Zadatak 021 (Anastazija, gimnazija)

Provjeri je li funkcija $f(x)=\log\left(3+\sqrt{x+5}\right)$ injekcija.

Rješenje 021

Kažemo da funkcija f ima svojstvo injektivnosti ili da je ona injekcija ako vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dakle, funkcija je injekcija ako različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije. Svojstvo ekvivalentno ovome je:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2.$$

Dakle, funkcija je injekcija ako iz jednakosti funkcijskih vrijednosti slijedi i jednakost argumenata.

Pretpostavimo da je f(x) = f(y):

$$f(x)=f(y) \Rightarrow \log\left(3+\sqrt{x+5}\right)=\log\left(3+\sqrt{y+5}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{logaritamska funkcija je injektivna} \\ \log x=\log y \Rightarrow x=y\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+\sqrt{x+5}=3+\sqrt{y+5} \Rightarrow \sqrt{x+5}=\sqrt{y+5} \; /^{\sqrt{}} \Rightarrow x+5=y+5 \Rightarrow x=y.$$

Vježba 021

Provjeri je li funkcija $f(x)=\log\left(\sqrt{x+1}-3\right)$ injekcija.

Rezultat: Funkcija je injekcija.

Zadatak 022 (Anastazija, gimnazija)

Provjeri je li funkcija $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+1}+3}$ injekcija.

Rješenje 022

Kažemo da funkcija f ima svojstvo injektivnosti ili da je ona injekcija ako vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dakle, funkcija je injekcija ako različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije. Svojstvo ekvivalentno ovome je:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2.$$

Dakle, funkcija je injekcija ako iz jednakosti funkcijskih vrijednosti slijedi i jednakost argumenata.

Pretpostavimo da je f(x) = f(y):

$$f(x)=f(y) \Rightarrow \sqrt{\sqrt{x+1}+3}=\sqrt{\sqrt{y+1}+3} \; /^{\sqrt{}} \Rightarrow \sqrt{x+1}+3=\sqrt{y+1}+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y+1} \; /^{\sqrt{}} \Rightarrow x+1=y+1 \Rightarrow x=y.$$

Vježba 022

Provjeri je li funkcija $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-5}$ injekcija.

Rezultat: Funkcija je injekcija.

Zadatak 023 (Anastazija, gimnazija)

Pojednostavnite funkciju $f(x)=(x+1)^4-4\cdot(x+1)^3+6\cdot(x+1)^2-4\cdot(x+1)+1.$

Rješenje 023

1.inačica

Uporabit ćemo binomne formule:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \;,\; (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \;,\; (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Sada je:

$$f(x)=(x+1)^4-4\cdot(x+1)^3+6\cdot(x+1)^2-4\cdot(x+1)+1=$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 4 \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) + 6 \cdot \left(x^2 + 2x + 1\right) - 4x - 4 + 1 =$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 4x^3 - 12x^2 - 12x - 4 + 6x^2 + 12x + 6 - 4x - 4 + 1 =$$

$$= \left[\text{poništimo suprotne članove}\right] = x^4.$$

2.inačica

Pomoću binomne formule dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} (a-1)^4 = a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \\ f(x) = (x+1)^4 - 4 \cdot (x+1)^3 + 6 \cdot (x+1)^2 - 4 \cdot (x+1) + 1 \\ a = x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 =$$

$$= (a-1)^4 = (x+1-1)^4 = x^4.$$

Vježba 023

Pojednostavnite funkciju $f(x) = (x+1)^2 - 2 \cdot (x+1) + 1.$

Rezultat: $f(x) = x^2.$

Zadatak 024 (Tanja, gimnazija)

Odredi prirodnu domenu funkcije $g(x) = \dfrac{8x-5}{(x-1) \cdot (x+3)}.$

Rješenje 024

Moramo naći vrijednosti x – eva za koje je nazivnik jednak nuli i te vrijednosti odstraniti iz skupa realnih brojeva R:

$$(x-1) \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}.$$

Domena je: $D(g) = R \setminus \{-3, 1\}.$

Vježba 024

Odredi prirodnu domenu funkcije $g(x) = \dfrac{x+5}{(x-3) \cdot (x-1)}.$

Rezultat: Domena je: $D(g) = R \setminus \{1, 3\}.$

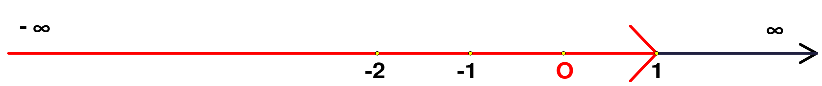
Zadatak 025 (Tanja, gimnazija)

Odredi prirodnu domenu funkcije $g(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{1-x}}.$

Rješenje 025

Moramo naći vrijednosti x – eva za koje je radikand (izraz pod korijenom) strogo veći od nule:

$$1 - x > 0 \Rightarrow -x > -1 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow x < 1.$$



Domena je: $D(g) = \langle -\infty, 1 \rangle.$

Vježba 025

Odredi prirodnu domenu funkcije $g(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{2-x}}.$

Rezultat: Domena je: $D(g) = \langle -\infty, 2 \rangle.$

Zadatak 026 (Max, tehnička škola)

Ako je $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2} \cdot x$, a $g(x) = \log_{16} x$, nađite $f(-1) + f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Rješenje 026

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow \log_{16} f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow \left[\log_b a = c \Rightarrow b^c = a\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 16^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{16}\right)^x = 4^x.$$

Iz f(x) = 4^x slijedi:

$$f(-1) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4^{-1} + 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\left(\sqrt{4}\right)^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Vježba 026

Ako je $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2} \cdot x$, a $g(x) = \log_{16} x$, nađite $f(-1) + f(-2)$.

Rezultat: $\frac{5}{16}.$

Zadatak 027 (Mala, gimnazija)

Ako je $f(\sin x) = 1 + tg^2 x$, koliko je $f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$?

Rješenje 027

$$f(\sin x) = 1 + tg^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}.$$

Zato je:

$$f\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - 1} = -\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -tg^2 x.$$

Vježba 027

Ako je $f(\cos x) = 1 + tg^2 x$, koliko je $f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$?

Rezultat: $f\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{1 + tg^2 x}.$

Zadatak 028 (Anastazija, gimnazija)

Zadana je funkcija f(x) = 2^{3x+5}. Kolika je vrijednost inverzne funkcije $f^{-1}(4)$?

Rješenje 028

Iz zadane funkcije izračunamo x:

$$f(x) = 2^{3x+5} \; / \log_2 \Rightarrow \log_2 f(x) = \log_2 2^{3x+5} \Rightarrow \log_2 f(x) = (3x+5) \cdot \log_2 2 \Rightarrow \left[\log_b b = 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 f(x) = 3x + 5 \Rightarrow 3x = \log_2 f(x) - 5 \; /:3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \left(\log_2 f(x) - 5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\log_2 x - 5\right) \Rightarrow f^{-1}(4) = \frac{1}{3} \cdot \left(\log_2 4 - 5\right) = \frac{1}{3} \cdot (2 - 5) = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1.$$

Vježba 028

Zadana je funkcija f(x) = 2^{3x-1}. Kolika je vrijednost inverzne funkcije $f^{-1}(4)$?

Rezultat: 1.

Zadatak 029 (4A, hotelijerska škola)

Ako je $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2},\ x\in R,$ izračunaj:

$$f\left(\frac{1}{1989}\right)+f\left(\frac{2}{1989}\right)+f\left(\frac{3}{1989}\right)+\ ...\ +f\left(\frac{1986}{1989}\right)+f\left(\frac{1987}{1989}\right)+f\left(\frac{1988}{1989}\right).$$

Rješenje 029

Uočimo da je:

$$\frac{1}{1989}+\frac{1988}{1989}=1\ ,\ \frac{2}{1989}+\frac{1987}{1989}=1\ ,\ \frac{3}{1989}+\frac{1986}{1989}=1\ ,\ ...$$

Parova ima 994 (1988 : 2 = 994). Izračunajmo f(a) + f(b), ako je a + b = 1:

$$f(a)+f(b)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}=\frac{4^a\cdot\left(4^b+2\right)+4^b\cdot\left(4^a+2\right)}{\left(4^a+2\right)\cdot\left(4^b+2\right)}=\frac{4^{a+b}+2\cdot4^a+4^{a+b}+2\cdot4^b}{4^{a+b}+2\cdot4^a+2\cdot4^b+4}=$$

$$=\frac{2\cdot4^{a+b}+2\cdot\left(4^a+4^b\right)}{4^{a+b}+2\cdot\left(4^a+4^b\right)+4}=\left[a+b=1\right]=\frac{2\cdot4+2\cdot\left(4^a+4^b\right)}{4+2\cdot\left(4^a+4^b\right)+4}=\frac{8+2\cdot\left(4^a+4^b\right)}{8+2\cdot\left(4^a+4^b\right)}=1.$$

Očigledno, traženi zbroj jednak je 994 · 1 = 994.

Vježba 029

Ako je $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2},\ x\in R,$ izračunaj:

$$f\left(\frac{1}{11}\right)+f\left(\frac{2}{11}\right)+f\left(\frac{3}{11}\right)+\ ...\ +f\left(\frac{8}{11}\right)+f\left(\frac{9}{11}\right)+f\left(\frac{10}{11}\right).$$

Rezultat: 5.

Zadatak 030 (Anamarija, hotelijerska škola)

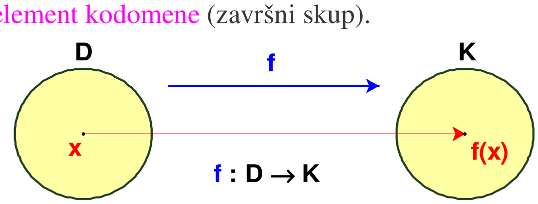
Odredimo prirodnu domenu realne funkcije:

$$a)\ f(x)=x+2\quad ,\quad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x+2}\quad ,\quad c)\ f(x)=\sqrt{x+2}$$

$$d)\ f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\quad ,\quad e)\ f(x)=\log(x+2)\quad ,\quad f)\ f(x)=\sqrt[3]{x+2}$$

Rješenje 030

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

a) $f(x) = x + 2,$ možemo izračunati za svaki realni broj x (tj. ona ima smisla za svaki realni x) pa je prirodna domena funkcije f skup svih realnih brojeva R. Simbolično pišemo:

$$D(f) = R \qquad \text{ili} \qquad D(f) = \langle -\infty, +\infty \rangle$$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x+2},$ možemo izračunati za svaki realni broj x osim za x = – 2 jer bi tada morali dijeliti s 0 (što nije moguće). Postupak je sljedeći: nazivnik izjednačimo s nulom, riješimo dobivenu jednadžbu i rezultat izbacimo iz skupa R.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D(f) = R \setminus \{-2\}$$

c) $f(x) = \sqrt{x+2},$ bit će realan broj ako je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli. Ako je radikand negativan, tada je drugi korijen imaginaran broj. Dakle, prirodna domena funkcije f dobije se:

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D(f) = [-2, +\infty\rangle$$

d) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}},$ bit će realan broj ako je radikand (izraz pod korijenom) strogo veći od nule (nula ne može biti jer se s nulom ne smije dijeliti). Dakle, prirodna domena funkcije f dobije se:

$$x + 2 > \Rightarrow x > -2 \Rightarrow D(f) = \langle -2, +\infty \rangle$$

e) $f(x) = \log(x+2),$ bit će realan broj ako je izraz pod logaritmom strogo veći od nule jer domena logaritamske funkcije samo su pozitivni realni brojevi. Dakle, prirodna domena funkcije f dobije se:

$$x + 2 > \Rightarrow x > -2 \Rightarrow D(f) = \langle -2, +\infty \rangle$$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x+2},$ riječ je o trećem korijenu (neparnom broju!) pa možemo izračunati za svaki realni broj x (tj. ona ima smisla za svaki realni x). Prirodna domena funkcije f je skup svih realnih brojeva R. Simbolično pišemo:

$$D(f) = R \qquad \text{ili} \qquad D(f) = \langle -\infty, +\infty \rangle$$

Vježba 030

Odredimo prirodnu domenu realne funkcije: $f(x) = \frac{x+3}{x-5}.$

Rezultat: $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow x \neq 5 \Rightarrow D(f) = R \setminus \{5\}.$

Zadatak 031 (Mira, gimnazija)

Ako je $f(x) = (3x^3 - 7x^2 + 3x - 2) : (3x^2 - x + 1)$ izračunaj $f(x+2) : f(-x+2).$

Rješenje 031

Odredimo funkciju f(x) tako da podijelimo polinome:

$$f(x) = (3x^3 - 7x^2 + 3x - 2) : (3x^2 - x + 1) = x - 2$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm 3x^3 \mp x^2 \pm \ x} \\ \quad -6x^2 + 2x - 2 \\ \quad \underline{\mp 6x^2 \pm 2x \mp 2} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Budući da je f(x) = x – 2, slijedi

$$\left.\begin{array}{l} f(x+2) = x + 2 - 2 = x \\ f(-x+2) = -x + 2 - 2 = -x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x+2) : f(-x+2) = x : (-x) = -1.$$

Vježba 031

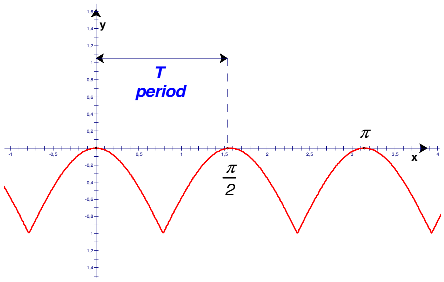
Ako je $f(x)=\left(3x^3-7x^2+3x-2\right):\left(3x^2-x+1\right)$ izračunaj $f(x+2)+f(-x+2)$.

Rezultat: 0.

Zadatak 032 (Anastazija, gimnazija)

Nađite temeljni period funkcije f(x) = | cos 2x | – 1.

Rješenje 032



Temeljni period funkcije f(x) = cos x je T = 2 · π.

Temeljni period funkcije f(x) = cos 2x je $T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

Temeljni period funkcije f(x) = | cos 2x | je upola manji: $T=\frac{\pi}{2}$

(modul prepolovljuje period T = π jer se dio grafa ispod x – osi zrcali preko x – osi u pozitivan dio).

Zato temeljni period funkcije f(x) = | cos 2x | – 1 iznosi: $T=\frac{\pi}{2}.$

Vježba 032

Nađite temeljni period funkcije f(x) = | cos x | – 1.

Rezultat: T = π..

Zadatak 033 (Mira, gimnazija)

Nađite inverznu funkciju funkcije $y=\log_2 x+\log_4 x.$

Rješenje 033

1.inačica

Pojednostavimo izraz za funkciju uporabom svojstva $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c a}$:

$$y=\log_2 x+\log_4 x=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 2^2}=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2\cdot\log_2 2}=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2}=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x.$$

Inverzna funkcija bit će:

$$y=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x\Rightarrow\begin{cases}x\leftrightarrow y\\ x=\frac{3}{2}\cdot\log_2 y\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\log_2 y=x\ /\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow\log_2 y=\frac{2}{3}\cdot x\Rightarrow 2^{\log_2 y}=2^{\frac{2}{3}\cdot x}\Rightarrow y=2^{\frac{2}{3}\cdot x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\left(2^2\right)^{\frac{x}{3}}\Rightarrow y=4^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{4^x}\ \text{ ili }\ f^{-1}(x)=4^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{4^x}.$$

2.inačica

Pojednostavimo izraz za funkciju uporabom svojstva $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$:

$$y=\log_2 x+\log_4 x=\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_x 4}=\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_x 2^2}=\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{2\cdot\log_x 2}=\frac{2+1}{2\cdot\log_x 2}=\frac{3}{2\cdot\log_x 2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x.$$

Inverzna funkcija bit će:

$$y=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x\Rightarrow\begin{cases}x\leftrightarrow y\\ x=\frac{3}{2}\cdot\log_2 y\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\log_2 y=x\ /\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow\log_2 y=\frac{2}{3}\cdot x\Rightarrow 2^{\log_2 y}=2^{\frac{2}{3}\cdot x}\Rightarrow y=2^{\frac{2}{3}\cdot x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\left(2^2\right)^{\frac{x}{3}}\Rightarrow y=4^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{4^x}\ \text{ ili }\ f^{-1}(x)=4^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{4^x}.$$

Vježba 033

Nađite inverznu funkciju funkcije $y = \log_2 x$.

Rezultat: $f^{-1}(x) = 2^x$.

Zadatak 034 (Fred, gimnazija)

Ako je $f(x) = \frac{10^{2x} - 1}{1 + x \cdot 10^x}$, g(x) = log x, nađite (f ○ g)(1).

Rješenje 034

Budući da je (f ○ g)(x) = f(g(x)), slijedi:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\log 1) = f(0) = \frac{10^0 - 1}{1 + 0 \cdot 10^0} = \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Vježba 034

Ako je $f(x) = \frac{10^{2x} + 1}{1 + x \cdot 10^x}$, g(x) = log x, nađite (f ○ g)(1).

Rezultat: 2.

Zadatak 035 (Stela, gimnazija)

Ako je $f(x) = \left| |x| - 2 \right|$ i $g(x) = |x - 1|$, koliko je $(f \circ g \circ f)\left(-\frac{5}{3}\right)$?

Rješenje 035

Ponovimo:

$|x| = x$ za $x \geq 0$, $|x| = -x$ za $x < 0$, $(f \circ g \circ f)(x) = f(g(f(x)))$.

Zato je:

$$(f \circ g \circ f)\left(-\frac{5}{3}\right) = f\left(g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right)\right) = f\left(g\left(\left|\left|-\frac{5}{3}\right| - 2\right|\right)\right) = f\left(g\left(\left|\frac{5}{3} - 2\right|\right)\right) = f\left(g\left(\left|-\frac{1}{3}\right|\right)\right) = f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= f\left(\left|\frac{1}{3} - 1\right|\right) = f\left(\left|-\frac{2}{3}\right|\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left|\left|\frac{2}{3}\right| - 2\right| = \left|\frac{2}{3} - 2\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}.$$

Vježba 035

Ako je $f(x) = \left| |x| - 2 \right|$ i $g(x) = |x - 1|$, koliko je $(f \circ g \circ f)(0)$?

Rezultat: 1.

Zadatak 036 (Max, gimnazija)

Nađite maksimum funkcije $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \cdot \sin^2 x}$.

Rješenje 036

$$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \cdot \sin^2 x} = \left[a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m \right] =$$

$$= \sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2 + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{\left(\cos^2 x\right)^2 + 4 \cdot \sin^2 x} = \left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \right] =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)^2 + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + 4 \cdot \sin^2 x} = \left[(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \right] =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x + 4 \cdot \sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{1 + 2\cos^2 x + \cos^4 x} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x + \sin^4 x} = \left[a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \right] =$$

$$=\sqrt{\left(1+\cos^2 x\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sin^2 x\right)^2}=1+\cos^2 x+1+\sin^2 x=2+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2+1=3.$$

Vježba 036

Nađite maksimum funkcije $f(x)=2\cdot\left[\sqrt{\sin^4 x+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\cdot\sin^2 x}\right].$

Rezultat: 6.

Zadatak 037 (Anastazija, gimnazija)

Ako je $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, koliko je $f\left(\sqrt{x}+1\right)-f\left(\sqrt{x}-1\right)$?

Rješenje 037

Najprije odredimo funkciju f(x):

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \\ t=x+\frac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \\ t=x+\frac{1}{x}\ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \\ t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \\ t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=t^2-2.$$

Budući da je zadana funkcija f(x) = x^2 – 2, slijedi:

$$f\left(\sqrt{x}+1\right)-f\left(\sqrt{x}-1\right)=\left(\sqrt{x}+1\right)^2-2-\left[\left(\sqrt{x}-1\right)^2-2\right]=x+2\sqrt{x}+1-2-\left[x-2\sqrt{x}+1-2\right]=$$

$$=x+2\sqrt{x}+1-2-x+2\sqrt{x}-1+2=4\sqrt{x}.$$

Vježba 037

Ako je $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, koliko je $f\left(\sqrt{x}+1\right)+f\left(\sqrt{x}-1\right)$?

Rezultat: 2x – 2.

Zadatak 038 (Anastazija, gimnazija)

Nađite kodomenu funkcije $f(x)=-2x^2-2x+1.$

Rješenje 038

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x\in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y\in B$.

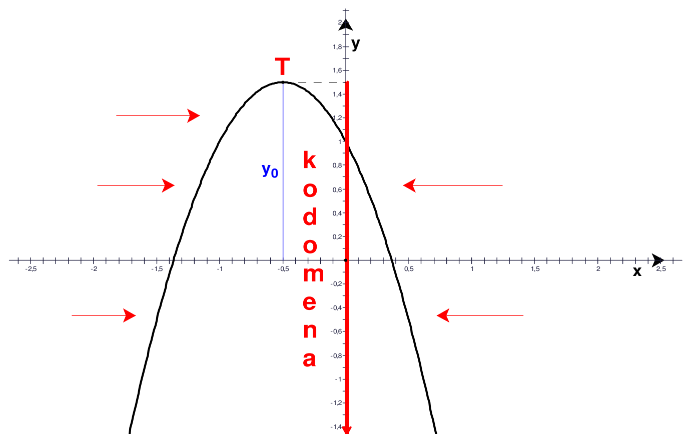
Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. S pojmom kodomene povezan je skup zvan slika funkcije. Sliku funkcije možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije.

Slika funkcije f sastoji se od svih $y\in B$ za koje postoji $x\in A$ takav da je f(x) = y. Slika funkcije je skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu.

Graf zadane funkcije je parabola otvorom okrenuta prema dolje. Njezino tjeme je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-2x^2-2x+1 \\ a=-2,\ b=-2,\ c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} T\left(x_0,\ y_0\right) \\ x_0=-\frac{b}{2\cdot a},\ y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\frac{-2}{2\cdot(-2)}=-\frac{1}{2} \\ y_0=\frac{4\cdot(-2)\cdot 1-(-2)^2}{4\cdot(-2)}=\frac{-8-4}{-8}=\frac{3}{2}. \end{array}\right\}$$

Skup vrijednosti (slika funkcije) R_f je projekcija grafa na os ordinata.



Kodomena je skup:

$$x \in \left[\,\frac{3}{2}, -\infty \right\rangle.$$

Vježba 038

Nađite kodomenu funkcije $f(x) = x^2$.

Rezultat: $x \in \left[\,0, +\infty \right\rangle.$

Zadatak 039 (Dijana, gimnazija)

Ako je $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ izračunajte $f\left(\sqrt{3} - 2\right)$.

Rješenje 039

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = |x-1| + |x+1|.$$

Vrijednost funkcije za $x = \sqrt{3} - 2$ je:

$$f\left(\sqrt{3} - 2\right) = \left|\sqrt{3} - 2 - 1\right| + \left|\sqrt{3} - 2 + 1\right| = \left|\sqrt{3} - 3\right| + \left|\sqrt{3} - 1\right| =$$

$$= \begin{bmatrix} x < 0 \Rightarrow |x| = -x \\ \sqrt{3} - 3 < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{3} - 3\right| = -\sqrt{3} + 3 \\ x > 0 \Rightarrow |x| = x \\ \sqrt{3} - 1 > 0 \Rightarrow \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} = -\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} - 1 = 2.$$

Vježba 039

Ako je $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ izračunajte $f(1)$.

Rezultat: 2.

Zadatak 040 (Anastazija, gimnazija)

Izrazite x kao funkciju od y, ako je $x = \sqrt{4xy - 4y^2}$.

Rješenje 040

$$x = \sqrt{4xy - 4y^2} \;/^2 \Rightarrow x^2 = 4xy - 4y^2 \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \Rightarrow \left[a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y.$$

Vježba 040

Izrazite y kao funkciju od x, ako je $x = \sqrt{4xy - 4y^2}$.

Rezultat: $y = \frac{1}{2}x.$