Zadatak 081 (Vedrana, maturantica)

Je li funkcija f(x) = cos (sin x) – sin (cos x) parna ili neparna?

Rješenje 081

Ponovimo!

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području $-a \le x \le a$ nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).
- Funkcija f(x) = sin x je neparna:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

- Funkcija f(x) = cos x je parna:

$$\cos(-x) = \cos x.$$

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) - \sin(\cos(-x)) \Rightarrow f(-x) = \cos(-\sin x) - \sin(\cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x) \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Funkcija je parna.

Vježba 081

Je li funkcija f(x) = cos (sin x) – cos (cos x) parna ili neparna?

Rezultat: Parna je.

Zadatak 082 (Maturanti, TUPŠ)

Ako je $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$, koliko je $f(x+1) - f(x)$?

Rješenje 082

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$f(x+1) - f(x) = 3 \cdot 2^{(x+1)-1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 3 \cdot 2^{x+1-1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 3 \cdot 2^1 \cdot 2^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 2^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 6 \cdot 2^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 3 \cdot 2^{x-1} = f(x).$$

Vježba 082

Ako je $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$, koliko je $f(x+1) + f(x)$?

Rezultat: $3 \cdot f(x).$

Zadatak 083 (Rogi, VTŠ)

Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_2 4x - \log_{\sqrt{2}} x.$

Rješenje 083

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x \quad , \quad \log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad , \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}.$$

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Najprije transformiramo zadanu funkciju uporabom svojstava logaritma:

$$f(x) = \log_2 4x - \log_{\sqrt{2}} x \Rightarrow f(x) = \log_2 4x - \log_{2^{\frac{1}{2}}} x \Rightarrow f(x) = \log_2 4x - 2 \cdot \log_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_2 4x - \log_2 x^2 \Rightarrow f(x) = \log_2 \frac{4 \cdot x}{x^2} \Rightarrow f(x) = \log_2 \frac{4}{x}.$$

Sada tražimo inverznu funkciju:

$$f(x)=\log_2\frac{4}{x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{pišemo}\\ y=f(x)\end{bmatrix} \Rightarrow y=\log_2\frac{4}{x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamijenimo } y \text{ i } x\\ y\leftrightarrow x\end{bmatrix} \Rightarrow x=\log_2\frac{4}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\log_b a=c \Leftrightarrow b^c\right] \Rightarrow 2^x=\frac{4}{y} \Rightarrow [\text{računamo } y] \Rightarrow 2^x=\frac{4}{y} \;/\cdot y \Rightarrow y\cdot 2^x=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{4}{2^x} \Rightarrow y=4\cdot 2^{-x} \Rightarrow y=2^2\cdot 2^{-x} \Rightarrow y=2^{2-x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{pišemo}\\ y=f^{-1}(x)\end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x)=2^{2-x}.$$

Vježba 083

Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x)=2^{2-x}$.

Rezultat: $f^{-1}(x)=\log_2\frac{4}{x}.$

Zadatak 084 (Rogi, VTŠ)

Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x)=\frac{3^x}{1+3^x}$.

Rješenje 084

Ponovimo!

$$\log_b a=c \Leftrightarrow b^c=a.$$

Tražimo inverznu funkciju:

$$f(x)=\frac{3^x}{1+3^x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{pišemo}\\ y=f(x)\end{bmatrix} \Rightarrow y=\frac{3^x}{1+3^x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamijenimo } y \text{ i } x\\ y\leftrightarrow x\end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{3^y}{1+3^y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{računamo } y] \Rightarrow x=\frac{3^y}{1+3^y} \;/\cdot\left(1+3^y\right) \Rightarrow x\cdot\left(1+3^y\right)=3^y \Rightarrow x+x\cdot 3^y=3^y \Rightarrow x=3^y-x\cdot 3^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{izlučimo } 3^y\right] \Rightarrow x=3^y\cdot(1-x) \Rightarrow 3^y=\frac{x}{1-x} \Rightarrow \left[\log_b a=c \Leftrightarrow b^c=a\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\log_3\frac{x}{1-x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{pišemo}\\ y=f^{-1}(x)\end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_3\frac{x}{1-x}.$$

Vježba 084

Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x)=\log_3\frac{x}{1-x}$.

Rezultat: $f^{-1}(x)=\frac{3^x}{1+3^x}.$

Zadatak 085 (Ivan, maturant)

Odredi sve realne brojeve a i b za koje je funkcija f(x) = a · sin x + b · cos x parna.

Rješenje 085

Ponovimo!

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).
- Funkcija f(x) = sin x je neparna:

  sin (– x) = – sin x

- Funkcija f(x) = cos x je parna:

$$\cos(-x) = \cos x.$$

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu pa dobijemo:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow a \cdot \sin(-x) + b \cdot \cos(-x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \Rightarrow -a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \Rightarrow -a \cdot \sin x = a \cdot \sin x \Rightarrow -a \cdot \sin x - a \cdot \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot a \cdot \sin x = 0 \;/ : (-2) \Rightarrow a \cdot \sin x = 0.$$

Budući da sin x može imati vrijednosti između – 1 i 1, nužno mora biti a = 0. Dakle, zadana funkcija je parna ako je:

- a = 0
- b bilo koji realan broj.

Vježba 085

Odredi sve realne brojeve a i b za koje je funkcija f(x) = a · sin x + b · cos x neparna.

Rezultat: Funkcija je neparna ako je a bilo koji realan broj, b = 0.

Zadatak 086 (Ksenija, srednja škola)

Odredi temeljnu periodu funkcije f(x) = sin 4x + sin 6x.

Rješenje 086

Ponovimo!

Funkcija f je periodična s periodom P ($P \neq 0$), ako za svaki x vrijedi: Ako je funkcija f definirana u jednoj od točaka x, x + P, onda je definirana u obje te točke i vrijedi

$$f(x + P) = f(x).$$

Broj P zove se perioda funkcije f. Najmanja pozitivna perioda funkcije f (ako postoji) zove se **temeljna perioda** funkcije f.

Ako za funkciju $f : D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x + P) = f(x),$$

za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi f(x + P) = f(x) nazivaju se periode funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljna perioda. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljna perioda za sinus je 2π.

Ako je P temeljna perioda funkcije y = f(x), tada je

$$\frac{P}{a}, \; a > 0$$

temeljna perioda funkcije y = f(a · x).

Ako su P_1 i P_2 periode dviju funkcija, te

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m}{n} \in Q,$$

onda je

$$P = n \cdot P_1 = m \cdot P_2$$

perioda zbroja tih funkcija.

Funkcija f(x) = sin x ima temeljnu periodu 2π pa perioda funkcije f(x) = sin 4x iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x \Rightarrow P = 2 \cdot \pi \\ f(x) = \sin 4x \Rightarrow P_1 = \dfrac{2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow P_1 = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}.$$

Funkcija f(x) = sin x ima temeljnu periodu 2π pa perioda funkcije f(x) = sin 6x iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x \Rightarrow P = 2 \cdot \pi \\ f(x) = \sin 6x \Rightarrow P_2 = \dfrac{2 \cdot \pi}{6} \Rightarrow P_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\}.$$

Perioda zadane funkcije iznosi:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{3}{2} \Rightarrow P=2\cdot P_1=3\cdot P_2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} P=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi \\ \text{ili} \\ P=3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 086

Odredi temeljnu periodu funkcije f(x) = sin 4x + sin 8x.

Rezultat: $\frac{\pi}{2}$.

Zadatak 087 (Ivana, maturantica)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije zadane formulom: $f(x)=\sqrt{\ln(\sin x)}$.

Rješenje 087

Ponovimo!

$$\ln 1=0 \quad , \quad \ln f(x)\ge \ln g(x) \Rightarrow f(x)\ge g(x) \quad , \quad |\sin x|\le 1.$$

$$f(x)=\sqrt{\ln(\sin x)} \Rightarrow \ln(\sin x)\ge 0 \Rightarrow \ln(\sin x)\ge \ln 1 \Rightarrow \sin x\ge 1 \Rightarrow \left[\,|\sin x|\le 1\,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in Z$$

Domena funkcije iznosi:

$$D(f)=\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in Z\right\}.$$

Vježba 087

Odredi područje definicije (domenu) funkcije zadane formulom: $f(x)=\sqrt{\ln(\cos x)}$.

Rezultat: $D(f)=\{k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in Z\}$.

Zadatak 088 (Ante, gimnazija)

Koji osnovni period ima funkcija $f(x)=\cos(3\cdot x-2)+5\cdot\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$?

Rješenje 088

Ponovimo!

Funkcija f je periodična s periodom P (P ≠ 0), ako za svaki x vrijedi: Ako je funkcija f definirana u jednoj od točaka x, x + P, onda je definirana u obje te točke i vrijedi

$$f(x+P)=f(x).$$

Broj P zove se period funkcije f. Najmanji pozitivni period funkcije f (ako postoji) zove se **temeljni period** funkcije f.

Ako za funkciju $f: D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x\in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi

f(x + P) = f(x) nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljni period. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljni period za sinus je 2π. Ako je P temeljni period funkcije y = f(x), tada je

$$\frac{P}{a}\ ,\ a>0$$

temeljni period funkcije y = f(a · x).

Ako su P_1 i P_2 periodi dviju funkcija, te

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{m}{n}\in Q,$$

onda je

$$P=n\cdot P_1=m\cdot P_2$$

period zbroja tih funkcija.

Funkcija f(x) = cos x ima temeljni period 2π pa period funkcije

$$f_1(x)=\cos(3\cdot x-2)\Rightarrow f_1(x)=\cos 3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\cos x\Rightarrow P=2\cdot\pi \\ f_1(x)=\cos 3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow P_1=\frac{2\cdot\pi}{3}\end{array}\right\}.$$

Funkcija f(x) = sin x ima temeljni period 2π pa period funkcije

$$f_2(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f_2(x)=\sin\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin x\Rightarrow P=2\cdot\pi \\ f_2(x)=\sin\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow P_2=\frac{2\cdot\pi}{\frac{1}{2}}=4\cdot\pi\end{array}\right\}.$$

Period zadane funkcije iznosi:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{2\cdot\pi}{3}}{4\cdot\pi}\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{2\cdot\pi}{3}}{\frac{4\cdot\pi}{1}}\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\frac{2}{12}\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\frac{1}{6}\Rightarrow P=6\cdot P_1=1\cdot P_2\Rightarrow \text{ili}\left.\begin{array}{l} P=6\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}=4\cdot\pi \\ P=1\cdot\frac{4\cdot\pi}{1}=4\cdot\pi\end{array}\right\}.$$

Vježba 088

Koji osnovni period ima funkcija $f(x)=\cos(3\cdot x-5)+7\cdot\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$?

Rezultat: 4 · π.

Zadatak 089 (Matea, gimnazija)

Neka je f(x) = x^2 – 2, h(x) = 1 – x, te neka vrijedi jednadžba $(h\circ g)(x)+(g\circ f)(x)=2,$ za neku funkciju g. Ako je g(1) = 5, koliko je g(–1)?

Rješenje 089

Ponovimo!

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Postavimo jednadžbu:

$$(h\circ g)(x)+(g\circ f)(x)=2\Rightarrow h(g(x))+g(f(x))=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} h(x)=1-x \\ f(x)=x^2-2\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-g(x)+g\left(x^2-2\right)=2\Rightarrow -g(x)+g\left(x^2-2\right)=2-1\Rightarrow -g(x)+g\left(x^2-2\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ g\left(x^2-2\right)-g(x)=1.$$

Budući da je g(1) = 5, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} g\left(x^2-2\right)-g(x)=1 \\ g(1)=5\ \Rightarrow\ x=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ g\left(1^2-2\right)-g(1)=1\ \Rightarrow\ g(1-2)-5=1\ \Rightarrow\ g(-1)-5=1\ \Rightarrow\ g(-1)=6.$$

Vježba 089

Neka je f(x) = x^2 – 2, h(x) = 1 – x, te neka vrijedi jednadžba $(h\circ g)(x)+(g\circ f)(x)=2,$ za neku funkciju g. Ako je g(3) = 5, koliko je g(7)?

Rezultat: 6.

Zadatak 090 (Sanja, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{x-1}{x+1}.$ Odredi a, b, c i d tako da vrijedi $f(g(x))=x,$ ako je $g(x)=\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}.$

Rješenje 090

Ponovimo!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}=\frac{a}{c}\quad,\quad\frac{n}{1}=n.$$

Domena funkcije $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ iznosi:

$$x+1\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq -1\ \Rightarrow\ D(f)=R\setminus\{-1\}.$$

Pretpostavimo da postoji funkcija g(x) traženih osobina. Tada bi vrijedilo:

$$f(g(x))=x\ \Rightarrow\ \frac{g(x)-1}{g(x)+1}=x\ \Rightarrow\ \frac{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}-1}{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}+1}=x\ \Rightarrow\ \frac{\frac{a\cdot x+b-(c\cdot x+d)}{c\cdot x+d}}{\frac{a\cdot x+b+(c\cdot x+d)}{c\cdot x+d}}=x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\frac{a\cdot x+b-c\cdot x-d}{c\cdot x+d}}{\frac{a\cdot x+b+c\cdot x+d}{c\cdot x+d}}=x\ \Rightarrow\ \frac{\frac{a\cdot x+b-c\cdot x-d}{c\cdot x+d}}{\frac{a\cdot x+b+c\cdot x+d}{c\cdot x+d}}=x\ \Rightarrow\ \frac{a\cdot x+b-c\cdot x-d}{a\cdot x+b+c\cdot x+d}=x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{a\cdot x-c\cdot x+b-d}{a\cdot x+c\cdot x+b+d}=x\ \Rightarrow\ \frac{(a-c)\cdot x+(b-d)}{(a+c)\cdot x+(b+d)}=x.$$

Da bi lijeva strana jednakosti bila jednaka desnoj mora biti:

$$\left.\begin{array}{l} a-c=1 \\ a+c=0 \\ b-d=0 \\ b+d=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a-c=1 \\ a+c=0 \\ \hline b-d=0 \\ b+d=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 2\cdot a=1 \\ 2\cdot b=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 2\cdot a=1\ /:2 \\ 2\cdot b=1\ /:2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \ , \ a+c=0 \\ b=\frac{1}{2} \ , \ b-d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}+c=0 \\ \frac{1}{2}-d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-\frac{1}{2} \\ -d=-\frac{1}{2} \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Rješenje sustava daje funkciju g:

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \ , \ b=\frac{1}{2} \ , \ c=-\frac{1}{2} \ , \ d=\frac{1}{2} \\ g(x)=\frac{a \cdot x+b}{c \cdot x+d} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)=\frac{\frac{1}{2} \cdot x+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} \cdot x+\frac{1}{2}} \Rightarrow g(x)=\frac{\frac{1}{2} \cdot (x+1)}{\frac{1}{2} \cdot (-x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{\frac{1}{2} \cdot (x+1)}{\frac{1}{2} \cdot (-x+1)} \Rightarrow g(x)=\frac{x+1}{-x+1} \Rightarrow g(x)=\frac{x+1}{1-x} \ , \ x \neq 1.$$

Vježba 090

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Odredi a, b, c i d tako da vrijedi $f(g(x))=\frac{1}{x}$, ako je $g(x)=\frac{a \cdot x+b}{c \cdot x+d}$.

Rezultat: $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Zadatak 091 (Mala, maturantica gimnazije)

Odredi funkciju f koja zadovoljava danu jednakost: $f(x)+5 \cdot f(-x)=6 \cdot x+12$.

Rješenje 091

Ako u danu jednakost umjesto x stavimo – x, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+5 \cdot f(-x)=6 \cdot x+12 \\ x \rightarrow -x \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x)+5 \cdot f(-(-x))=6 \cdot (-x)+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)+5 \cdot f(x)=-6 \cdot x+12 \Rightarrow 5 \cdot f(x)+f(-x)=-6 \cdot x+12.$$

Rješavamo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice f(x) i f(– x):

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+5 \cdot f(-x)=6 \cdot x+12 \\ 5 \cdot f(x)+f(-x)=-6 \cdot x+12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)+5 \cdot f(-x)=6 \cdot x+12 \\ 5 \cdot f(x)+f(-x)=-6 \cdot x+12 \ / \cdot (-5) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)+5 \cdot f(-x)=6 \cdot x+12 \\ -25 \cdot f(x)-5 \cdot f(-x)=30 \cdot x-60 \end{array}\right\} \Rightarrow -24 \cdot f(x)=36 \cdot x-48 \ / : (-24) \Rightarrow f(x)=-\frac{36}{24} \cdot x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2} \cdot x+2. \ \text{tražena funkcija}$$

Vježba 091

Odredi funkciju f koja zadovoljava danu jednakost: $f(x)+2 \cdot f(-x)=-2 \cdot x+3$.

Rezultat: $f(x)=2 \cdot x+1$.

Zadatak 092 (Mala, maturantica gimnazije)

Odredi funkciju f koja zadovoljava danu jednakost: $f(x)+2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3 \cdot x$

Rješenje 092

Ako u danu jednakost umjesto x stavimo $\frac{1}{x}$, dobije se:

$$\left.\begin{matrix} f(x)+2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3\cdot x \\ x\to\frac{1}{x}\end{matrix}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+2\cdot f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=3\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+2\cdot f(x)=\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow 2\cdot f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$$

Rješavamo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice $f(x)$ i $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\left.\begin{matrix} f(x)+2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3\cdot x \\ 2\cdot f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x)+2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3\cdot x \\ 2\cdot f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x} \ /\cdot(-2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x)+2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3\cdot x \\ -4\cdot f(x)-2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{6}{x}\end{matrix}\right\} \Rightarrow -3\cdot f(x)=3\cdot x-\frac{6}{x} \ /:(-3) \Rightarrow f(x)=-x+\frac{2}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x.$$

Vježba 092

Odredi funkciju f koja zadovoljava danu jednakost: $2\cdot f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$

Rezultat: $f(x)=\frac{2}{x}-x.$

Zadatak 093 (Vlado, maturant)

Izračunati f(7) ako je $f(x^2 - 2\cdot x + 8) = 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$.

Rješenje 093

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Budući da računamo f(7), stavimo da je $x^2 - 2\cdot x + 8 = 7$ i riješimo kvadratnu jednadžbu.

$$x^2-2\cdot x+8=7 \Rightarrow x^2-2\cdot x+8-7=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Sada je:

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ f\left(x^2-2\cdot x+8\right)=4\cdot x^2+2\cdot x+1\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(7)=4\cdot 1^2+2\cdot 1+1 \Rightarrow f(7)=4\cdot 1+2\cdot 1+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(7)=4+2+1 \Rightarrow f(7)=7.$$

Vježba 093

Izračunati f(9) ako je $f(x^2 - 2\cdot x + 10) = 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$.

Rezultat: 7.

Zadatak 094 (Megy, studentica)

Neka je R skup realnih brojeva. Funkcije f i g definirane su na sljedeći način:

$a)\ f\ :\ R \to R\ ,\ f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \quad , \quad b)\ g\ :\ R \to R\ ,\ g(x) = 1.$

Jesu li funkcije f i g jednake?

Rješenje 094

Ponovimo!

Osnovni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Neka su A i B dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in A$ pridružen točno jedan element $y \in B$ kažemo da je definirana, zadana funkcija sa skupa A u skup B i označavamo ovako

$$f\ :\ A \to B.$$

Skup A zove se domena, područje definicije ili ulazni skup. Skup B zove se kodomena, područje vrijednosti funkcije ili izlazni skup.

Ako je funkcija f elementu x pridružila element y pišemo y = f(x).

Jednakost funkcija

Za funkcije

$$f\ :A \to B \quad , \quad g:C \to D$$

kažemo da su jednake i pišemo f = g, ako su ispunjena tri uvjeta:

1) imaju jednake domene: A = C,

2) imaju jednake kodomene: B = D,

3) f(x) = g(x) za svaki $x \in R$.

Uočimo da je jednakost funkcija primjer relacije ekvivalencije jer je refleksivna, simetrična i tranzitivna:

refleksivnost: $f = f$

simetričnost: $f = g \Rightarrow g = f$

tranzitivnost: $f = g$ i $g = h \Rightarrow f = h.$

Funkcije f i g jednake su jer:

1) imaju jednake domene , R = R

2) imaju jednake kodomene , R = R

3) $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in R$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ je trigonometrijski identitet.

Vježba 094

Neka je R skup realnih brojeva. Funkcije f i g definirane su na sljedeći način:

$a)\ f\ :\ R \to R\ ,\ f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} \quad , \quad b)\ g\ :\ R \to R\ ,\ g(x) = x^2 - 1.$

Jesu li funkcije f i g jednake?

Rezultat: Funkcije su jednake.

Zadatak 095 (Marin, tehnička škola)

Zadana je funkcija $f(x) = 2 \cdot x^2 + \frac{2}{x^2}$. Dokažite da je za sve x ≠ 0 zadovoljena relacija $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rješenje 095

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 2\cdot x^2+\frac{2}{x^2} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= 2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f(x) &= 2\cdot x^2+\frac{2}{x^2} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= 2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{2}{\frac{1}{x^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f(x) &= 2\cdot x^2+\frac{2}{x^2} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= 2\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f(x) &= 2\cdot x^2+\frac{2}{x^2} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= 2\cdot x^2+\frac{2}{x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vježba 095

Zadana je funkcija $f(x)=2\cdot x^3+\frac{2}{x^3}$. Dokažite da je za sve x ≠ 0 zadovoljena relacija $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 096 (Nena, gimnazija)

Odredite koje su sljedeće funkcije parne, koje neparne, a koje nisu ni parne ni neparne:

$$a)\ f(x)=\frac{x^4+x^2+2}{x^2+1}\quad,\quad b)\ f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+3}\quad,\quad c)\ f(x)=x^2-4\cdot x+5.$$

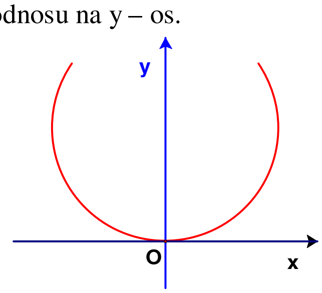
Rješenje 096

Ponovimo!

Funkcija $f:\langle -a,\, a\rangle \to R$ je parna, ako vrijedi

$$f(-x)=f(x) \text{ za svako } x\in\langle -a,\, a\rangle.$$

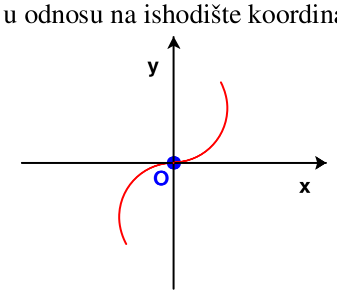
Graf parne funkcije je simetričan u odnosu na y – os.



Funkcija $f:\langle -a,\, a\rangle \to R$ je neparna, ako vrijedi

$$f(-x)=-f(x) \text{ za svako } x\in\langle -a,\, a\rangle.$$

Graf neparne funkcije je simetričan u odnosu na ishodište koordinatnog sustava.



a) Da bismo ispitali je li funkcija $f(x)=\frac{x^4+x^2+2}{x^2+1}$ parna, neparna ili ni jedno, ni drugo, računamo njezinu vrijednost za – x pa slijedi:

$$f(-x)=\frac{(-x)^4+(-x)^2+2}{(-x)^2+1} \Rightarrow f(-x)=\frac{x^4+x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow f(-x)=\underbrace{\frac{x^4+x^2+2}{x^2+1}}_{f(x)} \Rightarrow f(-x)=f(x).$$

Funkcija je parna.

b) Da bismo ispitali je li funkcija $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$ parna, neparna ili ni jedno, ni drugo, računamo njezinu vrijednost za – x pa slijedi:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2+1} \Rightarrow f(-x)=\frac{-x^3+x}{x^2+1} \Rightarrow f(-x)=\frac{-\left(x^3-x\right)}{x^2+1} \Rightarrow f(-x)=-\frac{x^3-x}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=-\underbrace{\frac{x^3-x}{x^2+1}}_{f(x)} \Rightarrow f(-x)=-f(x).$$

Funkcija je neparna.

c) Da bismo ispitali je li funkcija $f(x)=x^2-4\cdot x+5$ parna, neparna ili ni jedno, ni drugo, računamo njezinu vrijednost za – x pa slijedi:

$$f(-x)=(-x)^2-4\cdot(-x)+5 \Rightarrow f(-x)=x^2+4\cdot x+5.$$

Funkcija nije niti parna, niti neparna jer f(– x) nije jednako niti f(x), niti – f(x).

Vježba 096

Odredite koje su sljedeće funkcije parne, koje neparne, a koje nisu ni parne ni neparne:

$$a)\ f(x)=\frac{x^6+x^4+3}{x^4+2} \quad , \quad b)\ f(x)=\frac{x^5-x^3}{x^2+2} \quad , \quad c)\ f(x)=x^2-3\cdot x+2.$$

Rezultat: a) parna b) neparna c) ni parna, ni neparna.

Zadatak 097 (Nena, gimnazija)

Dokažite da je zbroj parnih funkcija parna funkcija.

Rješenje 097

Neka su f i g parne funkcije.

$$f(-x)=f(x) \quad , \quad g(-x)=g(x).$$

Zbroj funkcija f i g neka je funkcija h, tj.

$$h(x)=f(x)+g(x).$$

Dokažimo da je funkcija h također parna.
Računamo njezinu vrijednost za – x pa slijedi:

$$h(-x)=f(-x)+g(-x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{funkcije } f \text{ i} \\ g \text{ su parne}\end{array}\right] \Rightarrow h(-x)=f(x)+g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(-x)=\underbrace{f(x)+g(x)}_{h(x)} \Rightarrow h(-x)=h(x).$$

Time je dokazano da je funkcija h kao zbroj parnih funkcija f i g također parna funkcija.

Vježba 097

Dokažite da je zbroj neparnih funkcija neparna funkcija.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 097 (Nena, gimnazija)

Dokažite da je funkcija $f(x) = 2 \cdot x + 6$ strogo rastuća funkcija.

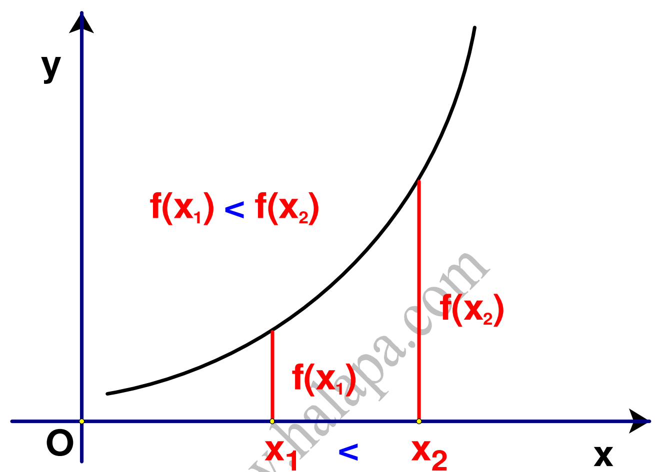
Rješenje 097

Ponovimo!

Funkcija $f: D \rightarrow R$ je strogo rastuća na D ako vrijedi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Također slijedi:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$



Dokazujemo da je funkcija $f(x) = 2 \cdot x + 6$ strogo rastuća:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow 2 \cdot x_1 + 6 < 2 \cdot x_2 + 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{nejednadžbi} \\ \text{pribrojimo } -6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot x_1 + 6 < 2 \cdot x_2 + 6 \; / - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_1 + 6 - 6 < 2 \cdot x_2 + 6 - 6 \Rightarrow 2 \cdot x_1 + 6 - 6 < 2 \cdot x_2 + 6 - 6 \Rightarrow 2 \cdot x_1 < 2 \cdot x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_1 < 2 \cdot x_2 \; / : 2 \Rightarrow x_1 < x_2.$$

Funkcija je strogo rastuća.

Vježba 097

Dokažite da je funkcija $f(x) = 2 \cdot x + 8$ strogo rastuća funkcija.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 098 (Ante, student)

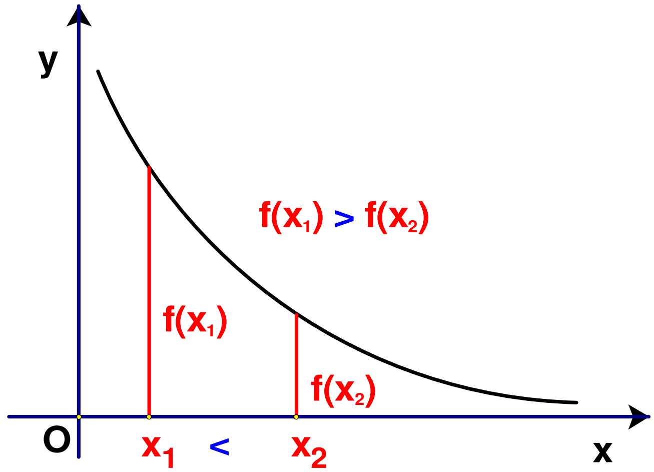
Dokažite da je funkcija $f(x) = x^2$ za $-\infty < x < 0$ strogo padajuća.

Rješenje 098

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad a \cdot b > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\}.$$

Funkcija $f: D \rightarrow R$ je strogo padajuća na D ako vrijedi $x_1, x_2 \in D$, $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.



Dokazujemo da je funkcija f(x) = x^2 strogo padajuća na intervalu $\left\langle -\infty, 0 \right\rangle$.

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 > 0 \Rightarrow (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) > 0.$$

Budući da je funkcija f(x) = x^2 definirana na intervalu $\left\langle -\infty, 0 \right\rangle$, brojevi x_1 i x_2 su negativni pa je njihov zbroj $x_1 + x_2$ također negativan broj,

$$x_1 + x_2 < 0.$$

Da bi umnožak

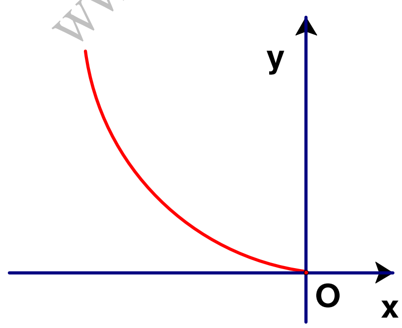
$$(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)$$

bio pozitivan, tj. da vrijedi

$$(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) > 0$$

mora biti

$$x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow x_1 < x_2.$$



Znači

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

pa je funkcija f(x) = x^2 strogo padajuća na intervalu $\left\langle -\infty, 0 \right\rangle$.

Vježba 098

Dokažite da je funkcija f(x) = x^2 za $0 < x < \infty$ strogo rastuća.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 099 (Nina, gimnazija)

Za realni broja a definiramo preslikavanja $f_a : R \to R$ i $g_a : R \to R$ sa $f_a(x) = x + a$, $g_a(x) = a \cdot x$. Koliko ima brojeva a za koje vrijedi da je

$$f_a \circ g_a = g_a \circ f_a.$$

Rješenje 099

Ponovimo!

$$x \cdot y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ili } y = 0 \text{ ili } x = y = 0.$$

Neka su S, S_1 i S_2 neprazni skupovi i $f : S \to S_1$, $g : S_1 \to S_2$ funkcije zadane na S, odnosno na S_1 sa vrijednostima u S_1, odnosno u S_2. Tada je sa

$$h(x) = (g \circ f)(x) \;\Rightarrow\; h(x) = g(f(x)) \;,\; \forall x \in S$$

zadana funkcija $h : S \to S_2$ koja se zove kompozicija ili složena funkcija, funkcija f i g.

$$\left.\begin{array}{l} f_a(x) = x + a \;,\; g_a(x) = a \cdot x \\ f_a \circ g_a = g_a \circ f_a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_a(x) = x + a \;,\; g_a(x) = a \cdot x \\ (f_a \circ g_a)(x) = (g_a \circ f_a)(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_a(x) = x + a \;,\; g_a(x) = a \cdot x \\ f_a(g_a(x)) = g_a(f_a(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_a(x) = x + a \;,\; g_a(x) = a \cdot x \\ g_a(x) + a = a \cdot f_a(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot x + a = a \cdot (x + a) \Rightarrow a \cdot x + a = a \cdot x + a^2 \Rightarrow a \cdot x + a = a \cdot x + a^2 \Rightarrow a = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a \cdot (a - 1) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ a - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva broja a za koje vrijedi da je

$$f_a \circ g_a = g_a \circ f_a.$$

Vježba 099

Definiramo preslikavanja $f : R \to R$ i $g : R \to R$ sa $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Uvjeri se da vrijedi

$$f \circ g = g \circ f.$$

Rezultat: Jednakost vrijedi.

Zadatak 100 (Kate, studentica)

Je li funkcija $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ parna ili neparna?

Rješenje 100

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad , \quad \ln a^n = n \cdot \ln a.$$

Funkciju $y = f(x)$ definiranu u simetričnom području $-a \le x \le a$ nazivamo:

- parnom, ako je $f(-x) = f(x)$
- neparnom, ako je $f(-x) = -f(x)$.

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} \Rightarrow f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(-x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} \Rightarrow f(-x) = -1 \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = -\ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f(-x) = -\underbrace{\ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)}_{f(x)} \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Funkcija je neparna.

Vježba 100

Je li funkcija $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ parna ili neparna?

Rezultat: Neparna je.