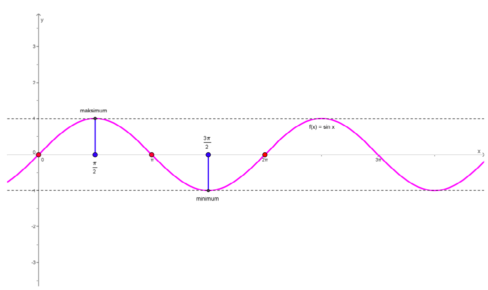
- Period funkcije sinus je 2π.
- Nultočke (točke u kojima graf siječe x-os ili apscisu) su 0, π, 2π, 3π, ..., tj. $k\pi$, k je cijeli broj. Mi ćemo samo promatrati dio grafa na segmentu $[0, 2\pi]$.
- Maksimum funkcije je u

$$\frac{\pi}{2}$$

i iznosi +1.
- Minimum funkcije je u

$$\frac{3\pi}{2}$$

i iznosi – 1.



Zadana funkcija f(x) = 2sin(2x – π) ima amplitudu 2 što znači da će maksimum biti + 2, a minimum – 2.

Nultočke funkcije nađemo tako da vrijednost argumenta 2x – π izjednačimo s nultočkama funkcije sinus: 0, π, 2π.

$$2x - \pi = 0 \Rightarrow 2x = \pi \ / :2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2},$$

$$2x - \pi = \pi \Rightarrow 2x = \pi + \pi \Rightarrow 2x = 2\pi \ / :2 \Rightarrow x = \pi,$$

$$2x - \pi = 2\pi \Rightarrow 2x = 2\pi + \pi \Rightarrow 2x = 3\pi \ / :2 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}.$$

Nultočke naše funkcije su:

$$\frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}.$$

Funkcija sinus imala je maksimum u točki

$$\frac{\pi}{2}.$$

Sada argument 2x – π zadane funkcije izjednačimo s

$$\frac{\pi}{2}$$

pa je

$$2x-\pi=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2x=\frac{\pi}{2}+\pi \;\Rightarrow\; 2x=\frac{3\pi}{2} \;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{3\pi}{4}.$$

Dakle, funkcija f(x) = 2sin(2x – π) ima maksimum u

$$\frac{3\pi}{4}$$

koji iznosi + 2.

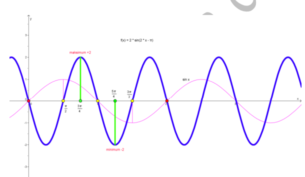
Analogno je za minimum:

$$2x-\pi=\frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2x=\frac{3\pi}{2}+\pi \;\Rightarrow\; 2x=\frac{5\pi}{2} \;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{5\pi}{4}.$$

Dakle, funkcija f(x) = 2sin(2x – π) ima minimum u

$$\frac{5\pi}{4}$$

koji iznosi – 2.

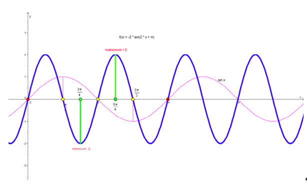


Vježba 003

Nacrtaj graf funkcije

f(x) = – 2sin(2x – π).

Rezultat:



Zadatak 004 (Mira, gimnazija)

Nacrtaj graf funkcije

f(x) = 2cos(2x – π).

Rješenje 004

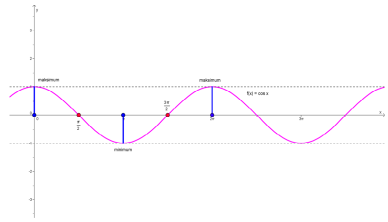
Podsjetimo se svojstava funkcije f(x) = cos x:

- Period funkcije kosinus je 2π.
- Nultočke (točke u kojima graf siječe x-os ili apscisu) su

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \text{ tj. } (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ k je cijeli broj}$$

Mi ćemo samo promatrati dio grafa na segmentu [0 , 2π].

- Maksimum funkcije je u 0 i 2π i iznosi +1.
- Minimum funkcije je u π i iznosi – 1.



Zadana funkcija f(x) = 2cos(2x – π) ima amplitudu 2 što znači da će maksimum biti + 2, a minimum – 2.

Nultočke funkcije nađemo tako da vrijednost argumenta 2x – π izjednačimo s nultočkama funkcije kosinus:

$$\frac{\pi}{2} \text{ i } \frac{3\pi}{2}.$$

$$2x-\pi=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2x=\frac{\pi}{2}+\pi \;\Rightarrow\; 2x=\frac{3\pi}{2}\;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{3\pi}{4},$$

$$2x-\pi=\frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2x=\frac{3\pi}{2}+\pi \;\Rightarrow\; 2x=\frac{5\pi}{2}\;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{5\pi}{4}.$$

Nultočke naše funkcije su:

$$\frac{3\pi}{4}\; i\; \frac{5\pi}{4}.$$

Funkcija kosinus imala je maksimum u točkama 0 i 2π. Sada argument 2x – π zadane funkcije izjednačimo s 0 i 2π:

$$2x-\pi=0 \;\Rightarrow\; 2x=\pi\;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2},$$

$$2x-\pi=2\pi \;\Rightarrow\; 2x=2\pi+\pi \;\Rightarrow\; 2x=3\pi\;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{3\pi}{2}.$$

Dakle, funkcija f(x) = 2cos(2x – π) ima maksimume u

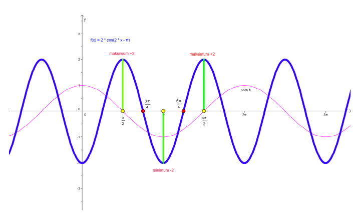
$$\frac{\pi}{2}\; i\; \frac{3\pi}{2}$$

koji iznose + 2.

Analogno je za minimum:

$$2x-\pi=\pi \;\Rightarrow\; 2x=\pi+\pi \;\Rightarrow\; 2x=2\pi\;/:2 \;\Rightarrow\; x=\pi.$$

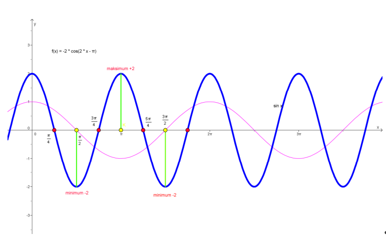
Dakle, funkcija f(x) = 2cos(2x – π) ima minimum u π koji iznosi – 2.



Vježba 004

Nacrtaj graf funkcije : f(x) = – 2cos(2x – π).

Rezultat:



.

Zadatak 005 (Petra, gimnazija)

Odredi temeljni period funkcije: f(x) = sin x · sin 3x.

Rješenje 005

Funkcija f je periodička s periodom P (P ≠ 0), ako za svaki x vrijedi: Ako je funkcija f definirana u jednoj od točaka x, x + P, onda je definirana u obje te točke i vrijedi

$$f(x + P) = f(x).$$

Broj P zove se period funkcije f. Najmanji pozitivni period funkcije f (ako postoji) zove se **temeljni period** funkcije f.

Ako je P period zadane funkcije, onda mora vrijediti:

$$\sin(x + P) \cdot \sin 3(x + P) = \sin x \cdot \sin 3x.$$

Ova jednakost vrijedi za svaki x pa specijalno za x = 0 dobivamo:

$$\sin(0 + P) \cdot \sin 3(0 + P) = \sin 0 \cdot \sin(3 \cdot 0),$$

$$[\sin 0 = 0]$$

$$\sin P \cdot \sin 3P = 0.$$

Produkt dva broja jednak je nuli ako je barem jedan od brojeva jednak nuli.

Zato pišemo:

$$\sin P = 0\ ,\ \sin 3P = 0.$$

Jednadžba sin P = 0 daje rješenja $P_1 = k\pi$. Jednadžba sin 3P = 0 daje rješenja

$$P_2 = \frac{k \cdot \pi}{3}.$$

Broj k je prirodan broj. Provjeravanjem za

$$P = \frac{\pi}{3}\ \text{i}\ P = \frac{2\pi}{3}$$

vidimo da nisu periodi. Temeljni period zadane funkcije je P = π.

Vježba 005

Odredi temeljni period funkcije: f(x) = cos 2x.

Rezultat: P = π.

Zadatak 006 (Martina, gimnazija)

Nacrtaj graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

Rješenje 006

Crtanje grafa funkcije pokazat ćemo kroz sve faze.

I. DOMENA FUNKCIJE

Moramo naći vrijednosti x za koje funkcija f(x) nije definirana i njih izbaciti iz skupa **R**. Budući da je to racionalna funkcija nazivnik ćemo izjednačiti s nulom i riješiti dobivenu jednadžbu:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Domena je skup **R,** osim brojeva – 1 i 1. Pišemo:

$$D(f) = R \setminus \{-1, 1\}.$$

II. PARNOST FUNKCIJE

Provjerimo je li zadana funkcija parna, neparna ili nije ni jedno, ni drugo.
Za parne funkcije vrijedi: **f(– x) = f(x)**, gdje su – x i x iz domene.

Za neparne funkcije vrijedi: **f(– x) = – f(x)**, gdje su – x i x iz domene.
Računamo:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{(-x)^2-1}=\frac{x^2-4}{x^2-1}=f(x).$$

Funkcija f(x) je parna, a to znači da je njezin graf simetričan s obzirom na y-os ili ordinatu.

III. INTERVALI MONOTONOSTI FUNKCIJE

Ako je funkcija f(x) neprekinuta na segmentu [a,b] i f '(x) > 0 za a < x < b, tada je f(x) monotono rastuća (uzlazna).
Ako je funkcija f(x) neprekinuta na segmentu [a,b] i f '(x) < 0 za a < x < b, tada je f(x) monotono padajuća (silazna).
Tražimo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)'\cdot(x^2-1)-(x^2-4)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}.$$

$$Ako\ \ je\ \ f'(x)>0,\ \text{slijedi}\ \frac{6x}{(x^2-1)^2}>0.$$

Razlomak je pozitivan ako su brojnik i nazivnik oba pozitivni ili oba negativni. U našem slučaju nazivnik je na kvadrat pa je to uvijek pozitivno. Znači da i brojnik mora biti pozitivan: 6x > 0 => x > 0. Prema tome, za x > 0 funkcija je monotono rastuća.

$$Ako\ \ je\ \ f'(x)<0,\ \text{slijedi}\ \frac{6x}{(x^2-1)^2}<0.$$

Razlomak je negativan ako je brojnik negativan, a nazivnik pozitivan ili ako je brojnik pozitivan, a nazivnik negativan. U našem slučaju nazivnik je na kvadrat pa je to uvijek pozitivno. Znači da brojnik mora biti negativan: 6x < 0 => x < 0. Prema tome, za x < 0 funkcija je monotono padajuća.

IV. NULTOČKE FUNKCIJE

Nultočke funkcije jesu točke u kojima graf funkcije siječe x-os ili apscisu. Budući da je to racionalna funkcija brojnik ćemo izjednačiti s nulom i riješiti dobivenu jednadžbu:

$$x^2-4=0\ \Rightarrow\ x^2=4\ \Rightarrow\ x^2=4\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm\sqrt{4}\ \Rightarrow\ x_1=-2,\ x_2=2.$$

Funkcija ima dvije nultočke $N_1(-2, 0)$ i $N_2(2, 0)$.

V. EKSTREMI FUNKCIJE

Ekstremi funkcije mogu biti maksimum ili minimum ili oboje. Moramo najprije naći prvu derivaciju:

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)'\cdot(x^2-1)-(x^2-4)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}.$$

Sada prvu derivaciju izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu.

$$\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0\ \Rightarrow\ \left[\text{razlomak je jednak nuli, ako je brojnik jednak nuli}\right]\ \Rightarrow\ 6x=0\ \Rightarrow\ x=0.$$

Rješenje je x = 0. Ta se točka zove stacionarna točka. Hoće li u njoj biti maksimum ili minimum, znat ćemo ako nađemo drugu derivaciju. U drugu derivaciju uvrstimo x = 0. Ako je druga derivacija pozitivna, funkcija ima minimum, ako je pak druga derivacija negativna, funkcija ima maksimum.

$$f''(x)=\frac{(6x)'\cdot\left(x^2-1\right)^2-6x\cdot\left(\left(x^2-1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^2}=\frac{6\cdot\left(x^2-1\right)^2-6x\cdot2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left[6\cdot\left(x^2-1\right)-24x^2\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{6\cdot\left(x^2-1\right)-24x^2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Uvrstimo x = 0:

$$f''(0)=\frac{6\cdot\left(0^2-1\right)-24\cdot0^2}{\left(0^2-1\right)^3}=\frac{-6}{-1}=6 \rangle\ 0.$$

Dakle, druga derivacija je pozitivna pa funkcija u točki x = 0 ima minimum. Vrijednost minimuma dobit ćemo tako da x = 0 uvrstimo u zadanu funkciju:

$$f(0)=\frac{0^2-4}{0^2-1}=\frac{-4}{-1}=4.$$

Minimum će biti u točki M(0, 4).

VI. VERTIKALNE ASIMPTOTE

Ako postoji takav broj a da je

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

onda je pravac x = a asimptota (*vertikalna asimptota*).

Budući da je to racionalna funkcija:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$$

nazivnik ćemo izjednačiti s nulom i riješiti dobivenu jednadžbu:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x^2=1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1} \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1.$$

Vertikalne asimptote su pravci: x = – 1 i x = 1.

VII. KOSE ASIMPTOTE

Ako postoje limesi

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

gdje je k koeficijent smjera i

$$l=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right],$$

gdje je l odsječak na y-osi,

tada je pravac y = kx + l asimptota (desna kosa asimptota). Ako je k = 0, onda je to desna horizontalna asimptota.

Ako postoje limesi

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},$$

gdje je k koeficijent smjera i

$$l=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right],$$

gdje je l odsječak na y-osi,

tada je pravac y = kx + l asimptota (lijeva kosa asimptota). Ako je k = 0, onda je to lijeva horizontalna asimptota.

Graf funkcije y = f(x) (pretpostavljamo da je funkcija jednoznačna) ne može imati više od jedne desne (kose ili horizontalne) niti više od jedne lijeve (kose ili horizontalne)asimptote.

Tražimo koeficijent smjera k.

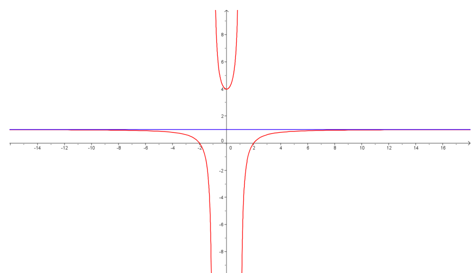
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x^2-1}}{x}.$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x^2-1}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1-0}=\frac{0}{1}=0.$$

Računamo odsječak na y-osi l.

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-4}{x^2-1}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{1-0}=\frac{1}{1}=1.$$

Asimptota je pravac y = 1.

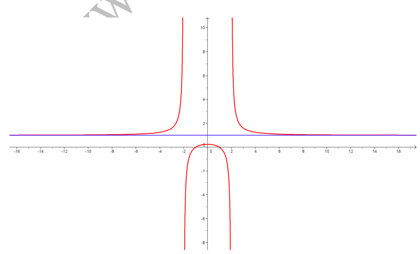


Vježba 006

Nacrtaj graf funkcije

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}.$$

Rezultat:



Zadatak 007 (Darjan, medicinska škola)

Nacrtaj graf funkcije

$$f(x)=-\frac{3}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right).$$

Rješenje 007

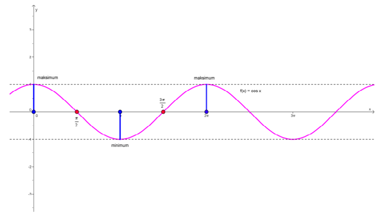
Podsjetimo se svojstava funkcije f(x) = cos x:

- Period funkcije kosinus je 2π.
- Nultočke (točke u kojima graf siječe x-os ili apscisu) su

$$\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ \ldots\ ,\ \text{tj.}\ (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\ \text{k je cijeli broj}$$

Mi ćemo samo promatrati dio grafa na segmentu $[0\ ,\ 2\pi]$.

- Maksimum funkcije je u 0 i 2π i iznosi +1.
- Minimum funkcije je u π i iznosi – 1.



Zadana funkcija

$$f(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x + \frac{5\pi}{2})$$

ima amplitudu

$$-\frac{3}{2}$$

što znači da će maksimum biti

$$\frac{3}{2},$$

a minimum

$$-\frac{3}{2}.$$

Nultočke funkcije nađemo tako da vrijednost argumenta

$$x + \frac{5\pi}{2}$$

izjednačimo s nultočkama funkcije kosinus:

$$\frac{\pi}{2} \text{ i } \frac{3\pi}{2}.$$

$$x + \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{2} = -2\pi,$$

$$x + \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{2} = -\pi.$$

Nultočke naše funkcije su:

$$-2\pi, -\pi.$$

Funkcija kosinus je imala maksimum u točkama 0 i 2π (to će sada biti minimum zbog negativne amplitude). Sada argument

$$x + \frac{5\pi}{2}$$

zadane funkcije izjednačimo s 0 i 2π:

$$x + \frac{5\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{2},$$

$$x + \frac{5\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi - \frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Dakle, funkcija

$$f(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x + \frac{5\pi}{2})$$

ima minimum u

$$-\frac{5\pi}{2} \text{ i } -\frac{\pi}{2}$$

koji iznosi

$$-\frac{3}{2}.$$

Analogno je za maksimum:

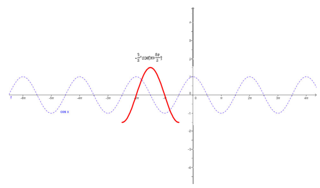
$$x+\frac{5\pi}{2}=\pi \;\Rightarrow\; x=\pi-\frac{5\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2}.$$

Dakle, funkcija ima maksimum u

$$-\frac{3\pi}{2}$$

koji iznosi

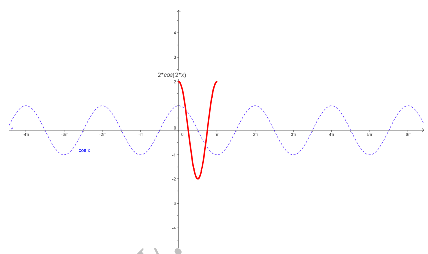
$$\frac{3}{2}.$$



Vježba 007

Nacrtaj graf funkcije: $f(x)=2\cdot\cos(2x)$.

Rezultat:



Zadatak 008 (Ivana, gimnazija)

Odredi domenu funkcije

$$f(x)=\frac{x+3}{3x-6}.$$

Rješenje 008

Domenu razlomljene linearne funkcije čine svi realni brojevi za koje je nazivnik različit od nule. Zato ćemo polinom u nazivniku izjednačiti s nulom, riješiti jednadžbu i rješenje "izbaciti" iz skupa R:

3x – 6 = 0 => 3x = 6 **/ : 3** **=>** x = 2. ($x \neq 2$)

$$D(f)=R\setminus\{2\}.$$

Vježba 008

Odredi domenu funkcije

$$f(x)=\frac{x-2}{5x-15}.$$

Rezultat: $D(f)=R\setminus\{3\}.$

Zadatak 009 (Ivana, gimnazija)

Prevedi u eksplicitni oblik: 2x – 3xy + 4y – 5 = 0.

Rješenje 009

Ako se funkcija može napisati u obliku y = f(x) kažemo da ima eksplicitni oblik. Iz zadane jednadžbe izračunamo y:

2x – 3xy + 4y – 5 = 0 => – 3xy + 4y = – 2x + 5 / · (– 1) **=>** 3xy – 4y = 2x – 5 =>

$$\Rightarrow \quad y \cdot (3x - 4) = 2x - 5 \quad / : (3x - 4) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2x-5}{3x-4}.$$

Vježba 009

Prevedi u eksplicitni oblik: $5x - 2xy + 7y - 3 = 0$.

Rezultat: $y = \frac{5x-3}{2x-7}.$

Zadatak 010 (Ivana, gimnazija)

Odredi domenu funkcije:

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{3x-x^2}.$$

Rješenje 010

Domena logaritamske funkcije $y = \log x$ skup je svih pozitivnih realnih brojeva:

$$D(\log x) = \langle 0, +\infty \rangle.$$

Budući da je u brojniku logaritamska funkcija, bit će:

$$2x - 3 > 0,$$

$$2x > 3 \quad / : 2$$

$$x > \frac{3}{2}.$$

Znači da je domena funkcije $\log(2x - 3)$ interval:

$$\left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle.$$

U nazivniku je polinom drugog stupnja. Nazivnik ne smije biti jednak nuli ni za koji x (jer se s nulom ne može dijeliti). Zato izraz u nazivniku izjednačimo s nulom, riješimo jednadžbu i rezultate "izbacimo" iz skupa R:

$$3x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (3 - x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0}] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad , \quad 3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3. \quad (x_1 \neq 0 \quad , \quad x_2 \neq 3)$$

Domena zadane funkcije je:

$$D(f) = \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle \setminus \{3\}$$

ili

$$D(f) = \left\langle \frac{3}{2}, 3 \right\rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

Vježba 010

Odredi domenu funkcije:

$$f(x) = \frac{\log(2x-6)}{7x-x^2}.$$

Rezultat: $\langle 3, +\infty \rangle \setminus \{7\}.$

Zadatak 011 (Tonka, ekonomska škola)

Za funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 2$ i $g(x) = 4x + 1$ odredite $f \circ g$.

Rješenje 011

Funkcija f zadana je analitičkim izrazom pa vrijedi:

$$f(x) = x^2 - 5x + 2,$$

$$f(a) = a^2 - 5a + 2 \quad , \quad f(-b) = (-b)^2 - 5 \cdot (-b) + 2 \quad , \quad f(a + b) = (a + b)^2 - 5 \cdot (a + b) + 2,$$

$$f(ab + c) = (ab + c)^2 - 5 \cdot (ab + c) + 2 \quad , \quad f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5 \cdot \frac{a}{b} + 2,$$

Slično je i za funkciju g:

$$g(x) = 4x + 1 \quad , \quad g(a) = 4a + 1 \quad , \quad g(-b) = 4 \cdot (-b) + 1 \quad , \quad g(a + b) = 4 \cdot (a + b) + 1,$$

$$g(ab + c) = 4 \cdot (ab + c) + 1 \quad , \quad g\left(\frac{a}{b}\right) = 4 \cdot \frac{a}{b} + 1.$$

Kompozicija funkcija $f \circ g$ tada je jednaka:

$(f \circ g)(x) = f(\mathbf{g(x)}) = f(\mathbf{4x + 1}) = (\mathbf{4x + 1})^2 - 5 \cdot (\mathbf{4x + 1}) + 2 = 16x^2 + 8x + 1 - 20x - 5 + 2 = 16x^2 - 12x - 2.$

Možemo računati i ovako:

$$(f \circ g)(x) = f(\mathbf{g(x)}) = [\mathbf{g(x)}]^2 - 5 \cdot \mathbf{g(x)} + 2 = [\mathbf{4x + 1}]^2 - 5 \cdot (\mathbf{4x + 1}) + 2 = 16x^2 + 8x + 1 - 20x - 5 + 2 =$$
$$= 16x^2 - 12x - 2.$$

Vježba 011

Za funkcije $f(x) = x^2 + 2x + 1$ i $g(x) = x - 1$ odredite $f \circ g$.

Rezultat: x^2.

Zadatak 012 (Ines, gimnazija)

Koliki je zbroj nultočaka funkcije

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1?$$

Rješenje 012

Budući da je to polinom četvrtog stupnja, bit će četiri nultočke. Najjednostavnije do rješenja dođemo uporabom Vièteovih formula:

Neka je $f(x) = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + a_3 \cdot x^{n-3} + ... + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n$ polinom, a $x_1, x_2, x_3, ... , x_n$ njegove nultočke. Tada vrijede Vièteove formule:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = - a_1}$$

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + ... + x_1 \cdot x_n + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + ... + x_{n-1} \cdot x_n = a_2}$$

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + ... + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n = - a_3}$$

$$\mathbf{...}$$

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_n}$$

Ako polinom $f(x)$ nije normiran, tj. ako mu je najstariji koeficijent $a_0 \neq 1$, onda na desnim stranama umjesto a_i treba pisati $\frac{a_i}{a_0}$. Za polinom četvrtog stupnja

$$f(x) = x^4 + a_1 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x + a_4$$

Vièteove formule glase:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = - a_1}$$

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = a_2}$$

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = - a_3}$$

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = a_4}.$$

U našem zadatku

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

koeficijenti su

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = 1$$

pa je

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1 = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Zbroj nultočaka jednak je $\frac{1}{2}$.

Vježba 012

Koliki je zbroj nultočaka funkcije: $f(x) = x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 8$?

Rezultat: -6.

Zadatak 013 (Ines, gimnazija)

Ako je $x = 2$ nultočka polinoma $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, odredi njezinu kratnost.

Rješenje 013

Uvjerimo se da je $x = 2$ nultočka zadanog polinoma $f(x)$:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,$$

$$f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 = 8 - 20 + 16 - 4 = 24 - 24 = 0.$$

Dobili smo $f(2) = 0$, što znači da je $x = 2$ nultočka polinoma $f(x)$.

Polinom $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ može se napisati kao $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$, gdje su x_1, x_2, x_3 nultočke zadanog polinoma. Pišemo:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3).$$

Sada polinom $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ podijelimo polinomom $x - 2$. [Kako se dijele polinomi pogledajte [Zadatak 001 i Zadatak 004]

$$\left(x^3 - 5x^2 + 8x - 4\right) : (x - 2) = x^2 - 3x + 2$$

$$\pm x^3 \mp 2x^2$$

$$-3x^2 + 8x$$

$$\mp 3x^2 \pm 6x$$

$$2x - 4$$

$$\pm 2x \mp 4$$

$$0$$

Do polinoma $x^2 - 3x + 2$ možemo doći i na sljedeći način [uporabom teorema o jednakosti dva polinoma:

Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.]

Napišimo:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2) \cdot (x^2 + ax + b),$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 + ax^2 + bx - 2x^2 - 2ax - 2b,$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 2a)x - 2b,$$

$$\left.\begin{aligned} a-2&=-5\\ b-2a&=8\\ -2b&=-4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a&=-3\\ b&=2\end{aligned}\right\}.$$

Dakle polinom glasi

$$x^2 + ax + b = x^2 - 3x + 2.$$

Nađimo nultočke polinoma $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad x_3 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Ponovno je broj 2 nultočka. Dakle, $x = 2$ je nultočka kratnosti 2.

Vježba 013

Ako je $x = 1$ nultočka polinoma $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, odredi njezinu kratnost.

Rezultat: 2.

Zadatak 014 (Matea, gimnazija)

Racionalnu funkciju h prikaži kao linearnu kombinaciju racionalnih funkcija f i g ako je zadano:

$$h(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Rješenje 014

Teorija:

Za zadane funkcije f i g i realne brojeve A i B funkcija $h = A \cdot f + B \cdot g$, zove se **linearna kombinacija** funkcija f i g. Realne brojeve A i B odredit ćemo **metodom neodređenih koeficijenata.**

Prema uvjetu zadatka treba odrediti realne brojeve A i B takve da vrijedi

$$h(x) = A \cdot f(x) + B \cdot g(x),$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Pomnožimo ovu jednakost izrazom $x^2 - 1$:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \; / \cdot \left(x^2-1\right) \Rightarrow x = A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1).$$

Sređivanjem desne strane jednakosti dobije se:

$$x = Ax + A + Bx - B,$$

$$x = (A + B) \cdot x + (A - B).$$

Prema stavku o jednakosti polinoma

[**Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.**]

mora vrijediti:

$$x = (A+B)\cdot x + (A-B) \Rightarrow 1 \cdot x + 0 = (A+B)\cdot x + (A-B) \Rightarrow \left.\begin{aligned} A+B&=1\\ A-B&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Traženi rastav glasi:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}, \quad \text{tj.} \quad h = \frac{1}{2} \cdot f + \frac{1}{2} \cdot g.$$

Vježba 014

Racionalnu funkciju h prikaži kao linearnu kombinaciju racionalnih funkcija f i g ako je zadano:

$$h(x)=\frac{1}{x^2-1}, \qquad f(x)=\frac{1}{x-1}, \qquad g(x)=\frac{1}{x+1}.$$

Rezultat: $h=\frac{1}{2}\cdot f-\frac{1}{2}\cdot g.$

Zadatak 015 (Ines, gimnazija)

Odredite područje definicije realne funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{10-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}.$

Rješenje 015

Ponovimo!

Područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je $x\ge 0$ ili $x\in\left[0,+\infty\right\rangle.$

Zato je:

$$\frac{10-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\ge 0.$$

Uz zamjenu $t=\sqrt{x}$ slijedi:

$$\frac{10-t}{t^2-t}\ge 0 \;\Rightarrow\; \frac{10-t}{t\cdot(t-1)}\ge 0.$$

Dobivenu nejednadžbu riješimo pomoću tablice. Najprije provedemo diskusiju. Pitamo se za koje t je nazivnik jednak nuli:

$$t\cdot(t-1)=0 \;\Rightarrow\; t=0 \text{ i } t=1.$$

Te rezultate moramo izbaciti iz skupa rješenja. Sada rješavamo nejednadžbu:

$$(10-t)\cdot t\cdot(t-1)\ge 0.$$

Nađemo karakteristične točke tako da svaki faktor izjednačimo s nulom:

10 – t = 0 , t = 0 , t – 1 = 0 => t = 10 , t = 0 , t = 1.

Karakteristične točke su: 0, 1 i 10. Napravimo tablicu!

	- ∞ … 0	0 … 1	1 … 10	10 … + ∞
10 - t	+	+	+	-
t	-	+	+	+
t - 1	-	-	+	+
Produkt	+	-	+	-

Rješenje nejednadžbe je:

$$t\in\left\langle -\infty,\,0\right\rangle\cup\left\langle 1,\,10\right]$$

ili napisano pomoću znakova nejednakosti:

$$t<0 \quad \text{i} \quad 1<t\le 10.$$

Zbog supstitucije $t=\sqrt{x}$ slijedi:

$$\sqrt{x}<0, \text{ nema smisla,}$$

$$1 < \sqrt{x} \le 10 \;\Rightarrow\; 1 < \sqrt{x} \le 10 \;/^2 \;\Rightarrow\; 1 < x \le 100.$$

Područje definicije je: $\langle 1,\, 100 \,]$.

Vježba 015

Odredite područje definicije realne funkcije $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 10}$.

Rezultat: $[100, +\infty\rangle$.

Zadatak 016 (Ines, gimnazija)

Odredite kodomenu funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x$.

Rješenje 016

Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola s tjemenom u točki $T = (x_0, y_0)$, gdje su:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

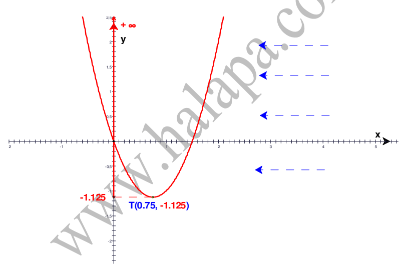
U točki x_0 funkcija f poprima najmanju vrijednost ako je $a > 0$, a najveću vrijednost ako je $a < 0$.

Graf kvadratne funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x$ je parabola $y = 2x^2 - 3x$, pri čemu je:

$$a = 2,\; b = -3,\; c = 0.$$

Koordinate tjemena su:

$$x_0 = -\frac{-3}{4} = 0.75, \qquad y_0 = \frac{-9}{8} = -1.125.$$



Skup vrijednosti funkcije (kodomena) je projekcija grafa funkcije na os ordinata.

Kodomena zadane funkcije je: $[-1.125,\; +\infty\rangle$.

Vježba 016

Odredite kodomenu funkcije $f(x) = 2x^2$.

Rezultat: $[0,\; +\infty\rangle$.

Zadatak 017 (Ines, Petra, gimnazija)

Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \log(100x^{-2}) + 1$.

Rješenje 017

1.inačica

$$y = \frac{1}{6} \cdot \log(100x^{-2}) + 1 \;\Rightarrow\; y - 1 = \frac{1}{6} \cdot \log(100x^{-2}) \;/\cdot 6 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 6y - 6 = \log(100x^{-2}) \;\Rightarrow\; \left[\log_b a = c \;\Leftrightarrow\; b^c = a\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 10^{6y-6} = 100x^{-2} \;/:100 \;\Rightarrow\; \frac{10^{6y-6}}{100} = x^{-2} \;\Rightarrow\; \frac{10^{6y-6}}{100} = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{100}{10^{6y-6}} \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{10^2}{10^{6y-6}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2 = 10^{2-6y+6}\ \Rightarrow\ x^2 = 10^{8-6y}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x = 10^{4-3y}\ \Rightarrow\ f^{-1}(x) = 10^{4-3x}.$$

2.inačica

$$y = \frac{1}{6}\cdot\log(100x^{-2}) + 1\ \Rightarrow\ y - 1 = \frac{1}{6}\cdot\log(100x^{-2})\ /\cdot 6\ \Rightarrow\ 6y - 6 = \log(100x^{-2})\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[\log(x\cdot y) = \log x + \log y,\ \ \log x^n = n\cdot\log x\right]\ \Rightarrow\ 6y - 6 = \log 100 + \log x^{-2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6y - 6 = 2 - 2\cdot\log x\ \Rightarrow\ 2\cdot\log x = 2 - 6y + 6\ \Rightarrow\ 2\cdot\log x = 8 - 6y\ /:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log x = 4 - 3y\ \Rightarrow\ x = 10^{4-3y}\ \Rightarrow\ f^{-1}(x) = 10^{4-3x}.$$

Vježba 017

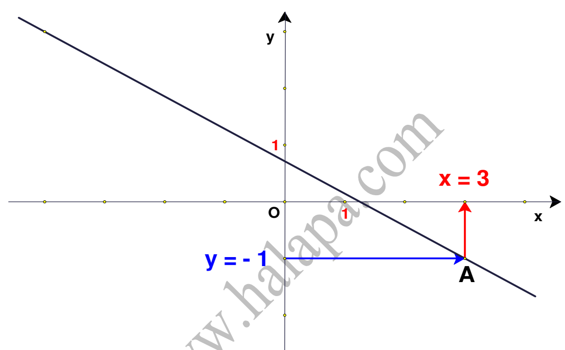
Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \frac{1}{6}\cdot\log(100x^{-2}) - 1.$

Rezultat: $f^{-1}(x) = 10^{-2-3x}.$

Zadatak 018 (1A, hotelijerska škola)

Za koju vrijednost argumenta (varijable) x funkcija prikazana na slici prima vrijednost y = – 1?

Rješenje 018

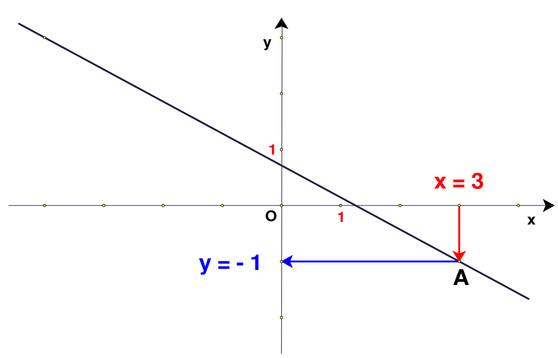


Kroz točku (0, – 1) na y osi povučemo usporednicu (paralelu) s apscisom (x – osi). Sjecište usporednice i zadanog pravca je tražena točka A. Iz nje konstruiramo okomicu na apscisu i pročitamo apscisu x = 3. Dakle, funkcija prikazana na slici prima vrijednost y = – 1 za x = 3.

Vježba 018

Kolika je vrijednost funkcije prikazane na slici za x = 3?

Rezultat:



Kroz točku (3, 0) na x – osi povučemo okomicu na apscisu. Sjecište okomice i zadanog pravca je tražena točka A. Iz nje konstruiramo okomicu na ordinatnu os y i pročitamo ordinatu y = – 1.
Dakle, funkcija prikazana na slici za x = 3 ima vrijednost y = – 1.

Zadatak 019 (Marinko, tehnička škola)

Provjeri je li funkcija $f(x)=\log\frac{x+1}{x-1}$ injekcija.

Rješenje 019

Kažemo da funkcija f ima svojstvo injektivnosti ili da je ona injekcija ako vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dakle, funkcija je injekcija ako različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije. Svojstvo ekvivalentno ovome je:

$$f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1=x_2.$$

Dakle, funkcija je injekcija ako iz jednakosti funkcijskih vrijednosti slijedi i jednakost argumenata.

Pretpostavimo da je f(x) = f(y):

$$f(x)=f(y) \;\Rightarrow\; \log\frac{x+1}{x-1}=\log\frac{y+1}{y-1} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{c}\text{logaritamska funkcija je injektivna}\\ \log x=\log y \;\Rightarrow\; x=y\end{array}\right] \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{x-1}=\frac{y+1}{y-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{pomnožimo ukriž}] \;\Rightarrow\; (x+1)\cdot(y-1)=(x-1)\cdot(y+1) \;\Rightarrow\; xy-x+y-1=xy+x-y-1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; xy-x+y-1=xy+x-y-1 \;\Rightarrow\; -x+y=x-y \;\Rightarrow\; 2y=2x \;/:2 \;\Rightarrow\; x=y.$$

Vježba 019

Provjeri je li funkcija $f(x)=\log(2x+6)$ injekcija.

Rezultat: Funkcija je injekcija.

Zadatak 020 (Anastazija, gimnazija)

Provjeri je li funkcija $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ injekcija.

Rješenje 020

Kažemo da funkcija f ima svojstvo injektivnosti ili da je ona injekcija ako vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dakle, funkcija je injekcija ako različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije. Svojstvo ekvivalentno ovome je:

$$f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1=x_2.$$

Dakle, funkcija je injekcija ako iz jednakosti funkcijskih vrijednosti slijedi i jednakost argumenata.

Pretpostavimo da je f(x) = f(y):

$$f(x)=f(y) \;\Rightarrow\; \sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-y^2} \;/^2 \;\Rightarrow\; 16-x^2=16-y^2 \;\Rightarrow\; x^2=y^2.$$

Odavde ne slijedi nužno da je x = y, jer može biti i x = – y. Zaista, za x = – 3 i y = 3 vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3)=\sqrt{16-(-3)^2}=\sqrt{7} \\ f(3)=\sqrt{16-3^2}=\sqrt{7} \end{array}\right\}.$$

Prema tome, pronašli smo točke x ≠ y za koje vrijedi f(x) = f(y) pa funkcija nije injektivna.

Vježba 020

Provjeri je li funkcija $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ injekcija.

Rezultat: Funkcija nije injekcija.