Zadatak 041 (Mario, tehnička škola)

Kolika je najmanja vrijednost funkcije $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}$?

Rješenje 041

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diskusija!}\\ 1-x>0\\ 1+x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x<1\\ x>-1\end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle -1,+1\rangle.$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Zadanu funkciju kvadriramo:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\ /^2 \Rightarrow f^2(x)=\frac{1+x+2\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}+1-x}{1-x^2}=\frac{2+2\cdot\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}.$$

Minimalna vrijednost kvadrata funkcije bit će za maksimalnu vrijednost nazivnika (to je 1):

$$1-x^2=1 \Rightarrow x=0.$$

Znači da je:

$$f^2_{\min}(0)=\frac{2+2\cdot\sqrt{1-0}}{1-0}=\frac{2+2}{1}=4 \Rightarrow f_{\min}=2.$$

Vježba 041

Kolika je najmanja vrijednost funkcije $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{1+x}}$?

Rezultat: 4.

Zadatak 042 (Goran, gimnazija)

Ako je $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, koliko je rješenje jednadžbe $(f\circ f)(x)=3x-2$?

Rješenje 042

Kompozicija funkcija definira se: $(f\circ f)(x)=f(f(x))$.

Dalje slijedi:

$$f(f(x))=3x-2 \Rightarrow \frac{2\cdot f(x)+1}{f(x)-2}=3x-2 \Rightarrow \frac{2\cdot\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}=3x-2 \Rightarrow \frac{\frac{4x+2}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}=3x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-2}}=3x-2 \Rightarrow \frac{5x}{5}=3x-2 \Rightarrow x=3x-2 \Rightarrow -2x=-2\ /:(-2) \Rightarrow x=1.$$

Vježba 042

Ako je $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, koliko je rješenje jednadžbe $(f\circ f)(x)=2x-2$?

Rezultat: x = 2.

Zadatak 043 (Mira, gimnazija)

Ako je f linearna funkcija, te je f(0) = – 3, f(– 3) = 0 onda je

$A)\ f(-6)=-12 \qquad B)\ f(-6)=-6 \qquad C)\ f(-6)=3 \qquad D)\ f(-6)=6$

Rješenje 043

Linearna funkcija ima oblik f(x) = a · x + b. Budući da je f(0) = – 3 i f(– 3) = 0, dobije se sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice a i b:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-3 \\ f(-3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot 0+b=-3 \\ a\cdot(-3)+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-3 \\ -3\cdot a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\cdot a-3=0 \Rightarrow -3\cdot a=3\ /:(-3) \Rightarrow a=-1.$$

Linearna funkcija zadana je izrazom: f(x) = – x – 3. Sada je:

f(– 6) = – (– 6) – 3 = 6 – 3 = 3.

Odgovor je pod C.

Vježba 043

Ako je f linearna funkcija, te je f(3) = 0, f(0) = – 6 onda je

$A)\ f(-6)=-12 \qquad B)\ f(-6)=-9 \qquad C)\ f(-6)=-18 \qquad D)\ f(-6)=12$

Rezultat: Odgovor je pod C.

Zadatak 044 (Martina, hotelijerska škola)

Afina funkcija zadana je tablično:

x	0	– 2
f(x)	– 5	– 8

Napišite njezinu jednadžbu.

Rješenje 044

1.inačica

Budući da je graf afine funkcije pravac, odredit ćemo jednadžbu pravca kroz dvije točke A(0, – 5) i B(– 2, – 8):

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1)=A(0,-5) \\ B(x_2, y_2)=B(-2,-8) \end{array}\right\} \Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) \Rightarrow y+5=\frac{-8+5}{-2-0}\cdot(x-0) \Rightarrow y+5=\frac{-3}{-2}\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot x-5 \Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5.$$

2.inačica

Afina funkcija ima oblik f(x) = a · x + b. Budući da su poznate dvije točke A(0, – 5) i B(– 2, – 8), uvrstit ćemo njihove koordinate u izraz f(x) = a · x + b te izračunati a i b:

$$\left.\begin{array}{l} A(x, f(x))=A(0,-5) \\ B(x, f(x))=B(-2,-8) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -5=a\cdot 0+b \\ -8=a\cdot(-2)+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot 0+b=-5 \\ -2\cdot a+b=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-5 \\ -2\cdot a+b=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot a-5=-8 \Rightarrow -2\cdot a=-8+5 \Rightarrow -2\cdot a=-3\ /:(-2) \Rightarrow a=\frac{3}{2}.$$

Funkcija glasi: $f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5.$

Vježba 044

Afina funkcija zadana je tablično:

x	0	2
f(x)	– 7	– 1

Napišite njezinu jednadžbu.

Rezultat: f(x) = 3x – 7.

Zadatak 045 (1A, hotelijerska škola)

Vrijednosti funkcije $f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5$ prikazane su u tablici:

A	x	0	– 4	**C**	x	0	– 2
	f(x)	– 5	3		f(x)	– 5	– 8
B	x	0	12	**D**	x	0	2
	f(x)	– 5	5		f(x)	– 5	2

Rješenje 045

1.inačica

Računamo redom vrijednosti funkcije za zadane vrijednosti apscisa:

$$A)\quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0)=\frac{3}{2}\cdot 0-5=0-5=-5 \\ f(-4)=\frac{3}{2}\cdot(-4)-5=-6-5=-11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{nije rješenje}$$

$$B)\quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0)=\frac{3}{2}\cdot 0-5=0-5=-5 \\ f(12)=\frac{3}{2}\cdot 12-5=18-5=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{nije rješenje}$$

$$C)\quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0)=\frac{3}{2}\cdot 0-5=0-5=-5 \\ f(-2)=\frac{3}{2}\cdot(-2)-5=-3-5=-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{rješenje je}$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Vrijednosti iz tablica uvrštavamo u zadanu funkciju i gledamo hoćemo li dobiti identitet

$$A)\quad \left.\begin{matrix} x=0\ ,\ f(x)=-5\ ,\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5 \\ x=-4\ ,\ f(x)=3\ ,\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5=\frac{3}{2}\cdot 0-5 \\ 3=\frac{3}{2}\cdot(-4)-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5=-5 \\ 3\neq -11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{nije rješenje}$$

$$B)\quad \left.\begin{matrix} x=0\ ,\ f(x)=-5\ ,\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5 \\ x=12\ ,\ f(x)=5\ ,\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5=\frac{3}{2}\cdot 0-5 \\ 5=\frac{3}{2}\cdot 12-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5=-5 \\ 5\neq 13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{nije rješenje}$$

$$C)\quad \left.\begin{matrix} x=0\ ,\ f(x)=-5\ ,\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5 \\ x=-2\ ,\ f(x)=-8\ ,\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5=\frac{3}{2}\cdot 0-5 \\ -8=\frac{3}{2}\cdot(-2)-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5=-5 \\ -8=-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{rješenje je}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 045

Vrijednosti funkcije $f(x)=3\cdot x-8$ prikazane su u tablici:

A	x	0	– 3	**C**	x	0	4
	f(x)	– 8	3		f(x)	– 8	20
B	x	0	8	**D**	x	0	– 6
	f(x)	– 8	16		f(x)	– 8	– 20

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 046 (Mario, tehnička škola)

Za koju vrijednost parametra m funkcija f(x) = (m – 2) · x^2 + 3 · x + m + 2 ima barem jednu nultočku?

Rješenje 046

Kvadratna funkcija f(x) = a · x^2 + b · x + c ima barem jednu nultočku ako je diskriminanta nenegativan broj:

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(m-2)\cdot x^2+3\cdot x+m+2 \\ b^2-4\cdot a\cdot c\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3^2-4\cdot(m-2)\cdot(m+2)\ge 0 \Rightarrow 9-4\cdot\left(m^2-4\right)\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9-4\cdot m^2+16\ge 0 \Rightarrow -4\cdot m^2\ge -25 \;/:(-4) \Rightarrow m^2\le\frac{25}{4} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |m|\le\frac{5}{2} \Rightarrow m\in\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right].$$

Vježba 046

Za koju vrijednost parametra m funkcija f(x) = (m – 2) · x^2 + 3 · x + m + 2 ima točno jednu nultočku?

Rezultat: $m_{1,2}=\pm\frac{5}{2}.$

Zadatak 047 (Marina, gimnazija)

Odredi inverznu funkciju funkcije f(x) = x^3 + 3 · x^2 + 3 · x + 1.

Rješenje 047

$$f(x)=x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1 \Rightarrow \left[a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3\right] \Rightarrow f(x)=(x+1)^3.$$

Računamo inverznu funkciju:

$$f(x)=(x+1)^3 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow \sqrt[3]{f(x)}=x+1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{f(x)}-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1.$$

Vježba 047

Odredi inverznu funkciju funkcije f(x) = x^2 + 2 · x + 1.

Rezultat: $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1.$

Zadatak 048 (Ana, hotelijerska škola)

Nađi prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{\log(2x)}.$

Rješenje 048

$$f(x)=\sqrt{\log(2x)} \Rightarrow \log(2x)\ge 0 \Rightarrow \log(2x)\ge\log 1 \Rightarrow 2x\ge 1 \;/:2 \Rightarrow x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow x\ge 0.5 \Rightarrow x\in\left[0.5,+\infty\right\rangle.$$

Vježba 048

Nađi prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{\log(4x)}.$

Rezultat: $x\in\left[0.25,+\infty\right\rangle.$

Zadatak 049 (Ana, hotelijerska škola)

Nađi prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{x}}}.$

Rješenje 049

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{x}}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{2}{2-\sqrt{x}}\ge 0 \\ x\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{razlomak je pozitivan} \\ \text{brojnik je pozitivan} \\ \text{nazivnik mora biti pozitivan}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2-\sqrt{x}>0 \\ x\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-\sqrt{x}>-2 \;/\cdot(-1) \\ x\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{x}<2 \;/^2 \\ x\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x<4 \\ x\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow x\in\left[0,4\right\rangle.$$

Vježba 049

Nađi prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{1}{1-\sqrt{x}}}.$

Rezultat: $x\in\left[0,1\right\rangle.$

Zadatak 050 (Mario, tehnička škola)

Za koje realne brojeve funkcija $f(x)=2^{-x^2+2}-2$ poprima samo pozitivne vrijednosti?

Rješenje 050

$$f(x)>0 \Rightarrow 2^{-x^2+2}-2>0 \Rightarrow 2^{-x^2+2}>2 \Rightarrow 2^{-x^2+2}>2^1 \Rightarrow -x^2+2>1 \Rightarrow -x^2>-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2>-1 \,/\cdot(-1) \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow /\sqrt{\ } \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow x\in\langle -1,1\rangle.$$

Vježba 050

Za koje realne brojeve funkcija $f(x)=2^{-x^2+2}-2$ poprima samo negativne vrijednosti?

Rezultat: $x\in\langle -\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle.$

Zadatak 051 (Marija, gimnazija)

Neka je $f(x)=\frac{1}{x}+7,\ g(x)=\frac{x}{1-7\cdot x}$. Koliko je $(f\circ g)(x+1)$?

Rješenje 051

$$(f\circ g)(x+1)=f(g(x+1))=\frac{1}{g(x+1)}+7=\frac{1}{\frac{x+1}{1-7\cdot(x+1)}}+7=$$

$$=\frac{1-7\cdot(x+1)}{x+1}+7=\frac{1-7\cdot(x+1)+7\cdot(x+1)}{x+1}=\frac{1}{x+1}.$$

Vježba 051

Neka je $f(x)=\frac{1}{x}+2,\ g(x)=\frac{x}{1-2\cdot x}$. Koliko je $(f\circ g)(x)$?

Rezultat: $\frac{1}{x}.$

Zadatak 052 (Marija, gimnazija)

Ako je $f(x)=3\cdot x-1,\ g(x)=x^3$ i $h(x)=\sqrt{x}$, kolika je vrijednost funkcije $f\circ(g\circ h)$ u točki $3^{-\frac{2}{3}}$?

Rješenje 052

Najprije nađemo kompoziciju funkcija:

$$(f\circ(g\circ h))(x)=f(g(h(x)))=f\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)=f\left(\left(\sqrt{x}\right)^3\right)=3\cdot\left(\sqrt{x}\right)^3-1=3\cdot\sqrt{x^3}-1=3\cdot x^{\frac{3}{2}}-1.$$

Sada je:

$$(f\circ(g\circ h))\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)=3\cdot\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-1=3\cdot 3^{-1}-1=3^0-1=1-1=0.$$

Vježba 052

Ako je $f(x)=3\cdot x-1,\ g(x)=x^3$ i $h(x)=\sqrt{x}$, kolika je vrijednost funkcije $f\circ(g\circ h)$ u točki $3^{\frac{2}{3}}$?

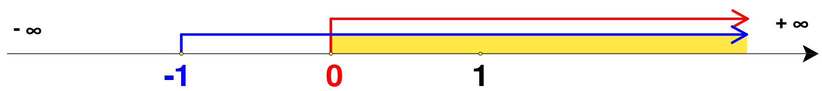
Rezultat: 8.

Zadatak 053 (Vedrana, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}.$

Rješenje 053

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diskusija!}\\ 1+x\ge 0\\ \sqrt{1+x}-1\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\ge -1\\ \sqrt{1+x}\ge 1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\ge -1\\ \sqrt{1+x}\ge 1\ /^{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\ge -1\\ 1+x\ge 1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow x\in\left[0,\ +\infty\right\rangle.$$



Vježba 053

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{\sqrt{2+x}-2}.$

Rezultat: $x\in\left[2,\ +\infty\right\rangle.$

Zadatak 054 (Vedrana, gimnazija)

Funkcija $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + k$ ima dvije različite pozitivne nultočke. Odredite k.

Rješenje 054

Nultočke funkcije su:

$$x^2-2\cdot x+k=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot k}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot(1-k)}}{2}=\frac{2\pm 2\cdot\sqrt{1-k}}{2}=1\pm\sqrt{1-k}.$$

Budući da nultočke moraju biti pozitivne, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}1-k>0\\ 1-\sqrt{1-k}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-k>-1\ /\cdot(-1)\\ -\sqrt{1-k}>-1\ /\cdot(-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k<1\\ \sqrt{1-k}<1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k<1\\ \sqrt{1-k}<1\ /^{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k<1\\ 1-k<1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k<1\\ -k<0\ /\cdot(-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k<1\\ k>0\end{array}\right\}\Rightarrow k\in\left\langle 0,1\right\rangle.$$

Vježba 054

Funkcija $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + a$ ima dvostruko realno rješenje.. Odredite a.

Rezultat: 1.

Zadatak 055 (Vedrana, gimnazija)

Ako je $f(x)=10^{x-1}$, $g(x)=\log(2\cdot x)$, nađite rješenje jednadžbe $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x).$

Rješenje 055

Ponovimo!

$$b^{\log_b a}=a\quad,\quad 10^{\log x}=x\quad,\quad 10^{x+y}=10^x\cdot 10^y\quad,\quad \log(x\cdot y)=\log x+\log y\quad,\quad \log 10^x=x.$$

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))\Rightarrow 10^{g(x)-1}=\log(2\cdot f(x))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{\log(2\cdot x)-1}=\log\left(2\cdot 10^{x-1}\right)\Rightarrow 10^{\log(2\cdot x)}\cdot 10^{-1}=\log 2+\log 10^{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x\cdot 10^{-1}=\log 2+x-1\Rightarrow 2\cdot x\cdot\frac{1}{10}=\log 2+x-1\Rightarrow\frac{x}{5}=\log 2+x-1\Rightarrow\frac{x}{5}-x=\log 2-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{5}\cdot x=\log 2-1\ /\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\Rightarrow x=\frac{5}{4}\cdot(1-\log 2)\Rightarrow x=0.874.$$

Vježba 055

Ako je $f(x)=x$, $g(x)=x+3$, nađite rješenje jednadžbe $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x).$

Rezultat: $x\in\left\langle -\infty,+\infty\right\rangle.$

Zadatak 056 (Vedrana, gimnazija)

Neka je $f(x)=\cos\frac{x\cdot\pi}{3}$ i $g(x)=2\cdot|x+1|$. Izračunajte: $(f\circ g)(1990)$.

Rješenje 056

Ponovimo!

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \quad , \quad \cos(\alpha+k\cdot 2\cdot\pi)=\cos\alpha \ , \ k\in Z \quad , \quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$(g\circ f)(1990)=g(f(1990))=g\left(\cos\frac{1990\cdot\pi}{3}\right)=2\cdot\left|\cos\frac{1990\cdot\pi}{3}+1\right|=$$

$$=\left[2\cdot\pi=\frac{6\cdot\pi}{3} \ , \ \frac{1990\cdot\pi}{3}=\frac{331\cdot 6\cdot\pi+4\cdot\pi}{3}=\frac{4\cdot\pi}{3}+\frac{331\cdot 6\cdot\pi}{3}=\frac{4\cdot\pi}{3}+331\cdot 2\cdot\pi\right]=$$

$$=2\cdot\left|\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}+331\cdot 2\cdot\pi\right)+1\right|=2\cdot\left|\cos\frac{4\cdot\pi}{3}+1\right|=2\cdot\left|\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1\right|=2\cdot\left|-\cos\frac{\pi}{3}+1\right|=$$

$$=2\cdot\left|-\frac{1}{2}+1\right|=2\cdot\left|\frac{1}{2}\right|=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Vježba 056

Neka je $f(x)=\cos\frac{x\cdot\pi}{3}$ i $g(x)=2\cdot|x+2|$. Izračunajte: $(f\circ g)(1990)$.

Rezultat: 3.

Zadatak 057 (Vedrana, gimnazija)

Ako je $f(1)=f(2)=f(3)=1$, $f(n+1)=\frac{f(n)\cdot f(n-1)+1}{f(n-2)}$ za $n\geq 3$, koliko je $f(6)$?

Rješenje 057

Računamo redom f(4), f(5), f(6):

$$f(4)=\frac{f(3)\cdot f(2)+1}{f(1)}=\frac{1\cdot 1+1}{1}=\frac{2}{1}=2,$$

$$f(5)=\frac{f(4)\cdot f(3)+1}{f(2)}=\frac{2\cdot 1+1}{1}=\frac{3}{1}=3,$$

$$f(6)=\frac{f(5)\cdot f(4)+1}{f(3)}=\frac{3\cdot 2+1}{1}=\frac{7}{1}=7.$$

Vježba 057

Ako je $f(1)=f(2)=f(3)=1$, $f(n+1)=\frac{f(n)\cdot f(n-1)+1}{f(n-2)}$ za $n\geq 3$, koliko je $f(7)$?

Rezultat: 11.

Zadatak 058 (Vedrana, gimnazija)

Ako je $f(x+2)=x^2+6\cdot x+12$, koliko iznosi parametar a u jednakosti $f(x)=x^2+a\cdot x+b$?

Rješenje 058

Ponovimo!

- Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.
- $(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$.

Budući da je zadano $f(x)=x^2+a\cdot x+b$, računamo f(x + 2):

$$f(x)=x^2+a\cdot x+b \Rightarrow f(x+2)=(x+2)^2+a\cdot(x+2)+b \Rightarrow f(x+2)=x^2+4\cdot x+4+a\cdot x+2\cdot a+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x+2)=x^2+(a+4)\cdot x+(2\cdot a+b+4).$$

Iz jednakosti polinoma dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+2)=x^2+(a+4)\cdot x+(2\cdot a+b+4) \\ f(x+2)=x^2+6\cdot x+12 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x^2+(a+4)\cdot x+(2\cdot a+b+4)=x^2+6\cdot x+12\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+4=6 \\ 2\cdot a+b+4=12 \end{array}\right\} \Rightarrow\ a=6-4\ \Rightarrow\ a=2.$$

Vježba 058

Ako je $f(x+2)=x^2+6\cdot x+12,$ koliko iznosi parametar b u jednakosti $f(x)=x^2+a\cdot x+b?$

Rezultat: 4.

Zadatak 059 (Vedrana, gimnazija)

Nađite domenu funkcije $f(x)=\log_x\sqrt{\frac{x^2+2\cdot x+1}{x-2}}.$

Rješenje 059

Ponovimo!

$$f(x)=\log_b x \quad , \quad b>0\ ,\ b\neq 1 \quad , \quad x>0.$$

Tražimo domenu zadane funkcije:

$$\left.\begin{array}{l} x>0,\ x\neq 1 \\ \frac{x^2+2\cdot x+1}{x-2}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{(x+1)^2}{x-2}>0.$$

Budući da je brojnik $(x+1)^2$ pozitivan broj za svaki $x>0$, slijedi:

$$x-2>0\ \Rightarrow\ x>2\ \Rightarrow\ x\in\langle 2,+\infty\rangle.$$

Vježba 059

Nađite domenu funkcije $f(x)=\log_x\sqrt{\frac{x^2+2\cdot x+1}{x-3}}.$

Rezultat: $x\in\langle 3,+\infty\rangle.$

Zadatak 060 (2A, hotelijerska škola)

Graf funkcije $f(x)=x^2-2\cdot x+2$ možemo dobiti tako da parabolu $y=x^2$

A. translatiramo po x – osi za 1 udesno, a zatim po y – osi za 1 prema gore
B. translatiramo po x – osi za 2 ulijevo, a zatim po y – osi za 2 prema dolje
C. translatiramo po y – osi za 1 prema gore, a zatim po x – osi za 2 ulijevo
D. zrcalimo s obzirom na pravac $y=2\cdot x-2$
E. zrcalimo s obzirom na pravac $x=1$

Rješenje 060

$$y=x^2-2\cdot x+2\ \Rightarrow\ y=\underbrace{x^2-2\cdot x+1}_{\text{kvadrat razlike}}+1\ \Rightarrow\ y=(x-1)^2+1.$$

Parabolu $y=x^2$ translatiramo po x – osi za 1 udesno, a zatim po y – osi za 1 prema gore. Odgovor je pod A.

Vježba 060

Graf funkcije $f(x)=x^2-2\cdot x+3$ možemo dobiti tako da parabolu $y=x^2$

A. translatiramo po x – osi za 1 udesno, a zatim po y – osi za 2 prema gore
B. translatiramo po x – osi za 2 ulijevo, a zatim po y – osi za 2 prema dolje
C. translatiramo po y – osi za 1 prema gore, a zatim po x – osi za 2 ulijevo
D. zrcalimo s obzirom na pravac $y=2\cdot x-2$
E. zrcalimo s obzirom na pravac $x=2$

Rezultat: Odgovor pod A.